PDF Compressor Pro

الرياضيات

البحتة

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمي

دليل المعلم

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.م.د/ سمر عبد الفتاح لاشين

د/ أمل الشحات حافظ

SAKKARA PUBLISHING

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

PDF Compressor Pro

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

الطبعــة الأولى ٢٠١٥/٢٠١٦
رقم الإيــداع ١٠٥٦١ / ٢٠١٥
الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 018 - 9

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

PDF Compressor Pro

المحتويات

الفصل الدراسي الأول

مقدّمة المعلم ..... أ-ف

الوحدة الأولى الدوال الدوال ذات المتغير الحقيقي ورسم المنحنيات ٢

١ - ١ الدوال الحقيقية. ٤

١ - ٢ بعض خواص الدوال. ١١

١ - ٣ اطراد الدوال. ١٦

١ - ٤ التمثيل البياني للدوال. ١٩

١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة. ٢٩

الوحدة الثانية الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها ٣٦

٢ - ١ الأسس الكسرية. ٣٨

٢ - ٢ الدالة الأسية. ٤٢

٢ - ٣ المعادلات الأسية وتطبيقاتها. ٤٦

٢ - ٤ الدالة العكسية. ٤٨

٢ - ٥ الدالة اللوغارتمية وتمثيلها البياني. ٥١

٢ - ٦ بعض خواص اللوغاريتمات. ٥٥

الوحدة الثالثة النهايات والاتصال ٦٠

٣ - ١ مقدمة في النهايات. ٦٢

٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريا. ٦٧

٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية. ٧٣

PDF Compressor Pro

٣ - ٤ نهاية الدوال المثلثية. ٧٧

٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. ٨٠

٣ - ٦ الاتصال. ٨٣

الوحدة الرابعة حساب المثلثات ٩٢

٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب. ٩٤

٤ - ٢ قانون (قاعدة) جيب التمام. ١٠٢

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الأولى المتتابعات والمتسلسلات ١١٦

٢ - ١ المتتابعات. ١١٨

٢ - ٢ المتسلسلات ورمز التجميع. ١٢٢

٢ - ٣ المتتابعة الحسابية. ١٢٥

٢ - ٤ المتسلسلات الحسابية. ١٢٩

٢ - ٥ المتتابعة الهندسية. ١٣٤

٢ - ٦ المتسلسلات الهندسية. ١٣٩

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

PDF Compressor Pro

المحتويات

الوحدة الثانية **التباديل والتوافيق** ١٤٦

٢ - ١ مبدأ العد ١٤٨

٢ - ٢ مضروب العدد – التباديل ١٥٠

٢ - ٣ التوافيق. ١٥٣

الوحدة الثالثة **التفاضل والتكامل** ١٥٨

٣ - ١ معدل التغير. ١٦٠

٣ - ٢ الاشتقاق. ١٦٥

٣ - ٣ قواعد الاشتقاق. ١٧٠

٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية. ١٧٤

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة. ١٧٨

٣ - ٦ التكامل. ١٨٢

الوحدة الرابعة **حساب المثلثات** ١٩٠

٤ - ١ زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث). ١٩٢

٤ - ٢ الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين. ١٩٧

٤ - ٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية. ٢٠١

٤ - ٤ صيغة هيرون. ٢٠٥

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

PDF Compressor Pro

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدّمة

يسعدنا ونحن نقدم هذا الدليل لمعلّمى مادة الرياضيات للصف الثانى الثانوى (علمى) أن نؤكد أن هذا الدليل قد تمَّ إعداده ليكون أداة مساعدة، يستنير بها المعلّم فى تحسين أدائه، وجعل تدريسه عملية وظيفية، تستند فى المقام الأول إلى أسس تربوية سليمة، وفى ضوء نظريات التعلّم الحديثة بحيث يكون دور المعلم ميسرًا لعملية التعلم لإعداد النشء فى عصر العلم والتكنولوجيا، الذين أصبحا من ضرورات الحياة للإنسان المعاصر.

ومن هذا المنطلق كان من الضرورى بل من المحتم لمعلّم الرياضيات فهم فلسفة المنهج الذى يعالجه، والذى وضع فى ضوء المناهج المطورة التى تضعها وزارة التربية والتعليم والتى تهتم بالآتى:

التأكيد على مبدأ استمرارية التعلُّم مدى الحياة، من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلُّم الممتزج بالمتعة والتشويق؛ وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات، وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلُّم الذاتى، والعمل التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار وتقبُّل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

تقديم رؤًى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع (Science, Technology, and Society STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب للتصرُّف الواعى والفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

التركيز على تبصير الطلاب بالمفاهيم والمبادئ الرياضية المتعلّقة بالأنشطة الحياتية، وتنمية اتجاهات إيجابية للطلاب تُجاه الرياضيات ودراستها، لتقدير إيجابياتها كأداة فاعلة فى الحياة.

تزويد الطلاب بثقافة شاملة مبنية على رؤية واضحة داخل الإطار البيئى الذى يعيشون فيه، من خلال تنمية الاتجاهات الإيجابية لحسن استخدام الموارد والإمكانات المتاحة.

تنمية وتعميق الانتماء للوطن بإظهار دور الدولة فيما تقدّمه من خِدْمات تعود بالخير والنفع فى جميع المناحى الحياتية.

الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء منهج الرياضيات فى المرحلة الثانوية.

الغاية الأساسية من المنهج الجديد هو مساعدة المتعلم على فهم أساسيات الرياضيات التى تساعده على مواصلة تعليمها أو تعلمها، وكذلك على اتخاذ القرارات السليمة، وحل المشكلات فى حياته اليومية، ومساعدته على تحسين فهم العالم ومشاركته المجتمعية بحيث يمنح تعلم الرياضيات ارتياحًا ذاتيًّا وقوة للمتعلم تتزايد مع قدرته على استخدام لغة الرياضيات التي تعبر عن الرموز المجردة للمفاهيم وكذلك قدرته على استخدامه للتكنولوجيا الحديثة.

ويعتمد المدخل الجديد فى بناء المنهج الحالى على أساسيات المعرفة الرياضية وتنمية طرائق التّفكير وبناء المهارات العلمية ويبتعد عن التفاصيل والحشو، والتعليم التلقينى الذى يولد إستراتيجيات تعليم تقوم على حفظ الحقائق؛ لذلك يتم اختيار المفاهيم والمبادئ العامة، وأساليب البحث وخطط حل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية، والتى تسمح للمتعلم باستخدامها فى مواقف الحياة المختلفة، والتركيز على إكساب المتعلّمين المقدرة على التعلم بأنفسهم، وعلى جمع المعلومات من مصادر متنوعة ومعالجتها واستخدامها عند الحاجة إليها فى دراسة مشكلات ترتبط بحياتهم وبمجتمعهم.

وقد راعى المنهج الحالى ما يلى:

(١) تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

(٢) تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

(٣) تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

PDF Compressor Pro

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

- أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته.
- أن يكون المتعلم محبًا للرياضيات ومبادرًا بدراستها.
- أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق.
- أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا.
- أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

(٤) اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

(٥) اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

(٦) احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

ومن المهارات التى تم التأكيد عليها:

- مهارة التعلم الذاتى.
- مهارة الدراسة والبحث.
- استخدام المراجع والمصادر والاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).
- مهارة التفكير بأنواعه المختلفة ومنها: التفكير النقدى، الإبداعى...
- مهارة التواصل شفهيًا وكتابيًا وإلكترونيًا.
- مهارة التعامل مع الآخرين واحترام آرائهم.
- مهارة تمثيل المعطيات والبيانات على شكل مخططات ورسوم بيانية ومصفوفات وغيرها.
- مهارة استخدام التقنيات الإلكترونية.

ماذا عن كتاب الطالب؟

(١) يتفق محتوى الكتاب مع جميع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات والأهداف الخاصة لمقرر الصف الثانى الثانوى (علمى) ويحقق المعايير ومؤشراتها لهذا الصف، ويظهر مابين محتوى وحداته من ترابط وتكامل.

(٢) استهلال كل وحدة من وحدات الكتاب بافتتاحية تحوى:

- مقدمة الوحدة للتشويق وزيادة الدافعية لدى الطالب؛ وذلك لاستقراء واستكشاف محتوى الوحدة.
- عرضًا لدروس الوحدة ومخرجات التعلم.
- مخطط تنظيمى للوحدة، لتعرف موضوعاتها والمفاهيم المتضمنة بها وعلاقاتها بالمواد الأخرى وتطبيقاتها فى الحياة العملية.
- قائمة بالمصطلحات الأساسية المتضمنة في دروس الوحدة.

(٣) يبدأ كل درس من دروس كلّ وحدة ببند «فكر وناقش»، ويتناول نقاشًا حول الفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ومن البسيط إلى المركب.

(٤) ينتهى كلُّ درس من كلِّ وحدة ببند «تمارين»، ويعرض بعض المسائل التى تنتقل من الاستفهام المباشر إلى التفكير المتعمق. والتى قد تربط الرياضيات بالعلوم الأخرى.

(٥) يتضمَّن محتوى كلِّ وحدة مجموعة من المعالم المتميزة، والمرتبطة ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الوحدة تتضمن أنشطة تربوية (تطبيقات حياتية، مسألة للتفكير، تعليل واستنتاج، عمل تعاونى، تفكير ناقد).

(٦) كما تضمن الكتاب تدريبات متنوعة على كل درس وتنتهى كلُّ وحدة بتمارين عامة واختبار تراكمى يشتمل على العديد

PDF Compressor Pro

من الأسئلة ويتضمن أسئلة موضوعية بأنواعها والاسئلة المقالية وذات الإجابات القصيرة وتتناول الوحدات التى سبق أن درسها الطالب، ويشمل الكتاب اختبارات فى نهاية كل فصل دراسى تم بنائها فى ضوء جداول المواصفات التى تم إعدادها، كما روعى ماطرأ من تحديث وتطوير فى مجال بناء الاختبارات التقويمية.

(٧) يتضمن الكتاب الأشكال والرسوم التى جاءت مرتبطة ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الكتاب، وقد تمَّ توظيفُها بشكل يمكِّن الطالب من إدراك العلاقات بين المتغيِّرات، من خلال عمليات التفسير والتحليل والاستنتاج، كما روعى دقة الأشكال الهندسية والرسوم التوضيحية.

دور الدليل للمعلم

إنَّ تناوُلنا لكلِّ وحدة من الوحدات المقررة على حِدَةٍ فى هذا الدليل من حيث الأهداف والخطة الزمنية والمعالم والوسائط التعليمية وطرق تدريس المحتوى والتقويم – ليس الهدف منه وضع قيدٍ على المعلِّم، بحيث نحدُّ من حريته فى تناول ومعالجة كلّ وحدة أو إلزامه بأسلوب معين، بل هو محاولة من جانبنا نقدِّمها للمعلّم، كى تنير له الطريق وتمهّد السبيل لتحقيق الأهداف المنشودة، فى الوقت الذى نقدّر فيه أنَّ لكل معلِّم شخصيتَهُ المميزة ومهاراته وإبداعاته الخاصة به.

كيف تستخدم هذا الدليل؟

لقد حاولنا أن يكون هذا الدليل وافيًا بجميع العناصر التى قد تحتاجها لتدريس هذا المقرر وسيكون أمامك صورة من صفحات كتاب الطالب فى كل درس، مما يساعدك على ربط توجيهات الدليل مع ما يراه الطالب فى كتابه، ومما لا شك فيه أن هذا يزيد فائدة الدليل بالنسبة لك، إلى جانب الصورة المصغرة من صفحة كتاب الطالب تتضمن صفحة المعلم العناصر التالية بالنسبة لكل وحدة وكل درس.

(١) **مقدمة الوحدة:** وتوضح عدد من المعلومات المرتبطة بالوحدة ودروسها ومن هذه المعلومات مخرجات التعلم وزمن ومكان التدريس والمصطلحات الأساسية ومهارات التفكير، كما توضح المقدمة وسائل ومصادر التعلم وطرق التدريس المقترح استخدامها وأخيرًا طرق التقويم.

(٢) **دروس الوحدة :** فى هذا الجزء يتم تناول تفاصيل كل درس من دروس الوحدة وتشمل هذه التفاصيل .

- **خلفية** : حيث يتم خلالها الربط بين المعلومات السابقة لدى الطالب والمعلومات الجديدة فى الدروس.
- **مخرجات الدرس** : حيث يتم خلالها استعراض مخرجات التعلم المرجو تحقيقها فى الدرس وهى مصاغة بصورة اجرائية قابلة للملاحظة والقياس.
- **المفردات الاساسية** : حيث يتم توضيح عدد من المصطلحات التى سيتم تناولها فى الدرس.
- **المواد التعليمية المستخدمة** : يتم الاشارة إلى الوسائل المعنية التى يمكن للمعلم استخدامها فى شرح وتحقيق اهدافه اثناء عملية التعليم والتعلم.
- **طرق التدريس المقترحة** : يوضح هذا الجزء مسميات عدد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم توظيفها اثناء الحصة وتتنوع هذه الطرق من درس لآخر فهناك **العديد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم استخدامها أثناء عرض المحتوى ومن هذه الطرق:**
- المحاضرة أو الطريقة التلقينية – التعلم التعاونى – العصف الذهنى – الحوار والمناقشة – حل المشكلات – الاكتشاف .

مالواجب معرفته عن طرق التدريس :

- المفهوم – خطوات التنفيذ – متطلبات التنفيذ– المميزات – العيوب أو صعوبات التنفيذ.

كيف يتم اختيار طريقة التدريس المناسبة :

- يتم اختيار طريقة التدريس فى ضوء مخرجات التعلم المستهدفة والمحتوى وخصائص الطلاب وفقًا للمرحلة العمرية والتعليمية والوقت المتاح.

PDF Compressor Pro

أى طرق التدريس افضل:

- لاتوجد طريقة تدريس بعينها هى الأفضل ولكن افضل الطرق هى التى تناسب الطالب والموقف التعليمى وتساعد فى تحقيق الأهداف المرجوة.

نماذج طرق التدريس:

التعلم التعاونى :

- اسلوب تعلم يتم فيه تقسيم الطلاب إلى مجموعات صغيرة متجانسة أو غير متجانسة وفقًا للهدف أو المهمة التى سيكلف بها افراد المجموعة ويقوم افراد المجموعة بالتعاون فيما بينهم لإنجاز المهمة المكلفين بها، وتهدف هذه الطريقة إلى تنمية روح التعاون بدلاً من التنافس وتشجيع روح الفريق.

العصف الذهنى:

- يتم خلال الموقف التعليمى تحديد موضوع أو قضية أو سؤال ويطلب من الطلاب استدعاء اكبر قدر من المعلومات والأفكار او الاجابات او الحلول المرتبطة بتلك القضية أو هذا الموضوع وذلك وفق قواعد متفق عليها وتتمثل فى تسجيل كافة الافكار وعدم النقد او التقييم لأى فكرة لتشجيع الجميع على المشاركة الايجابية وبالتالى توليد اكبر قدر من الافكار العادية أو المبتكرة وبعد الانتهاء من عملية استدعاء الأفكار يتم مناقشتها للوصول إلى افضل حل أو إجابة أو فكرة وذلك باستبعاد الأفكار غير المرتبطة أو المكررة دون الاشارة التى صاحب تلك الفكرة، ويمكن تلخيص خطوات العصف الذهنى فى اربعة خطوات اساسية هى :
  - الاعداد والتهيئة : للموضوع الذى سيتم استدعاء الأفكار بشأنه.
  - طرح الموضوع : التأكيد على وضوح الموضوع بالنسبة للجميع
  - توليد الأفكار: بمشاركة كافة الطلاب.
  - تقويم الأفكار: حذف المكرر أو غير المرتبط والاتفاق على افضل الأفكار أو الاجابات.

حل المشكلات:

- هي أحد الطرق العلمية التى تهدف الى الوصول إلى نتائج او اقتراح حلول لمشكلة محددة تمثل عائق أو تحدى للطلاب ، تهدف هذه الطريقة الى تدريب الطلاب على اتباع الخطوات العلمية أو التفكير العلمى لمواجهة مشكلة معينة، تعتمد تلك الاستراتيجية علي تنفيذ عدد من الخطوات منها تحديد المشكلة تحديد دقيق وكامل والبدء فى جمع معلومات عن تلك المشكلة والحقائق المرتبطة بها، فرض فروض تمثل الحلول الممكنة لتلك المشكلة ويتم اختبار تلك الفروض لأختيار ايها ساهم فى حل المشكلة وفى الختام استخلاص النتائج وتقديم الحلول الممكنة وبالتالى يمكن تعميم تلك النتائج فى مواقف اخرى مشابهة للمشكلة التى تم دراستها.

الحوار والمناقشة:

- تمثل تلك الطريقة أحد الطرق اللفظية ويمكن تعريف طريقة المناقشة بأنها حوار منظم يعتمد علي تبادل الآراء والأفكار بين المعلم والطلاب أو بين الطلاب بعضهم البعض وتهدف هذه الطريقة الى تنمية مهارات التفكير لدى الطلاب والتدريب علي عرض الأفكار مدعومة بالدليل على صحتها فضلاً عن الالتزام باداب الحوار والمناقشة كأحد المهارات الاجتماعية الواجب تنميتها لدى الطلاب.
- تتمثل خطوات المناقشة فى تحديد المعلم للهدف من المناقشة وتقسيم هذا الهدف إلى عدة افكار فرعية او عدد من الاسئلة المطلوب الاجابة عنها، ويتم وضع قواعد لإدارة وتنظيم المناقشات ومن أمثلة تلك القواعد اتاحة الفرصة للطالب لعرض الفكرة كاملة ومناقشة ونقد الفكرة دون الاساءة أو التقليل من شأن صاحب الفكرة وهكذا ويحرص المعلم علي التزام الطلاب بتلك القواعد ليساعدهم علي التوصل إلى الأفكار وربط المفاهيم واستخلاص الاستنتاجات والتوصيات المرتبطة بالهدف الذى تم تحديده ومن خلال تحديد نتيجة لكل فكرة فرعية يتم التوصل الى نتيجة للقضية أو المشكلة الأساسية .

PDF Compressor Pro

التعلم بالأكتشاف :

- هى عملية تفكير تعتمد على أن يقوم الطالب باسترجاع وتنظيم المعلومات السابقة لديه وإعادة صياغتها بشكل يمكن من استخدامها فى مواقف جديدة ويعرف التعلم بالأكتشاف بأنه التعلم الذى يحدث كنتيجة لمعالجة الطالب لمعلومات وتركيبها وتحويلها للوصول إلى معلومات جديدة من خلال اكتشاف أفكار أو حلول يصل إليها الطالب بنفسه مما يشجعهم على مواصلة عملية التعلم .

التعلم بالاكتشاف له أنواع تعتمد على درجة التوجيه الذى يقدمه المعلم ومن تلك الأنواع:

- الأكتشاف الموجه: والذى يوفر فيه المعلم بعض التعليمات التى تضمن مساعدة الطلاب على النجاح فى المهمة .
- الاكتشاف شبه الموجه: وفيه يقدم المعلم بعض التوجيهات العامة دون أن يتقيد بها الطالب.
- الأكتشاف الحر: فيه يواجه الطالب المشكلة بنفسه دون أى توجيهات من المعلم ويطلب منه الوصول إلى الحل وصياغة الفروض وتصميم التجارب وتنفيذها.

عرض الدرس:

أ) التهيئة: وذلك من خلال مناقشة العمل التعاونى أو بند "فكر وناقش" الوارد فى بداية الدرس ومن المعروف أن توافر الدافعية فى التعلم لدى الطلاب أمر لازم بل وحتمى لضمان حسن سير الدرس وإيجابية الطلاب، وبالتالى تتحقق الأهداف المنشودة. ويجب ألا يطغى زمن تهيئة الطلاب على الزمن المخصص لباقى أنشطة الدرس، وعادة لا يزيد زمن تهيئة الدرس عن عشر دقائق.

ب) تعلم: بعد التهيئة – وفى ترابط وسلاسة – يدخل المعلم إلى خطوات عرض الدرس، فيبدأ فى تنفيذ الأنشطة الواردة فى هذا الجزء من الدليل وهى ترتبط ارتباطًا وثيقًا بصفحة كتاب الطالب، وأن الربط بين ما يحدث فى مرحلة تهيئة الطلاب وبين بداية الدرس أمر مهم جدًّا، حتى لا تفقد التهيئة أهميتها ودورها فى نجاح الدرس وتحقيق اهدافه.

ويتخلل هذا الجزء استعراض لكافة الامثلة والتدريبات وكذلك الأنشطة الموضحة ، ويتاح لك فى هذا الجزء مزيد من الطرق لاستنتاج القوانين او العلاقات وعدد من التمارين الاضافية الإثرائية التى يمكن استخدامها فى حالة توافر زمن متاح أو للطلاب المتفوقين علمًا بأن هذه التمارين مجاب عنها.

جـ) التقييم والتدريب: ويشمل هذا البند جوانب هامة هى "التقييم المستمر" ويشمل إجابات لما ورد فى بند "حاول أن تحل" أو يشمل أسئلة شفهية أو تحريرية خلال عرض الدرس، الجانب الآخر هو" التقييم و التدريب"، ويشمل هذا البند إجابات ما ورد فى بند "تمارين" و الجانب الثالث هو "التقييم"، ويشمل أسئلة شفهية أو تحريرية تساعدك على التأكد من تحقيق أهداف الدرس، ومدى استفادة طلابك وما تعلموه، وذلك جنبًا إلى التمارين العامة والاختبارات الواردة فى نهاية كل وحدة.

د) تمارين إثرائية: يقدم الدليل فى نهاية كل درس أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين، ولكن حذار أن تعلن أن هذا النشاط خاص بالطلاب المتفوقين ولا تقسم الطلاب فى الفصل إلى مجموعات وفقًا لمستوياتهم، فهذا النشاط خاص بالمعلم ليواجه الفروق الفردية بين طلابه، يمكنك أن تستقطع وقتًا فى ذات الدرس للقيام بهذه الأنشطة الإثرائية، وأحيانا يكلف بها الطلاب كنشاط خارجى يقومون به بعد الدرس، وقد يعرضون عليك ما أنجزوه فى هذه الأنشطة خارج وقت الحصة، أو قد تراجع معهم إنجازاتهم فى بداية الحصة التالية، وقبل التهيئة الجديدة (يتوقف ذلك على نوع تلك الأنشطة، وما تحتاجه من زمن لمتابعتها)، ونشير هنا إلى أنه عند تكليف أى طالب بنشاط ما يجب أن تتابع إنجازه فيه، حيث أن عدم توفر ذلك يؤدى إلى تكاسلهم بل وإهمالهم القيام بأى نشاط إثرائى.

هـ) الأخطاء الشائعة: يتم استعراض عدد من الصعوبات التى تواجه الطلاب نتيجة بعض الأخطاء المتوقع منهم الوقوع بها وتختلف هذه الأخطاء باختلاف الموضوع والوسائل المستخدمة وكذلك المستوى الاكاديمي للطلاب.

و) ملخص الوحدة والاختبار التراكمى: تنتهي الوحدة بعرض ملخص لدروس الوحدة وتمارين عامة وكذا اختبار تراكمى للوحدة علمًا بأن الدليل يوفر لك إجابات لكل منهما.

PDF Compressor Pro

المقدمة

والأن عزيزى المعلم كى تقوم بدورك على أكمل وجه سوف نتناول عرض موجز عن النقاط التالية:

- ❑ طبيعة مادة الرياضيات وعلاقتها بالمواد الأخرى.
- ❑ تصنيف أهداف تدريس الرياضيات.
- ❑ معايير ومؤشرات الصف الثانى الثانوى.
- ❑ خصائص النمو لطلاب المرحلة الثانوية.
- ❑ بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى.
- ❑ تنظيم محتوى مادة الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى.
- ❑ إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح.
- ❑ الاتجاهات الحديثة في تعليم الرياضيات.
- ❑ إدارة وتنظيم بنية التعلم النشط.

طبيعة الرياضيات

من أحد ركائز بناء المنهج مراعاة طبيعة المادة كأحد المؤثرات على مكوناته من حيث الأهداف والمحتوى وطرق التدريس والأنشطة التعليمية واساليب التقويم، لذا من الضرورى توضيح الفرق بين طبيعة الرياضيات كعلم وكمادة دراسية. لاستيعاب طبيعة الرياضيات لابد من إدراك مراحل تطور الرياضيات عبر العصور المختلفة وفهم التغيرات التى تحدث فى طبيعة الرياضيات من عصر إلى آخر، ويمكن التعرف على طبيعة الرياضيات فى ثلاثة فترات زمنية تمثل تاريخ تطور الرياضيات وهى:

الفترة الأولى منذ نشأة الرياضيات وحتى قبل ظهور الحضارة الاغريقية، واتسمت طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة بكونها ذات طبيعة عملية لم تكن تعتمد على البرهان المنطقى وكانت تعتمد على الحالات الخاصة فقط .

الفترة الثانية: منذ نشأة الحضارة الاغريقية حتى القرن التاسع عشر، تميزت هذه الفترة ببداية النظام البديهى القائم على المنطق حيث يتكون هذا النظام من مجموعة بسيطة من المعرفات واللا معرفات والبديهيات والمسلمات ومنها تشتق النظريات ، وغلب على طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة الطابع التجريدى واستخدام الرموز.

الفترة الثالثة : من القرم التاسع عشر حتى الآن حيث تم رفض فكرة الصدق المطلق التى غلبت على الفترة السابقة بل اصبح هذا الصدق نسبى ، وبدأ فى هذه الفترة استخدام لغة موحدة لجميع فروع الرياضيات واصبحت اكثر تجريدا وتعددت الانظمة الرياضية واصبح اسلوب الاستنباط الرياضى اسلوب عام فى جميع مجالات الرياضيات.

إن الرياضيات كعلم أو كمادة دراسية ذات طبيعة استدلالية أى الوصول إلى نتائج صادقة من خلال مقدمات مسلم بصدقها وفقًا لخطوات تحكمها قوانين المنطق، ومن خلال هذا الاستدلال يمكن اشتقاق النتائج والنظريات.

وتختلف الرياضيات كعلم عن الرياضيات كمادة دراسية باختلاف طريقة المعالجة واسلوب العرض ويمكن توضيح ذلك كمايلى:

- ❑ الرياضيات كمادة دراسية تحتوى على المفاهيم الاساسية لعلم الرياضيات ولكن بعد تبسيطها.
- ❑ الرياضيات كعلم هى بناء استدلالى يهدف إلى الوصول إلى النظريات بينما الرياضيات كمادة دراسية لاتهدف إلى اشتقاق الطالب لمعلومات رياضية جديدة مثلما يفعل العلماء.
- ❑ الرياضيات كعلم تتضمن المسلمات فى صيغة تجريدية بينما هذه المسلمات تقدم للطالب فى المادة الدراسية بصورة واضحة ومفهومه ومبسطة..

الرياضيات والعلوم الأخرى

الرياضيات علم حى دائم التطور، تزداد أهميته إلى درجة القول بأن الرياضيات أصبحت مركز التطور الحضارى والتكنولوجي المعاصر والمستقبلى، وذلك لأن تطبيقاتها وأنماطها أصبحت تغطى كل أنواع الأنشطة .. فى الفنون والأداب فى سوق العمل ومجالات الترويح ... فى الإستراتيجيات العسكرية وقرارات السياسيين وفى الإنتاج والخدمات. الرياضيات كانت ومازالت نشاطًا يعبر عن ثقافة إنسانية تتوسع من داخلها لتحل مشكلات من خارجها، وتكتشف من خلال نمذجه وتجريد مواقف من خارجها علاقات تثريها من داخلها، لم يعد نشاط الرياضيات قاصرًا على العدد والشكل الذين كانا مصدرى إلهامها، بل يمتد إلى نشاطها لدراسة العلاقات والأنماط وإلى اشتقاق نتائج مع مقدمات، ولم تعد الرياضيات مجرد أرقام ورموز يفهمها قلة من الناس، بل لغة يتواصل بها ويتعامل معها غالبية البشر، ويعمل منطقها على تيسير عمل الحاسبات وبث واستقبال المعلومات والتواصل بها من خلال الألياف الضوئية، تعددت مجالات وفروع الرياضيات فى بنى مجردة مثل الزمرة (Group) والحقل (Field) وفضاء المتجه (Vector space) لها تمثيلاتها فى الفروع المختلفة.

PDF Compressor Pro

ورغم كل التجريدات الرياضية فإن الرياضيات تنصت للطبيعة لترسم بها نماذج ينبثق منها وعنها حلول للمشكلات والرياضيات تتعامل مع المؤكدات ومع الاحتمالات واللايقينيات، مع مظاهر استاتيكية وأخرى ديناميكية .. وفوضوية تتعامل مع أشكال مثالية منتظمة وأخرى معقدة، مع أبعاد صحيحة وأخرى كسورية، وتسهم الرياضيات فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها علاقات بلغة الرياضيات ورموزها، يتم حلها ثم إعادة ترجمتها إلى أصولها المادية ، الرياضيات – مثلاً – تشرح وتفسر لنا ظواهر النمو فى الكائنات الحية وظاهرات التآكل من مواد إشعاعية (والتى تمثلها قوى أسية فى الجبر)، كما أن الرياضيات تقدم لنا نماذج عديدة للتصميمات المعمارية والصناعية، وتنظم لنا عمليات الأنشطة الخدمية والإنتاجية، وتتنبأ لنا بجدوى القيام بمشروعات جديدة، الرياضيات تصف لنا كيف تنساب الموسيقى ونغماتها الجميلة، الرياضيات تمدنا بأشكال هندسية يمكن أن تمثل وحدات التكوين لأشكال زخرفية ومصورات فنية جميلة

تنظيم محتوى الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى):

يجرى تدريس الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى) فى شكل وحدات دراسية موزعة مصفوفيًّا بين صفوف المرحلة الثانوية، وبين المجالات المعروفة: الأعداد والعمليات عليها، الجبر والعلاقات والدوال، الهندسة، وحساب المثلثات. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيًّا (عبر الصفوف) وحلزونيًّا فى كل فرع، ويتوزع أفقيًّا (فى كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس– إلى حد ما– وحدة الفكر الرياضى. ويراعى فى جميع الحالات التناغم الرياضى لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

تصنيف أهداف تدريس الرياضيات:

يواجه المعلم دائمًا بالسؤال الآتى «لماذا نعلِّم الرِّياضيات؟» أو ما الهدف منها، ان تدريس الرياضيات يهدف إلى تزويد الطالب بالمعارف الرياضية واكتساب المهارات المرتبطة بتلك المعارف وبالتالى توظيف واستخدام تلك المعارف والمهارات من خلال تكوين اتجاهات إيجابية نحو دراستها ، وبالتالى يمكن تلخيص اهداف تدريس الرياضيات إلى أهداف تتعلق :

- بمعرفة وفهم اساسيات مادة الرياضيات.
- بالتدريب على اساليب تفكير سليمة وتنميتها.
- باكتساب المهارات الرياضية (العقلية والنفس حركية)
- باكتساب اتجاهات موجبة وتنمية ميول واوجه التقدير نحو الرياضيات وعلماؤها.

هناك أكثر من طريقة للتعريف بتصنيف أهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

(١) **أهداف معرفية** Cognitive تتمثل الأهداف المعرفية فى معرفة اساسيات المادة وفهم بنيتها وتركيبها والأسس النظرية لبعض النواحى التطبيقية حيث يساعد ذلك علي اكساب الطالب القدرة على تطبيق القواعد والنظريات فى المادة الدراسية أو فى مواقف حياتية كما تسهم معرفة تلك الاساسيات فى فهم اساسيات مواد دراسية اخرى.

(٢) **أهداف وجدانيّة** Affective تتعلّق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشرى، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها فى التقدُّم ونحو أساليبها فى التفكير ودقة لغتها فى الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البيانى.

(٣) **أهداف نفسحركية** Psychomotor يقصد بها تنمية المهارات العملية والعقلية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضى هندسى أو حسابى أو حوسبى، المهارات العملية فى الرياضيات يغلب عليها الناحية الادائية وتسهم الناحية المعرفية بقدر أقل من الناحية اليدوية، بينما المهارات العقلية المتمثلة فى استخدام المفاهيم والمعارف فى حل المشكلات فيغلب عليها الناحية المعرفية التى تترجم بالمهارة اليدوية الى خطوات وخورازميات للحل.

إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح

إستراتيجية التدريس: هى خطة تحركات المعلم فى تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسى للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الاستراتيجية بمدى كفاءتها فى أن يتعلَّم الطلاب ما يراد لهم أن يتعلموه، بغرض مساعدة

PDF Compressor Pro

الطلاب فى أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التى يتعلمونها فى ضوء النظرية البنائية Constructivism وتتضمن إستراتيجية التدريس الناجحة أن يقوم المعلم بالآتى:

- التقدُّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).
- إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.
- توزيع العمل بين أعمال تعاونية فى مجموعات صغيرة تعمل تعاونيًّا، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.
- فى نهاية كل مناقشة أو عمل تعاونى أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمنًا الأساسيات: تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.
- إعطاء الطلاب فرصًا داخل الفصل أو المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.
- تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.
- عند تدريس مفهوم أو علاقة ضمن عدة مفاهيم يعطى المعلم مثال ولا مثال على المفهوم أو العلاقة الجديدة .
- البعد عن التلقين أو سرد الحقائق وعرض الاجابات الجاهزة دون مشاركة فعالة من الطلاب.
- تنويع السلوكيات (أى طرق التدريس) فى الحصة الواحدة.
- الحرص على إعطاء رعاية خاصة فى فترة العمل الفردى أو فى المجموعات التعاونية للطلاب بطيئى التعلم أو من هم دون المستوى فى قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.
- تنويع الواجبات سواء داخل الفصل أو فى المنزل مع مراعاة الفروق الفردية- ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين فى الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيُقدَّم لهم الحد الأدنى، ويُلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل متدرِّجين فى الواجبات.
- تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الفصل فى مكتب المعلم أو فى المكتبة.
- مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق فى هذا المقرر.

وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمى هو مادَّة تعليمية مكتوبة أو مرسومة، أو صورة ثابتة أو متحرِّكة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراص مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة فى عرض واستخدام الموادِّ التعليميَّة والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليميُّ ملصقًا أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعًا خشبيَّة أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوبًا، وقد تكون موادَّ من الطبيعة أو مصنعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معمليَّة.

والأصل فى الوسيط التعليمى هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملًا تعليميًّا نشيطًا، لا أن يكتفى بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آليًّا، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بيانى لأحد الجداول مستخدمًا برنامج اللوحة الجدولية excelsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO) أو البرامج الرياضية المتخصص مثل geogebra.

والمبدأ الذى نرتئيه هنا هو أن التكنولوجيا بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعددة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم»- بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم فى تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

معايير ومؤشرات الصف الثانى الثانوى (علمى)

المجال الأول: الجبر والعلاقات والدوال

المعيار الأول: **تعرف صورًا مختلفة من الدوال ذات المتغير الحقيقى، وسلوكها وتمثيلها بيانيًا.**

PDF Compressor Pro

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مفهوم الدالة ذات المتغير الحقيقى.

٢) يحدد مجال الدوال ذات المتغير الحقيقى، والمجال المقابل والمدى لها.

٣) يتعرف بعض خواص الدوال ذات المتغير الحقيقى:

✍ الدالة الأحادية (one – to – one) وفيها يميز بين الدالتين: د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٤س + ٥}$، ر(س) = س٢ + ٨س – ٤

حيث إنه: إذا كان د(أ) = د(ب)، فإن أ = ب بينما إذا كان ر(أ) = ر(ب) فليس من الضروري أن يكون أ = ب،

وعلى هذا فإن د(س) دالة أحادية، بينما ر(س) دالة ليست أحادية.

✍ الدالة الزوجية.

✍ الدالة الفردية.

٤) يستنتج أطراد الدوال ذات المتغير الحقيقى (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال)

٥) يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال ذات المتغير الحقيقى (تركيب الدوال)

٦) يتعرف الدوال كثيرات الحدود.

٧) يرسم منحنيات الدوال الآتية ويستنتج خواص كل منها:

✍ الدالة التربيعية: د (س) = س٢

✍ دالة المقياس: د(س) = |س|، مع الإشارة إلى أن $\sqrt{س^٢}$ = |س|

✍ الدالة التكعيبية: د (س) = س٣

✍ الدالة الكسرية: د(س) = $\frac{١}{س}$

٨) يستنتج تأثير كل من التحويلات: د(س ± أ) ، د(س) ± أ على الدوال السابقة.

٩) يستنتج تأثير كل من التحويلات: د(أس) ، أ د(س) على الدوال السابقة.

١٠) يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال ذات المتغير الحقيقى.

١١) يحل معادلات على الصورة: |أ س + ب| = جـ ، |أ س + ب| = |ى س + جـ|، |أ س + ب| = جـ س + ى

١٢) يحل متباينات على الصورة:

✍ |أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| ⩾ جـ

✍ |أ س + ب| > جـ ، |أ س + ب| ⩽ جـ

١٣) يستخدم الدوال ذات المتغير الحقيقى فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

١٤) يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية في صورة أنشطة.

١٥) يبحث عن التمثيل البيانى للدوال ذات المتغير الحقيقى السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج «الجيوجيبرا» GeoGebra

المعيار الثانى: تعرف الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليهما.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف الدالة الأسية: ص = أ^{س} أو د(س) = أ^{س}، أو د :س ← أ^{س} حيث أ ∈ ح+ ، أ ≠ ١

٢) يتعرف التمثيل البيانى للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.

٣) يتعرف قوانين الأسس الكسرية.

٤) يحل معادلات أسية على الصورة: أ^{س} = ب

٥) يحل تطبيقات تؤول إلى معدلات على الصورة أ^{س} = ب

PDF Compressor Pro

٦) يتعرف الدالة اللوغاريتمية: ص = لو س أو د(س) =لو س حيث أ ∈ ح⁺ - {١}، س ∈ ح⁺

٧) يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.

٨) يتعرف الدالة العكسية وشرط وجود الدالة العكسية (اختبار الخط الأفقى).

٩) يتعرف التمثيل البيانى للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك، التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمة فى فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.

١٠) يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًا.

١١) يتعرف قوانين اللوغاريتمات الآتية:

✍ لو أ (س ص) = لو أ س + لو أ ص، س > صفر، ص > صفر.

✍ لو أ (س/ص) = لو أ س + لو أ ص، س > صفر، ص > صفر.

✍ إذا كان س ∈ ح فإن لو أ (س)^ب = ب لو أ س ، ب فردية.

أو لو أ (س)^ب = ب لو أ |س| ، ب زوجية.

لو أ (١/س) = -لو أ س

✍ لو أ س = لو ب س / لو ب أ

✍ لو أ ب = ١ / لو ب أ

✍ لو أ س = ١ ب

✍ لو أ^س ١ = صفر

١٢) يحل معادلات لوغاريتمية.

١٣) يحل مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.

١٤) يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠ .

١٥) يوجد قيمة اللوغاريتمات بإستخدام الآلة الحاسبة.

١٦) يوظف الدالة الآسية واللوغاريتمية فى حل تطبيقات حياتية.

المعيار الثالث: تعرف المتتابعات والمتسلسلات، وتطبيقات عليهما.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مقدمة فى المتتابعات – مفهوم المتتابعة.

٢) يميز بين المتتابعة والمتسلسلة.

٣) يتعرف المتتابعة الحسابية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.

٤) يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية، ويدخل عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين.

٥) يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.

٦) يتعرف المتتابعة الهندسية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.

٧) يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية، ويدخل عدد محدود من الأوساط الهندسية بين عددين.

٨) يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.

PDF Compressor Pro

٩) يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.

١٠) يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.

١١) يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل: المشكلة السكانية.

١٢) يستخدم الحسابات فى إجراء عمليات متطلبة فى حل مشكلات رياضية وحياتية على المتتابعات والمتسلسلات.

المعيار الرابع: تعرف مبدأ العد، والتباديل والتوافيق، ونظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب وتطبيقات عليها.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مبدأ العد، وتطبيقات بسيطة عليه.

٢) يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق، والعلاقة بينهما (تعريف كل منهما بدون خواص إضافية أو براهين)

٣) يوجد مفكوك نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب، ويستنتج الحد العام فى مفكوك نظرية ذات الحدين.

٤) يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك نظرية ذات الحدين، ويستنتج أنماط فى مثلث باسكال فى صورة أنشطة.

٥) يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المجال الثانى: الحسبان (التفاضل والتكامل)

المعيار الأول: تعرف المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال، وتطبيقات عليهما.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مقدمة فى نهايات الدوال.

٢) يتعرف الكميات غير المعينة : $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$)

٣) يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:

- بالتعويض المباشر.
- بالتحليل.
- بالقسمة المطولة.
- بالضرب فى المرافق.

٤) يوجد نهاية دالة باستخدام القانون: $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن \, أ^{ن-١}$

٥) يستنتج نهاية دالة بإستخدام القانون: $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = \frac{ن}{م} \, أ^{ن-م}$

٦) يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.

٧) يوجد نهاية الدوال المثلثية.

٨) يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة، وتقدير قيمة النهاية لها فى صورة أنشطة.

٩) يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى لدالة عند $أ + هـ$ ، $أ$ حيث $هـ$ كمية صغيرة أكبر من الصفر.

١٠) يتعرف مفهوم اتصال الدوال:

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.
- بعض أنواع الدوال المتصلة.
- إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح دوال متصلة.

١١) يتعرف تطبيقات (تمارين – أنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال، واتصالها.

PDF Compressor Pro

المقدمة

المعيار الثانى: تعرف التفاضل والتكامل، وتطبيقاتها فى مواقف فيزيائية وحياتية مختلفة.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط معدل التغير ومعدل التغير.

٢) يستنتج المشتقة الأولى للدالة.

٣) يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).

٤) يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (النهاية اليمنى – النهاية اليسرى).

٥) يحدد بعض قواعد الاشتقاق والاتصال.

٦) يحدد بعض قواعد الاشتقاق.

- مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}
- مشتقة الدالة د(س) = أس^{ن}
- مشتقة دوال كثيرات الحدود.
- مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- مشتقة خارج قسمة دالتين.
- مشتقة دالة الدالة – قاعدة السلسلة.
- مشتقة الدالة: ص = (د (س))^{ن}
- مشتقة الدوال المثلثية.

٧) يستخدم المشتقات فى تطبيقات هندسية مثل: إيجاد معادلة المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه، وتطبيقات فيزيائية مثل: تفاضل الدوال المتجهة (متجه الإزاحة – متجه السرعة – متجه العجلة) بالنسبة للزمن.

٨) يتعرف مفهوم التكامل – المشتقة العكسية.

٩) يتعرف، ويستنتج قواعد التكامل الآتية:

- $\int س^{ن}\ ؤ\ س = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$
- $\int أ\ د(س)\ ؤ\ س = أ \int د(س)\ ؤ\ س$ حيث أ ثابت.
- $\int [د(س) + ر(س)]\ ؤ\ س = \int د(س)\ ؤ\ س + \int ر(س)\ ؤ\ س$
- $\int (أ\ س + ب)^{ن}\ ؤ\ س = \frac{١}{أ(ن+١)} (أ\ س + ب)^{ن+١} + ث$، $ن \neq -١$
- $\int جا أ\ س\ ؤ\ س = -\frac{١}{أ} جتا\ أ\ س + ث$، حيث أ ثابت.
- $\int حتا أ\ س\ ؤ\ س = \frac{١}{أ} جا\ أ\ س + ث$، حيث أ ثابت.
- $\int قا^{٢} أ\ س\ ؤ\ س = \frac{١}{أ} ظا\ أ\ س + ث$، حيث أ ثابت.
- $\int د'(س)\ [د(س)]^{ن}\ ؤ\ س = \frac{١}{ن+١} [د(س)]^{ن+١} + ث$، حيث ث ثابت

١٠) يوجد ثابت التكامل، ويتعرف تطبيقات هندسية على التكامل.

المجال الثالث: حساب المثلثات

المعيار الأول: تعرف قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث، وتطبيقات عليهما.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف، يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.

PDF Compressor Pro

٢) يستخدم قانون(قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.

٣) يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زاويا هذا المثلث (يوجد حلين لزاوية مجهولة).

٤) يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.

٥) يتعرف، يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.

٦) يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.

٧) يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى أيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.

٨) يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب، وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:

- إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.

٩) يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.

المعيار الثانى: تعرف تطبيقات على حساب المثلثات.

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها أن:

١) يتعرف مفهوم زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.

٢) يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

٣) يتعرف، ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.

٤) يتعرف، ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية.

٥) يستنتج صيغة Heron's لايجاد مساحة المثلث.

الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات

هناك عدة اتجاهات حديثة لتعليم وتعلم الرياضات نورد منها ما يلى:

تعليم الرياضيات من أجل حل مشكلات البيئة والمجتمع: ويدعو هذا الاتجاه لأن يكون للرياضيات دورًا فى معالجة قضايا ومشكلات المجتمع، وأن ترتبط المعرفة الرياضية بالخبرات الحياتية والبيئية للطلاب.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية انماط التفكير وأسلوب حل المشكلات: يعد هذا الاتجاه من الاتجاهات المفضلة فى تعليم الرياضيات، وقد نبع هذا الاتجاه نتيجة للتغير السريع فى المعارف والأساليب التكنولوجية واستخداماتها، ولذا أصبحت المعرفة فى حد ذاتها ليست هى الهدف الاسمى بل طرق الحصول عليها، وهو ما يتمثل فى أنماط التفكير المختلفة وأسلوب حل المشكلات والتى يمكن تنميتها من خلال تعليم وتعلم الرياضيات.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية الإبداع: للرياضيات دور هام فى تنمية الإبداع لدى المتعلمين لما لها من طبيعة تساعد على ذلك، لأن الرياضيات بمضمونها تعتمد على إدراك العلاقات للوصول إلى النتائج والنظريات وغيرها من الإبداعات، وجوهر الإبداع هو إدراك علاقات جديدة تؤدى إلى تنوع من الحلول للمشكلة الرياضية المطروحة. لهذا اعتبر التربويون أن تنمية الإبداع هدف أساسى من أهداف تعليم الرياضيات.

تعليم الرياضيات للفئات الخاصة: أدى الاهتمام بحاجات المتعلم، وضرورة تعليمه بقدر ما تسمح به استعداداته وقدراته إلى ظهور اتجاه نحو تعليم الرياضيات للفئات الخاصة (بطيئ التعلم – المتفوقون – المعاقين) حيث لكل من هذه الفئات استعداداته وقدراته وإمكاناته، وأصبح من الضرورى تصميم مناهج للرياضيات لكل فئة من هذه الفئات حتى يمكن أن تتعلم كل فئة بقدر ما لديها من خصائص.

تعليم الرياضيات فى ضوء مفهوم العولمة: نتيجة للتقدم الهائل فى تكنولوجيا الاتصال، لم يعد للبعد الجغرافى تأثيرًا فى عزل

PDF Compressor Pro

المقدمة

الدول عن بعضها البعض، وأصبح العالم كقرية صغيرة متشابكة الأطراف، وأصبح للمشكلات بمختلف مجالاتها صفة العالمية، حيث لم تعد دولة واحدة بإمكاناتها قادرة على مواجهة هذه المشكلات، وبالتالى لم يعد مبدأ الاكتفاء الذاتى صالحًا للتطبيق في ظل هذه الظروف فحل محله مبدأ الاعتماد المتبادل الذى يدعو إلى إنفتاح دول العالم على بعضها البعض، لنعيش فى سلام عالمى وتعاون مشترك من أجل خير الإنسان، وهذا ما يؤدى إلى إتساع بيئة الإنسان من المحلية إلى العالمية. وهذا ما يدعو إلى أن تكون مناهج الرياضيات التى يدرسها المتعلم تساعد فى إعداده لذلك.

تعلم الرياضيات ذاتيًا : ادى الانفجار المعرفى إلى ظهور الحاجة إلى التعلم الذاتى وظهرت عدة أساليب للتعلم الذاتى من أهمها التعلم بالمراسلة والموديولات التعليمية وباستخدام الحاسب الآلى.

إلا أن تعلم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى نال اهتمامًا كبيرًا من قبل التربويين والباحثيين فى مجال تعليم وتعلم الرياضيات وظهرت العديد من البرامج بالعربية والإنجليزية لتعليم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

تعليم الرياضيات باستخدام الإنترنت: الإنترنت هو منظومة عالمية تربط مجموعة من الحاسبات الآلية بشبكة واحدة والإنترنت له عدة مميزات دفعت التربويين إلى المناداه بضرورة استخدامه وهى:

- الوفرة الهائلة فى مصادر المعلومات ومنها: الكتب الالكترونية، الدوريات، قواعد البيانات، الموسوعات، المواقع التعليمية
- الاتصال غير المباشر وذلك من خلال البريد الالكترونى، والبريد الصوتى.
- الاتصال المباشر وذلك من خلال التخاطب الكتابى المباشر، والتخاطب الصوتى والتخاطب بالصوت والصورة.

تعليم الرياضيات المزود بالحاسوب: يتنوع الاستخدام التعليمى للحاسوب من مساعدة الطلاب على تعلم القواعد الأساسية إلى تعلمهم لاستراتيجيات التفكير المعقد، والحاسوب أداة فعالة للطالب المتوسط القدرة، والطالب المعاق وللطالب المتفوق، ويأتى ذلك من قدرته على التكيف التعليمى لمواجهة الاحتياجات المتنوعة للطلاب ذوى القدرات المختلفة، وقد أثبتت البحوث أن التعليم المزود بالحاسوب (CAI) يوفر الجهد والوقت فى التفكير وفى حل المشكلات، كما أن الحاسوب وسيلة فعالة فى تشخيص وعلاج الأخطاء الرياضية لدى الطلاب.

خصائص نمو طلاب المرحلة الثانوية

إن معرفة خصائص النمو لطالب المرحلة الثانوية يساعدنا على معرفة حاجاته، وتعرف مدى نمو الطالب بالنسبة لمتوسط اقرانه، ويعيش طالب المرحلة الثانوية فى مرحلة عمرية تسمى مرحلة المراهقة، ويقصد بالمراهقة أنها مرحلة النمو الذى يصل فيها الطفل إلى مرحلة البلوغ، وعند استخدام مصطلح المراهقة فإن هذا المصطلح يتضمن نموًّا جسميًّا واجتماعيًّا ونفسيًّا، وتبدأ مرحلة المراهقة عند البنين فى ثلاث عشرة سنة فأكثر تقريبًا، وتبدأ عند البنات فى سن اثنتى عشرة سنة فأكثر تقريبًا، يختلف سن بداية المراهقة من مجتمع إلى مجتمع وغالبًا ما تبدأ مبكرة فى المناطق الحارة عنها فى المناطق الباردة، ومرحلة المراهقة المبكرة التى تبدأ مع بداية البلوغ وتنتهى عند سن ست عشرة أو سبع عشرة سنة، وقد تم تحديد هذا السن بطريقة قسريه تختلف من مجتمع لآخر، وهناك اتفاق على أن تنقسم فترة المراهقة إلى مرحلتين هما، المراهقة المبكرة، المراهقة المتأخرة، وتبدأ مرحلة المراهقة المبكرة مع سن البلوغ وتنتهى فى سن ١٦ أو ١٧ سنة أو عند التحاق المراهق بالصف الثانى أو الثالث الثانوى، أما مرحلة المراهقة المتأخره فتبدأ فى نهاية التعليم الثانوى وتمتد إلى مرحلة التعليم الجامعى، وفى المرحلة الأخيرة وهى التى يستعد فيهاالمراهق لدخول مرحلة الرشد فيستعد لذلك مهنيًا ويتعرف بشكل أكثر نضجًا وقد تمتد هذه المرحلة إلى ٢٠ سنة أو أكثر.

وفيمايلى عرض لخصائص طلاب المرحلة الثانوية من حيث:

النمو الجسمى

تعد «مرحلة المراهقة» طفرة فى النمو الجسمى، فهى مرحلة نمو جسمى سريع، وهذه التغيرات السريعة التى تصاحب النمو الجسمى ومنها الجنسى تجعله غير واثق فى نفسه وفى قدراته واهتماماته، وتكون لدية مشاعر قوية تعكس شعورة بعدم الاستقرار ومن أهم المشكلات المصاحبة للنمو الجنسى للمراهق هو ظهور حب الشباب والتهيجات الجلدية للمراهق والمراهقة، وكذلك المعاناه الجسيمة المصاحبة عند المراهقه مثل: الصداع، وآلام الظهر ونوبات تغير المزاج والاكتئاب.

PDF Compressor Pro

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الجسمى:

- الاستفادة من مادة الرياضيات والعلوم وتطبيقاتها العملية التى تعمل على تنمية جوانب النمو الجسمى بأبعادها المختلفة .
- الاهتمام بالأهداف المعرفية فى المواد المختلفة لتعريف الطلاب وتبصيرهم ببعض المشكلات كممارسة التدخين واختيار الاصدقاء.

النمو الحركى

ينتج عن النمو الجسمى السريع ميل الطالب إلى الكسل والخمول ويكون قليل النشاط والحركة ، والمراهقون فى بداية هذه المرحلة يكون توافقة الحركى غير دقيق وتتسم حركاته بعدم الاتزان وكثيرًا ما يصطدم بالأجسام التى تعترضه أو تسقط من بين يدية الأشياء التى يمسك بها، ومما يساعده على عدم استقراره الحركى تعرضه لنقد الكبار وتعليقاتهم وتحميله العديد من المسئوليات الاجتماعية، مما قد يسبب له الارتباك وفقدان الاتزان.

التطبيقات التر بوية لخصائص النمو الحركي:

- تشجيع ورعاية النمو الحركى عن طريق الانشطة المختلفة .
- تضمين بعض موضوعات الرياضيات بالأنشطة الحركية بالتعاون مع معلم التربية الرياضية .

النمو العقلى

القدرات العقلية مثل القدرة اللغوية والقدرة العددية والقدرة المكانية والقدرة الميكانيكية والقدرة الموسيقية تظل فى نموها المضطرد خلال فترة المراهقة ، حيث يميل المراهق إلى القراءة والاطلاع والرحلات الخارجية وقراءة القصص والمجلات فى محاولة للبعد عن المناهج الدراسية، ويحاول المراهق التعبير عن ذاته ونقدها عن طريق مذكراته، وكتابه المذكرات الخاصة علامة من علامات النمو العقلى والنمو الاجتماعى، وقد تكون وسيلة لتفريغ الانفعالات والهروب من القلق والضيق النفسى.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو العقلي :

- تدريب الطلاب على استخدام الاسلوب العلمى فى التفكير .
- مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب واشراكهم فى بعض المهام والتكليفات فى ضوء قدراتهم.

القدرات والعمليات المعرفية

تختلف القدرات عن العمليات المعرفية، فالقدرة هى ما يستطيع الفرد عمله أو القيام به بينما تتعلق العملية المعرفية بما يحدث فى العقل ذاته أو بما يدور فى العقل وهو يستجيب للمتغيرات المختلفة وعليه فإنه يمكن القول بإن القدرة تشمل على العمليات المعرفية وأنواع مثيراتها والأشكال المختلفة لاستجاباتها؛ ولذلك فإن القدرة تؤكد على الناحية العقلية البحته مثل القدرات الاستقرائية، والعمليات المعرفية التى تعتمد على القدرات العقلية هى الإنتباه الذى ينمو فى شدته ومستواه وطول مدته يستطيع المراهق استيعاب مشكلات طويلة معقدة فى سهولة ويسر، والإدراك الذى يتأثر بنمو الفرد الجسمى والعقلى والانفعالى والإجتماعى، فينمو من المستوى الحسى المباشر عند الطفل إلى المستوى المعنوى المجرد عند المراهق، وتنمو عملية التذكر وتنمو معها القدرة على الحفظ والاسترجاع والتعرف، والتذكر عند المراهق يعتمد على الفهم واستنتاج العلاقات بين العناصر التى يتم تذكرها ويتأثر تذكر الفرد للموضوعات المختلفة بدرجة ميله نحوها واستمتاعه بها وبانفعالاته وخبراته المختلفة وأيضا بنمو القدرة على الانتباه.

أما عملية التفكير فإنها تتأثر عند المراهق بالبيئة المحيطة وبما تتضمنه من متغيرات تحفزه إلى الوان مختلفة من الاستدلال وحل المشكلات، تزداد قدرة المراهق على التخيل المجرد المبنى على الصورة اللفظية، كما تظهر القدرة المكانية لدى المراهق فى قدرته على فهم الأشكال الهندسية المختلفة وإدراك العلاقات المكانية فى سهولة تصور حركات الأشكال والمجسمات، أما القدرة العددية فتوضح فى القدرة على إجراء العمليات بسهولة وسرعة، وتظل القدرات مطردة فى نموها خلال فترة المراهقة وفترة الرشد، ما عدا قدرة السرعة الادراكية فإنها تضعف فى أواخر مرحلة المراهقة .

النمو الإنفعالى

PDF Compressor Pro

المقدمة

ترتبط انفعالات الفرد بتغييرات عضوية داخلية يصاحبها مشاعر وجدانية وتغيرات فسيولوجية وكيميائية داخل الجسم، وتؤثر بيئة الفرد فى تلك الانفعالات، فهى بمثابة متغير لها، وللنمو أثر فى تغير وتطور الاستجابات للمثيرات، ولكن المظاهر الداخلية تكون أقرب للثبات والاستقرار منها إلى التغير، وتتسم مرحلة المراهقة أنها عنيفة فى حدة الإنفعالات، حيث نجد المراهق دائم الثورة على الأوضاع متمردًا على الكبار، كثير النقد، ويشعر المراهق بأن الأسرة والمدرسة والمجتمع لا تقدر موقفه، ولا تحس بإحساسه الجديد، لذا فهو يسعى دون قصد لآن يؤكد نفسه بثورته وتمرده وعناده.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الانفعالى:

- تنمية الثقة والاستقلالية لدى الطلاب من خلال مشاركة المعلم للطلاب فى عرض افكارهم ومشاركتهم لمشكلاتهم الشخصية .
- اجتناب المعلم لاساليب العقاب غير التربوية (كالعقاب البدنى٩ أو السخرية أو الاستهزاء ... الخ

النمو الإجتماعى

مع بداية مرحلة المراهقة تزداد مجالات النشاط الاجتماعى، ويتنوع الاتصال الشخصى بالمعلمين والقادة والرفاق وغيرهم، وباتساع دائرة العلاقات والتفاعل الاجتماعى يتخلص المراهق من بعض جوانب الأنانية التى تطبع سلوكه فى مرحلة الطفولة فيحاول أن يأخذ ويعطى ويتعاون مع الآخرين وأثناء تفاعل المراهق وتعامله مع الآخرين تتأكد لديه مظاهر الثقة بالنفس وتأكيد الذات، ومحاولته إشعار الآخرين بأهميته كفرد له كيان مستقل، هذا ما يؤكد ميل المراهق للعناية بمظهره وملابسه وطريقة حديثة فنجده يتحدث كثيرًا عن نفسه وعن قدراته وتفوقه وفى مجالات التحصيل أو فى مجالات الرياضة.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الاجتماعي:

- استثمار ميول الطالب فى تنمية شخصيته.
- تنمية التفاعل الاجتماعي بين الطلاب والمعلمين.

إدارة وتنظيم بيئة التعلم النشط

تتمثل الإدارة الجيدة للمعلم لبيئة التعلم والتى تعتمد على مشاركة الطلاب فى التخطيط والتنفيذ للعملية التعليمية عاملاً مهمًّا على توفير الجهد والاستغلال الأمثل لموقف التعليم، وعنصرًا مهمًّا فى تحقيق الأهداف التعليمية المنشودة.

ومع ظهور الأساليب التربوية الحديثة التى تؤكد على ضرورة أن يكون الطالب هو محور العملية التعليمية وأن يكون له دورًا إيجابيًّا فى العملية التعليمية وبالتالى من المفضل إشتراكه فى إدارة هذه العملية، ومع التأكيد على دور التعلم النشط وهو ما أدى فى جملته إلى إدارة بيئة التعلم بتلك التغيرات التربوية، ومع مراعاة خصائص طلاب المرحلة الثانوية، حيث تختلف إدارة بيئة التعلم التى يتمركز فيها التعليم حول المتعلم، أو مما يسمح له القيام ببعض الأعمال الإدارية داخل الفصل الدراسى، ويتطلب ذلك منح الطلاب بعض الحرية فى إدارة بيئة التعلم ذاتيًّا تحت توجية وإشراف المعلم، الأمر الذى يتطلب وضع مجموعة من القواعد العامة للتعامل داخل بيئة التعلم يتوفر بها الشروط التالية:

- ان تكون متوافقة مع قواعد وسياسات المدرسة وداعمه لها
  (مثل: الأهتمام بنظافة المكان – احترام المعلم – احترام الإدارة المدرسية – احترام الزملاء.....)
- ان تحدد مجموعة من الأسس التى يجب توافرها فى السلوك السوى للطلاب، وأن يدعم كل سلوك بمبررات عقلانية، بشكل يبين ضرورة هذا السلوك وفائدته لسير العمل فى الفصل بشكل إيجابى.
- إن تكون مقبولة من المعلم والطالب، وهذا يستلزم أن يتعاونا فى وضعها.

مكونات إدارة بيئة التعلم

حين تكون إدارة بيئة التعلم عملية مشتركة بين المعلم والطلاب، فإن هذا يعنى ضرورة إعادة صياغة المعلم لأدواره، حيث يقوم بتعظيم دور المتعلم، وأن يصبح المعلم عضوًا فى جماعة أو قائدًا فى فريق أكثر من كونه المصدر الوحيد للسلطة.

PDF Compressor Pro

إن بيئة التعلم قد تكون حجرة الدراسة أو المعمل أو المكتبة أو حجرة الوسائط المتعددة أو غير ذلك، حيث يوجد الطلاب مع معلمهم يخططون وينفذون معًا عددًا من الأنشطة التربوية، ومن ثم فإن مكونات بيئة التعلم تتمثل فيما يلى:

- التخطيط الجيد لتحديد خطوات وطريقة تنفيذ العملية التعليمية
- التنظيم المادى للفصل لمجابهة إحتياجات العملية التعليمية
- تحديد اساليب أو طرق التفاعل بين المعلم والطلاب.
- تهيئة مناخ الفصل لمجابهة احتياجات الطلاب لتحقيق الأهداف المنشودة
- ضبط سلوك الطلاب.
- استغلال البيئة المحيطة أفضل استغلال لإحداث عملية التعليم / التعلم الجيد.
- الاستغلال الأمثل للوقت لتحقيق اكبر وقت ممكن للتعليم.

وتحدد هذه المكونات الجوانب التى يجب أن يركز عليها المعلم عند وضعه تصورًا لإدارة فصله بما يضمن له النجاح فى مهمته.

السمات والمهارات اللازمة لإدارة بيئة التعلم النشط

يتطلب نجاح المعلم فى قيادته التربوية لبيئة التعلم إلى توافر مجموعة من السمات والمهارات الأساسية وهى كلها لازمة لنجاح المعلم بدرجات متفاوته ومنها:

السمات الشخصية: وتشمل المبادآه، الثقة بالنفس، والقدرة على الإبتكار، وتحمل المسئولية، ضبط النفس، الحزم والسرعة فى اختيار البدائل

المهارات الفنية: وهى المعرفة المتخصصة فى فرع من فروع العلم والكفاءة فى استخدام هذا الفرع بما يحقق الهدف المنشود، وتكتسب هذه المهارات بالدراسة والخبرة والتدريب

مهارات اجتماعية وتعنى قدرة المعلم على التعامل مع طلابه وتنسيق جهودهم، وخلق روح العمل الجماعى بينهم، وايضا قدرته على الارتفاع والتأثير ومواجهة المشاكل والتصدى لها بأسلوب ناجح.

تنظيم بيئة التعلم النشط

تحتاج إدارة بيئة التعلم إلى عناية فائقة من المعلم للتنظيم والتخطيط والترتيب، ويعد الفصل وترتيبه أحد العوامل الرئيسية لنجاح عمل المعلم لتحقيق أهداف التعلم النشط، ولذلك يجب على المعلم أن يراعى عدد من النقاط الهامة وهى:

(١) **المرونة:** وتعد حجر الزاوية فى تنظيم الفصل؛ لأنه مهما نظم المعلم فصله فسوف يتم تعديله عند التطبيق ليناسب احتياجات الطلاب واستراتيجيات التدريس المستخدمة.

(٢) **نوع الانشطة:** يجب أن يضع المعلم فى اعتباره أن النشاط الذى سوف يقوم به الطلاب هو الذى يحدد شكل الفصل وترتيب مقاعد الطلاب وحركاتهم مثل: التعلم الفردى – التعلم التعاونى – تعلم الأقران وهكذا.

(٣) **تنظيم الاثاث والمواد والأدوات:** تنظيم الفصل للتعلم النشط يعنى تنظيم المكان حتى يمكن للطلاب العمل بمفردهم أو فى مجموعات كبيرة، و إن أمكن يستخدم أثاثًا سهل الحركة حتى يمكن إعادة ترتيبه.

(٤) **المصادر التعليمية:** يجب ان يحتوى جزء من الحجرة على المصادر التعليمية وتكون مناسبة للطلاب من حيث المستوى العمرى وتحدى قدراتهم.

(٥) **مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب.**

إدارة وقت التعلم بفاعلية

أن التخطيط لإدارة الوقت بمثل عاملاً مهمًا فى التعليم داخل الفصل وهنا التخطيط يمر بالخطوات التالية:

- دراسة استطلاعية للوقوف على كيفية استغلال الوقت ويدخل فيها دراسة السجلات المختلفة الخاصة بالتدريس والأنشطة.
- تحديد الأهداف المستهدفة بدقة.
- تحديد الأولويات والمهام اللازم تنفيذها.

PDF Compressor Pro

✍ وضع خطة للعمل يحدد فيها الوقت اللازم لكل مهمة من المهام فى ضوء الأهداف والأولويات .
✍ تنفيذ هذه الخطة وفق جدول زمن محدد.
✍ متابعة تنفيذ الخطة وتقويم الأداء.
✍ تبنى اساليب وحلول لمواجهة مشكلات الوقت.

وتشير هنا إلى أن التخطيط لدرس ما لابد أن يرافقه زمن كل مرحلة من مراحل التدريس، وعلى المعلم أن ينجز خطته تبعًا للزمن المحدد، ولكى يحسن المعلم من إدارة وقته داخل الصف ينبغى عليه أن يقوم بالآتى:

✍ الإلتزام بوقت الحصة من حيث توقيت بدايتها وتوقيت نهايتها.
✍ تحليل المشكلات التى يمكن أن تواجهه أثناء الحصة وتستنفذ وقتها واسبابها وكيفية علاجها.
✍ التخطيط الجيد لدرسه حيث يساعده ذلك على إدارة الفصل بفاعلية واستثمار وقت الحصة.

بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى

يهدف الاختبار التحصيلى إلى تحديد مقدار ما اكتسبه أو تعلمه المتعلم، الأمر الذى يسمح بمقارنه مستوى تحصيل الطالب بمستوى تحصيل غيره من الطلاب الذين طبق عليهم نفس الاختبار ولبناء الاختبار التحصيلى عدة خطوات:

- تحديد الأهداف (النواتج) التى يهدف المقرر إلى تحقيقها.
- تحديد محتوى الاختبار (أى الموضوعات التى يغطيها الاختبار) فى ضوء الأهداف التى يسعى الاختبار إلى تحقيقها، ومن وسائل تحقيق ذلك عمل جدول ثنائى يطلق عليه جدول المواصفات، وهو جدول ثنائى يتضمن الموضوعات التى يجب ان يغطيها الاختبار، والأهداف التعليمية للمقرر الدراسى (نواتج التعلم)، والأهمية النسبية (الوزن النسبى للموضوعات والأهداف). واستخدام جدول المواصفات يزيد من احتمالية تمثيل الاختبار للجوانب الهامة للمقرر الدراسى، ونسب تمثيلها للأهداف المنشودة، الأمر الذى يرفع من صدق هذا الاختبار، كما أن استخدام هذا الجدول يعمل كموجة للمعلم فى اختيار الأفكار التى يجب ان يتضمنها الاختبار.

خطوات إعداد جدول المواصفات

- تحديد نواتج التعلم للمقرر الدراسى والأوزان النسبية لكل منها والتى تعكس الاهتمام الذى تحظى به فى عملية التدريس، وتكتب أعلى اعمدة جدول المواصفات.
- تحديد موضوعات المقرر الدراسى، ونسبة تمثيل كل منها، ولكى يتسنى للمعلم أو معد الاختبار تحديد الأوزان النسبية أو نسبة تمثيل موضوعات المقرر الدراسى يمكنه الاستعانة بالموجهات التالية:
- الزمن المخصص لتدريس كل موضوع من موضوعات المقرر الدراسى.

وبعد تحديد الموضوعات التى يتضمنها المقرر الدراسى، والأوزان النسبية لكل منها تكتب هذه الموضوعات افقيًا على صفوف الجدول، وينشأ عن تقاطع الأعمدة التى تمثل نواتج التعلم، والصفوف التى تمثل الموضوعات عدد معين من خلايا (الخانات) التى تحدد وتعكس درجة تمثيل كل موضوع من موضوعات المحتوي التى تحدد بدورها نسبة الأسئلة أو عدد الأسئلة التى يجب أن يتضمنها الاختبار بالنسبة لكل موضوع من موضوعات المحتوى ، والوزن النسبى المحدد لكل موضوع من موضوعات المحتوى، ولتحديد الأهمية النسبية لكل خلية من خلايا جدول المواصفات يتم اتباع الخطوات التالية:

- يتم تحديد وضع الخلية.
- يتم تحديد (الموضوع) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للصف.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود (الهدف) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود .

PDF Compressor Pro

وفيما يلى نموذج لجدول مواصفات اختبار تحصيلى للصف الثانى الثانوى الفصل الدراسي الأول

المستوى المعرفي / المحتوى	معرفه		فهم		تطبيق		حل مشكلات ٢٥ ٪				المجموع
	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة			
الدول الحقيقية ورسم المنحنيات			١ مفردة	١	$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢			١ مفردة $\frac{١}{٢}$ سؤال	١ ٢	٣
الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها	١ مفردة	١			$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢	$\frac{١}{٤}$ سؤال مقال	٢	١ مفردة سؤال مقال	١ ٤	٥
النهايات		١	١ مفردة		$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢	$\frac{١}{٤}$ سؤال	٢	١ مفردة سؤال مقال	١ ٤	٥
حساب المثلثات	١ مفردة	١			$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢			١ مفردة $\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	١ ٢	٣
المجموع	٢ مفردة	٢	٢ مفردة	٢	٢ سؤال	٨	١ سؤال	٤	٤ مفردات ٣ سؤال مقال		١٦
النسبة	١٢,٥٪		١٢,٥٪		٥٠٪		٢٥٪				١٠٠٪

ويلاحظ أنه بعد تحديد جدول مواصفات الاختبار، نكتب مفردات الاختبار فى ضوء كل من الموضوع والمستوى المعرفى فى كل خلية من خلايا الجدول مع اختيار أنماط الأسئلة الملائمة لقياس هذه المستويات وذلك كما هو موضح بالاختبارات المرفقة فى نهاية كل فصل دراسى بكراسة التدريبات والأنشطة.

PDF Compressor Pro

المقدمة

وفيما يلى نموذج لجدول مواصفات اختبار تحصيلى للصف الثانى الثانوى الفصل الدراسي الثاني

المستوى المعرفي / المحتوى	معرفه		فهم		تطبيق		حل مشكلات ٢٥ ٪			
	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة	عدد الأسئلة	الدرجة		المجموع
المتتابعات والمتسلسلات			١ مفردة	١	$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢			١ مفردة $\frac{١}{٢}$ سؤال	١ ٢	٣
التباديل والتوافيق	١ مفردة	١			$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢	$\frac{١}{٤}$ سؤال مقال	٢	١ مفردة سؤال مقال	١ ٤	٥
التفاضل والتكامل		١	١ مفردة		$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢	$\frac{١}{٤}$ سؤال	٢	١ مفردة سؤال مقال	١ ٤	٥
حساب المثلثات	١ مفردة	١			$\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	٢			١ مفردة $\frac{١}{٢}$ سؤال مقال	١ ٢	٣
المجموع	٢ مفردة	٢	٢ مفردة	٢	٢ سؤال	٨	١ سؤال	٤	٤ مفردات ٣ سؤال مقال		١٦
النسبة	٪١٢,٥		٪١٢,٥		٪٥٠		٪٢٥				٪١٠٠

ويلاحظ أنه بعد تحديد جدول مواصفات الاختبار، نكتب مفردات الاختبار فى ضوء كل من الموضوع والمستوى المعرفى فى كل خلية من خلايا الجدول مع اختيار أنماط الأسئلة الملائمة لقياس هذه المستويات وذلك كما هو موضح بالاختبارات المرفقة فى نهاية كل فصل دراسى بكراسة التدريبات والأنشطة.

PDF Compressor Pro



الدوال ذات المتغير الحقيقي ورسم المنحنيات

Functions of a real variable and drawing curves

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب الدالة كثيرة الحدود، ودرس خواص الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية، وكيفية رسم كل منها بالتمثيل البيانى بمجموعة من النقاط، كما تعلم كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد ومتغيرين؛ وكذلك حل معادلات الدرجة الثانية، وفى هذه الوحدة سوف يتعرف الطالب على المزيد من الدوال الأخرى منها الدالة التكعيبية ودالة المقياس، والدالة الكسرية الجبرية، والدوال المتعددة التعريف وسوف يتعرف على خواص أخرى لهذه الدوال وكيفية رسم كل منها مستخدمًا التحويلات الهندسية من انعكاس وانتقال، وفى نهاية الوحدة سوف يدرس حل المعادلات ومتباينات المقياس مع استخدام البرامج الرسومية ومنها (*GeoGebra*) وتتكون هذه الوحدة من خمسة دروس هى:

الدرس الأول: الدوال الحقيقية.

الدرس الثانى: بعض خواص الدوال.

الدرس الثالث: اطراد الدوال.

الدرس الرابع: التمثيل البيانى للدوال.

الدرس الخامس: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

مخرجات التعلم

في نهاية هذه الوحدة و تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال)
- يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- يتعرف الدالة الأحادية (one – to – one).
- يستنتج اطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال).
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية – دالة المقياس – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:

د(س ± أ)±ب، أ د (س±ب) ± جـ على الدوال السابقة.

- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة:

|أ س + ب| = جـ ، |أ س + ب| = |ء س + جـ|،

|أ س + ب| = جـ س + ء

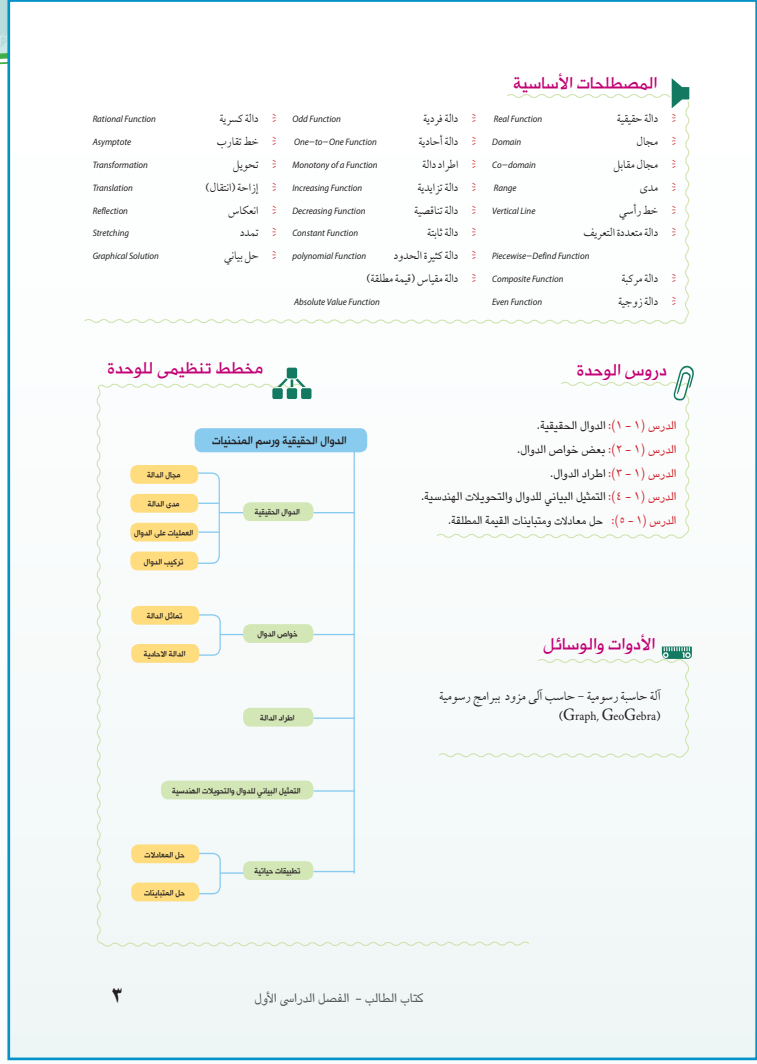
- يحل متباينات على الصورة:

|أ س + ب| > جـ ، |أ س + ب| ⩾ جـ ،

|أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| ⩽ جـ

- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة.
- يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج جيوجيبرا "geogebra".
- يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التى يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.

PDF Compressor Pro



زمن تدريس الوحدة

١٨ حصة.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الإبداعى - التفكير التحليلى - حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - سبورة مربعات - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - برامج رسومية للحاسوب (GeoGebra).

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة:

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية فى أثناء الدرس وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة

يوضح المخطط التنظيمى المفاهيم المرتبطة بالدوال الحقيقية وخواصها وأنواعها و يبين أن الدالة تعرف بتحديد مجالها و مجالها المقابل و قاعدة تعريفها كما يوضح المخطط ضواحى الدالة من حيث كونها أحادية و غير أحادية و اطرادها (تزايدية-تناقصية-ثابتة) ثم العمليات على الدوال (الجمع-الطرح-الضرب-القسمة-تركيب الدوال) و ذلك بالنسبة لأنواع الدوال المختلفة (دالة المقياس-الدالة الكسرية-الدوال المثلثية-كثيرات الحدود بأنواعها (الثابتة-الخطية - التربيعية - التكعيبية) و يوضح الجزء الأخير من المخطط التمثيل البياني للدوال و التحويلات الهندسية على الدوال (الإزاحة الأسية-الإزاحة الأفقية-الإزاحة الأسية ، الأفقية معًا-تمدد صحتي الدالة).

PDF Compressor Pro

١ - ١ الدوال الحقيقية
Real Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب مفهوم الدالة وتعرف على المجال والمجال المقابل والمدى ومثل الدالة بالمخطط السهمى والمخطط البيانى، وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب الدالة متعددة التعريف، اختبار الخط الرأسى للدالة وتعيين مجال ومدى الدالة وبعض العمليات على الدوال.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس و تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يستخدم طريقة اختبار الخط الرأسى؛ لتحديد العلاقات التى تمثل دالة.
- يتعرف الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- يتعرف بعض العمليات على الدوال.

مفردات أساسية

- دالة – مجال – مجال مقابل – مدى – قاعدة دالة – مخطط سهمى – مخطط بيانى – بيان الدالة – خط رأسى – متعددة التعريف.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - برامج رسومية للحاسوب (*GeoGebra*).

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلى (الوسائط المتعددة).

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من صفحة (٤) إلى صفحة (١٥) – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

أكد إلى طلابك على مفهوم الدالة بأنها علاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ يقترن فيها كل عنصر من سـ بعنصر واحد فقط من صـ وتكتب بالصورة د: سـ ← صـ وتقرأ د دالة من سـ إلى صـ وتسمى المجموعة سـ بمجال الدالة والمجموعة صـ بالمجال المقابل والمجموعة { ص = د(س): س∈ سـ } مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.


الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية

١ - ١

Real Functions

سوف تتعلم
- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

استكشف

سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث تحدد لكل عنصر من عناصر سـ عنصرًا وحيدًا من عناصر صـ ويرمز للدالة بأحد الرموز: د أو ق أو ر أو ....

إذا رمزنا لدالة ما من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ بالرمز د فإنها تكتب رياضيًا:

د: سـ ← صـ وتقرأ د دالة من سـ إلى صـ ويلاحظ:

١- لكل عنصر س ∈ سـ يتعين عنصر وحيد ص∈ صـ بقاعدة الدالة د وتكتب: ص = د(س)

٢- تسمى المجموعة سـ مجال الدالة ، وتسمى المجموعة صـ المجال المقابل للدالة.

٣- تسمى المجموعة {ص = د(س): س ∈ سـ} مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.

المصطلحات الأساسية

Function	دالة
Domain	مجال
Co-domain	مجال مقابل
Range	مدى
Arrow Diagram	مخطط سهمى
Cartesian Diagram	مخطط بيانى
Vertical Line	خط رأسى
Piecewise Function	دالة متعددة التعريف

تعريف

الدالة الحقيقية Real Function

تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكر أن

إذا كانت د: سـ ← صـ فإن بيان د = {(س، ص): س ∈ سـ ، ص ∈ صـ ، ص= د(س)}

مثال

١ العلاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ الممثلة فى المخطط السهمى المجاور تمثل دالة، حيث:

المجموعة سـ هى مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

والمجموعة صـ المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة

كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البيانى كما فى الشكل التالى حيث:

بيان الدالة = {(١، ٦)، (٢، ٨)، (٣، ٩)، (٤، ٦)}

إرشادات للمعلم:

بعض أنواع الدوال

- **الدالة الأحادية: one-to-one** وسيتم دراستها فى دروس لاحقة بهذا الكتاب.
- **الدالة الفوقية: on-to-Function** الدالة د : سـ ← صـ تسمى فوقية إذا كان كل عنصر من صـ هو صورة لأحد عناصر سـ أى أن المجال المقابل يساوى المدى.
- **دالة التناظر الأحادى: bijective Function**
- الدالة د: سـ ← صـ تسمى دالة تناظر أحادى إذا كانت دالة أحادية وفوقية.

اجراءات الدرس

- بعد استعراض مفهوم الدالة ومجالها ومجالها المقابل يبدأ المعلم بعرض مفهوم الدالة الحقيقية من خلال المثال ص٤ و يبدأ بسؤال الطلاب عن:

(١) مجال الدالة. **(٢)** المدى. **(٣)** بيان الدالة.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

اطلب إلى طلابك حل ماورد في بند (حاول أن تحل) صفحة (٥) من كتاب الطالب وتابع حلولهم.

(١) إجابات :

أ) $٢^{٥} - ١ = ٢٤ ، ٢^{٩} - ١ = ٨٠$

ب) $ص = س^{٢} - ١$

جـ) نعم العلاقة دالة؛ لأن لكل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فى ص.

فى بند تعلم ص (٥):

وضح إلى الطلاب بأن اختبار الخط الرأسى يستخدم؛ لتحديد العلاقة التى تمثل دالة فإذا وضعنا حافة المسطرة فى وضع رأسى على الشكل البيانى المرسوم، وكانت تمر بنقطة واحدة فقط من النقاط التى تمثل العلاقة، كانت هذه العلاقة دالة والمثال المحلول يوضح ذلك.

من المهم عرض المثال (ص٥) وذلك لأنه يبين للطلاب الفرق بين ما هودالة أم غير دالة.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

(٢) إجابات حاول أن تحل صـ(٦)

شكل (١) ، شكل (٤) يمثل دالة .

شكل (٣) لايمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى المار بالنقطة. (٢، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منتهٍ من النقاط.

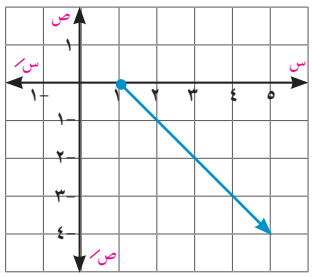
شكل (٢) لايمثل دالة لأن الخط الرأسى يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة.

تمارين إثرائية

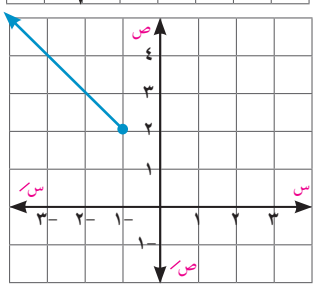
فى كل من الأشكال الآتية، استنتج من الرسم مجالًا، ومدى كل دالة:

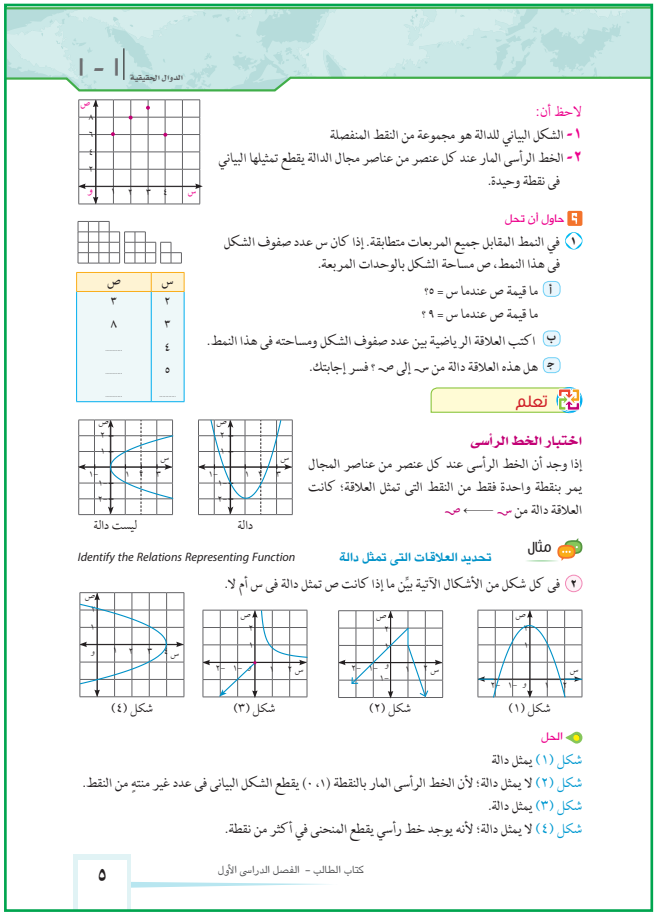
(٣)

أ) المدى = $]-\infty ، ٠]$



ب) المدى = $]٢ ، \infty[$





PDF Compressor Pro

معالجة القضايا المتضمنة فى الدرس:

يمكن سؤال الطلاب الأسئلة التالية:

(١) هل تعتبر قيمة الاستهلاك كبيرة إذا كان استهلاك أسرة للغاز ٣٠ مترًا مكعبًا شهريًا.

(٢) ممكن تطلب من الطلاب حساب شريحة استهلاك كل أسرة والحساب الغاز شهريًا؟

(٣) نناقش الطلاب حول أهمية المحافظة على الغاز وطرق ترشيد الاستهلاك.

فى بند عمل تعاونى ص (٧)

بين للطلاب أن الدالة د متصلة على مجالها $[0, \infty[$ وعند إيجاد إحدى القيم التى تنتمي إلى مجال الدالة نبحث عن الفترة الجزئية من مجال الدالة فمثلاً: د(٣٠) = ١٠٠ × ٣٠ - ١٥٠٠ = ١٥٠٠،

د(٦٠) = ١٥٠ × ٦٠ - ٤٠٠٠ = ٥٠٠٠ وهكذا.

الدالة متعددة التعريف: معلومة إثرائية

تكتب الدالة متعددة التعريف على شكل صفوف من الدوال الجزئية لكل منها مجالها الخاص بها، ومن أشهر هذه الدوال هى

دالة المقياس حيث: |س| = $\begin{cases} س & \text{عندما } س \geq 0 \\ -س & \text{عندما } س < 0 \end{cases}$

تكون الدالة متعددة التعريف متصلة على فترة معينة من المجال فى حال تحقق الشروط التالية:

- تكون معرفة على تلك الفترة.

تحوى على دوال متصلة فى تلك الفترة.

لايوجد عدم اتصال عند كل نقط نهاية مجالات الدوال المكونة لها.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

اطلب إلى طلابك حل ماورد في بند (حاول أن تحل) صفحة (٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة عن طريق.

قسم طلابك ثنائيات بحيث كل زوج يقوم بحل فقرة من الفقرات.

ناقش طلابك فى الحلول المختلفة للوصول إلى الحلول الصحيحة.

إجابات:

أ د(١٥) = ٤٠ × ١٥ = ٦٠٠

د(٤٠) = ١٠٠ × ٤٠ - ١٥٠٠ = ٢٥٠٠ ،

د(٥٤) = ١٥٠ × ٥٤ - ٤٠٠٠ = ٤١٠٠

إجابة حاول أن تحل ص (٨)

٥ المجال = $]-\infty, 2-[$ المدى = $]0, 30] \cup [1, \infty[$

٦ أ المجال = ح المدى = {٢}

ب المجال = ح ، المدى = {-٢، ٣}

ج المجال = ح ، المدى = ح - $]0, 2[$

د المجال = ح - {١} ، المدى = $]-\infty, 2-[$



الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*

عمل تعاونى

الاستهلاك الشهرى (متر مكعب)	السعر بالقروش
حتى ٢٥	٤٠
أكثر ٢٥ حتى ٥٠	١٠٠
أكثر من ٥٠	١٥٠

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهرى منها تبعًا لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهرى من الغاز الطبيعى فى المنازل بالقروش، احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعى بالقروش للكميات التالية:

١- ٣٠ متر مكعب شهريًا.

٢- ٦٠ متر مكعب شهريًا.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهرى]

يمكن التعبير عن الجدول السابق بالدالة د لحساب قيمة استهلاك س مترًا مكعبًا من الغاز شهريًا حيث س ∈ ح على النحو التالى:

د(س) = $\begin{cases} ٤٠ س & \text{عندما } 0 \leq س \leq ٢٥ \\ ١٠٠ س - ١٥٠٠ & \text{عندما } ٢٥ < س \leq ٥٠ \\ ١٥٠ س - ٤٠٠٠ & \text{عندما } س > ٥٠ \end{cases}$

وهى دالة حقيقية متعددة التعريف (معرفة بأكثر من قاعدة)

تعلم

الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

حاول ان تحل

٤ تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة اجابتك فى عمل تعاونى ، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهرى من الغاز للكميات التالية:

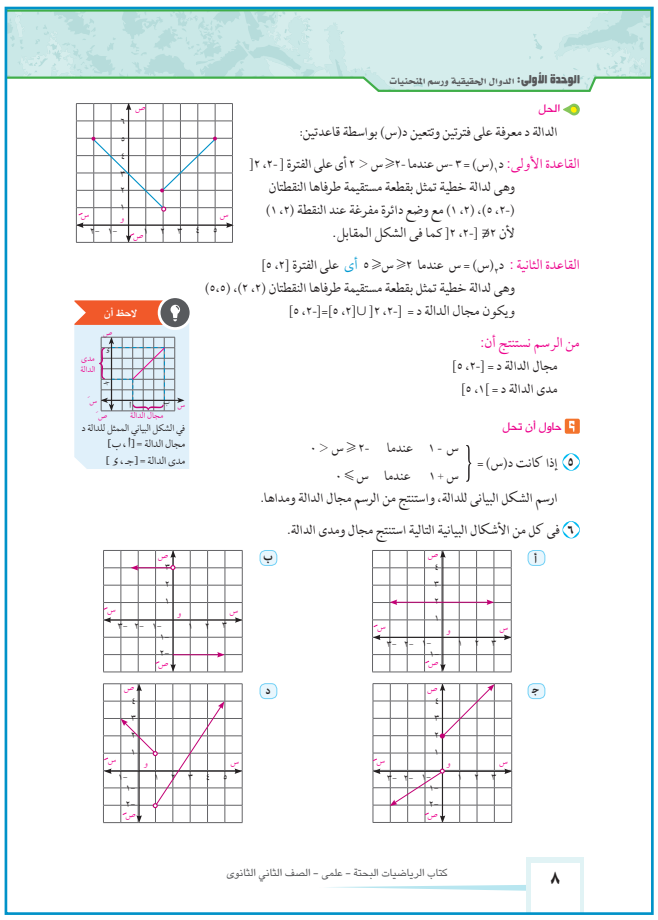
أ ١٥ متر مكعب ب ٤٠ متر مكعب ج ٥٤ متر مكعب

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

٤ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leq س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.



الحل

الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د(س) = ٣ -س عندما -٢ ≤ س < ٢ أى على الفترة $[-٢, ٢[$

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

لأن ٢ ∉ $[-٢, ٢[$ كما فى الشكل المقابل.

القاعدة الثانية : د(س) = س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ أى على الفترة $[٢, ٥]$

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (٢، ٢)، (٥،٥)

ويكون مجال الدالة د = $[-٢, ٢[\cup [٢, ٥] = [-٢, ٥]$

لاحظ أن

مدى الدالة

مجال الدالة

في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ ، ب[

مدى الدالة = [جـ ، ء]

من الرسم نستنتج أن:

مجال الدالة د = $[-٢, ٥]$

مدى الدالة د = $]١, ٥]$

حاول أن تحل

٥ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س - ١ & \text{عندما } -٢ \leq س < ٠ \\ س + ١ & \text{عندما } س \leq ٠ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

٦ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

أ ب

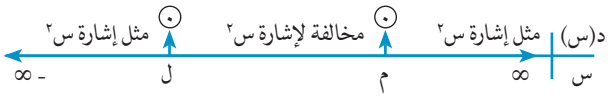
ج د

PDF Compressor Pro

تحديد مجال الدوال الحقيقية و العمليات عليها:

ذكر الطلاب بمايلى:

- فى الدالة كثيرة الحدود يكون المجال والمجال المقابل هو ح.
- قاعدة الدالة (صورة س) هى حد أو مقدار جبرى.
- أس المتغير س فى أي حد من الحدود هو عدد طبيعى.
- دالة الكسر الجبرى هى دالة قاعدتها على صورة كسر جبرى كل من بسطه ومقامه عبارة عن قاعدة دالة كثيرة حدود ومجال دالة الكسر الجبرى = ح - مجموعة أصفار المقام.
- لتعيين إشارة الدالة د ، حيث د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ وكان المميز ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠ فإن إشارة الدالة د تتحدد كما في الشكل الآتي:



فمثلاً: لإيجاد مجال الدالة: د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$

نضع: س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠ فيكون جذرا المعادلة هما { -١، ٣} وتكون د(س) > ٠ عندما س ∈ ح - [-١، ٣]

ويمكنك إعطاء التدريب الآتى للطلاب.

أوجد مجال كل من الدوال الآتية:

١) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}$ (ح-[-٣،٣])

٢) د(س) = $\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ ([-١،١])

٣) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$ (ح)

٤) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}$ (ح-[-٣،٢])

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

حاول أن تحل ص (٩)

أ) ح - { ١، ٢} ب) ح -]-٤، ٤[

جـ) ع د)] -٣، ٣[

تفكير ناقد ص (٩):

- قد يجد الطالب صعوبة فى حل هذه المسألة؛ لأن هناك مجهول وهو ك فى المقام.
- فيمكن أن نساعد الطالب ونرشده إلى أن مجال د هو ح- {٣} فيمكن إيجاد قيمة ك كما يلى

فإن س^{٢} - ٦س + ك = ٠ **أى** ٩ - ١٨ + ك = ٠ **ومنها** ك = ٩



١ - ١ الدوال الحقيقية

تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن
مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

مثال تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) د$_{١}$(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ب) د$_{٢}$(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

جـ) د$_{٣}$(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٥}$ د) د$_{٤}$(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}}$

الحل

أ) الدالة د$_{١}$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع س^{٢} - ٩ = ٠ أى س = ±٣

وعليه يكون مجال الدالة د$_{١}$ هو ع - {-٣، ٣}.

ب) مجال الدالة د$_{٢}$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا ، أى قيم س التى تجعل س - ٣ ≥ ٠

∵ س - ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣ ∴ مجال د$_{٢}$ = [٣ ، ∞ [.

جـ) د$_{٣}$(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٦}$ ، دليل الجذر عدد فردى مجال د$_{٣}$ = ع

د) تكون د$_{٤}$ معرفة عندما يكون س^{٢} - ٤ > ٠

وعليه فإن مجال د$_{٤}$ هو]-∞، -٢[∪]٢، ∞[= ع - [-٢، ٢]

للحظ:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[ن]{\text{ر}(\text{س})}$ حيث ن ∈ صـ، ن > ١ ، ر (س) كثيرة حدود

أولاً: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) ≥ ٠

حاول أن تحل

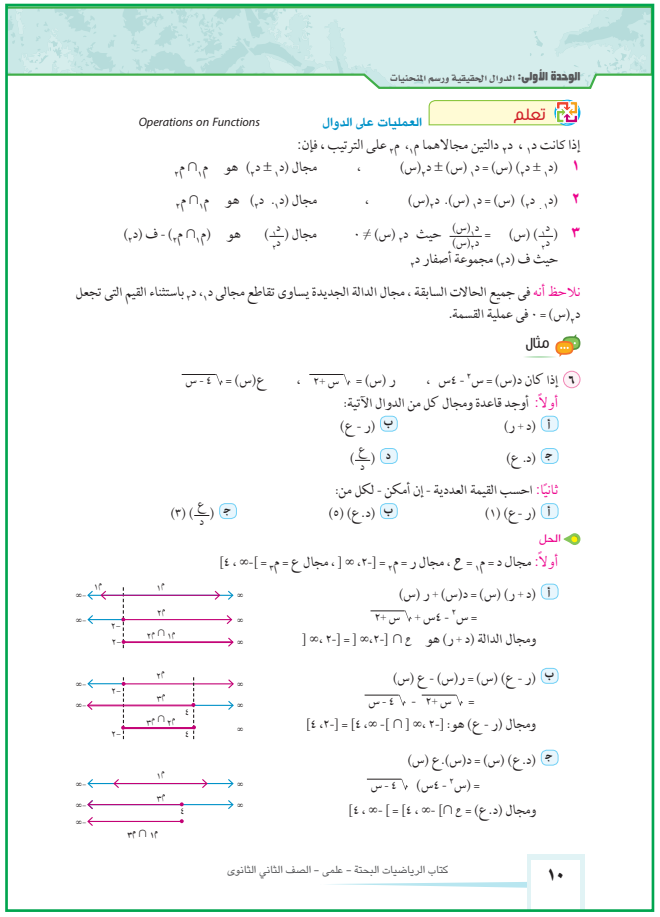
٧ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

أ) د$_{١}$(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ ب) د$_{٢}$(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٦}$

جـ) د$_{٣}$(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٥}$ د) د$_{٤}$(س) = $\frac{٥}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{٢}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{ك}}$ هو ع -{٣} أوجد قيمة ك.



تعلم العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالتين مجالاهما م$_{١}$ ، م$_{٢}$ على الترتيب ، فإن:

١ (د$_{١}$ ± د$_{٢}$) (س) = د$_{١}$(س) ± د$_{٢}$(س) ، مجال (د$_{١}$ ± د$_{٢}$) هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$

٢ (د$_{١}$. د$_{٢}$) (س) = د$_{١}$(س) . د$_{٢}$(س) ، مجال (د$_{١}$. د$_{٢}$) هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$

٣ $\left(\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}\right)$ (س) = $\frac{\text{د}_{١}(\text{س})}{\text{د}_{٢}(\text{س})}$ حيث د$_{٢}$(س) ≠ ٠ ، مجال $\left(\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}\right)$ هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ - ف (د$_{٢}$)

حيث ف (د$_{٢}$) مجموعة أصفار د$_{٢}$

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د$_{١}$ ، د$_{٢}$ باستثناء القيم التى تجعل د$_{٢}$(س) = ٠ فى عملية القسمة.

مثال

٦ إذا كان د(س) = س^{٢} - ٤س ، ر (س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ ، ع(س) = $\sqrt{٤ - \text{س}}$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ) (د + ر) ب) (ر - ع)

جـ) (د . ع) د) $\left(\frac{\text{ع}}{\text{د}}\right)$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

أ) (ر - ع) (١) ب) (د . ع) (٥) جـ) $\left(\frac{\text{ع}}{\text{د}}\right)$ (٣)

الحل

أولاً: مجال د = م$_{١}$ ، مجال ر = م$_{٢}$ = [-٣، ∞ [، مجال ع = م$_{٣}$ =]-∞ ، ٤]

أ) (د + ر) (س) = د(س) + ر (س)

= س^{٢} - ٤س + $\sqrt{\text{س} + ٣}$

ومجال الدالة (د + ر) هو ع ∩ [-٣، ∞ [= [-٣، ٤]

ب) (ر - ع) (س) = ر(س) - ع (س)

= $\sqrt{\text{س} + ٣}$ - $\sqrt{٤ - \text{س}}$

ومجال (ر - ع) هو: [-٣، ∞ [∩]-∞ ، ٤] = [-٣، ٤]

جـ) (د . ع) (س) = د(س) . ع (س)

= (س^{٢} - ٤س) $\sqrt{٤ - \text{س}}$

ومجال (د . ع) = ع ∩]-∞ ، ٤] =]-∞ ، ٤]

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

حاول أن تحل ص (١١):

م١ = ح ، م٢ =]١ ، ∞[، م١ ∩ م٢ =]١ ، ∞[

أ) د + ر) (س) = (س٢ - ٤) + $\sqrt{س - ١}$

والمجال المشترك]١ ، ∞[

(د.ر) (س) = (س٢ - ٤) $\sqrt{س - ١}$ والمجال المشترك]١ ، ∞[

$(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س^2 - ٤}{\sqrt{س - ١}}$ والمجال المشترك]١ ، ∞[

$(\frac{ر}{د})(س) = \frac{\sqrt{س - ١}}{س^2 - ٤}$ والمجال المشترك]١ ، ∞[- {٢}

ب) د + ر) (٥) = ٢٣ ، (د.ر) (٢) = ٤٢

$(\frac{د}{ر})(٣) = \frac{٥}{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $(\frac{ر}{د})(-٢)$ غير موجودة.

في بند تركيب الدوال:

أشر إلى الطلاب بأن الدالة ص = (س - ٣)٢ تنتج من دمج الدالة ص = س - ٣ والدالة ص = س٢، ثم وضح إليهم أن هذا الدمج لم ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة ، ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

أمثلة إثرائية:

(١) إذا كان: د(س) = س٢ + ١ ، ر(س) = س - ٤ فأوجد:

أ) [د٥ ر] (س) (ب) (ر٥د) (س) (جـ) [د٥ ر] (٢)

الحل:

أ) [د٥ ر] (س) = د[ر(س)] = د(س - ٤)

= (س - ٤)٢ + ١ = س٢ - ٨س + ١٧

ب) (ر٥د) (س) = ر[د(س)] = ر (س٢ + ١)

= (س٢ + ١) - ٤ = س٢ - ٣

جـ) [د٥ ر] (٢) = ٢٢ - ٨ (٢) + ١٧ = ٥

في بند التفكير:

- ناقش مع طلابك هل يمكن أن تكون عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟
- وضح وجهات النظر المختلفة.
- بين الإجابة الصحيحة من خلال عرض المسألة وحلها.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

حل حاول أن تحل ص (١٢)

(٥) (د٥ ر) (س) = د(٣س) = (٣س)٢ + ٦

(د٥ ر) (٣) = ٨١ + ٦ = ٨٧ ،

٩س٢ + ٦ = ٤٢ أى س٢ = ٤ ∴ س = ± ٢



د) $(\frac{ع}{د})(س) = \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{\sqrt{س - ٤}}{س^2 - ٤س}$

مجموعة أصفار الدالة د هى {٠، ٤}

مجال $(\frac{ع}{د})$ =]-∞ ، ٤] ∩ ع - {٠، ٤} =]-∞ ، ٤[- {٠}

ثانيًا: القيم العددية:

أ) ∵ (ر - ع) (س) = $\sqrt{س + ٣}$ - $\sqrt{س - ٤}$ لكل س ∈ [-٣، ٤]

، ١ ∈ [-٣، ٤] ∴ (ر-ع)(١) = $\sqrt{٤}$ - $\sqrt{٣}$ = صفر

ب) ∵ (د.ع) (س) = (س٢ - ٤س) $\sqrt{س - ٤}$ لكل س ∈]-∞ ، ٤]

، ٥ ∉]-∞، ٤] ∴ (د.ع)(٥) غير معرفة

جـ) ∵ $(\frac{ع}{د})(س) = \frac{\sqrt{س - ٤}}{س^2 - ٤س}$ لكل س ∈]-∞ ، ٤[- {٠}

، ٣ ∈]-∞ ، ٤[- {٠} ∴ $(\frac{ع}{د})(٣) = \frac{\sqrt{٣ - ٤}}{٩ - ١٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٨) إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث:

د(س) = س٢ - ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$ أوجد:

أ) مجال كل من الدوال الآتية: (د + ر) ، (د . ر) ، $(\frac{د}{ر})$ ، $(\frac{ر}{د})$

ب) أوجد القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $(\frac{د}{ر})$ (٣) ، $(\frac{ر}{د})$ (-٢)

عمل تعاونى تركيب الدوال *Composition of Functions*

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة د(س) = $\frac{١}{٤}$ س حيث س عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة ر(د) = د + ١٥٠٠ حيث س عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى إذا كان انتاج المصنع فى العام الأول

أ) ٢٠٠٠٠ وحدة ب) ٨٠٠٠٠ وحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالى:

تعلم

إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين وهى: ع = ر٥د

وتقرأ ر تركيب د، أو ر بعد د حيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

ويكون ع(س) = (ر٥ د) (س)

= ر(د(س))

من المخطط السابق يكون:

أ) ع (٢٠٠٠٠) = ر [د(٢٠٠٠٠)]

= ر(٥٠٠٠)

= ٥٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٦٥٠٠ وحدة

ب) ع (٨٠٠٠٠) = ...

لاحظ أن

د(٢٠٠٠٠) = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠٠٠٠ = ٥٠٠٠

فكر: هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد (د٥ ر) (س) ، (ر٥ د) (س) حيث د(س) = ٤س٢ ، ر(س) = ٢س

حاول أن تحل

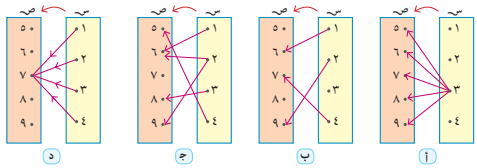
(٩) إذا كان د(س) = س٢ + ٦ ، ر(س) = ٣س

أولاً: أوجد (د٥ ر) (٣) ثانياً: حدد قيم س التى تجعل (د٥ ر) (س) = ٤٢

تمـارين ١ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) العلاقة المبينة بالمخططات السهمية التالية والتى تمثل دالة هى:



PDF Compressor Pro

إجابات تمارين الدرس الأول

(١) العلاقة التى تمثل دالة هى (د)

(٢) د (٣) ب

(٥) مدى الدالة =]١، ٣] ∪ {-١} (٦) ع -]٣، ٥[

(٧)]-٣، ٣[(٨) المدى =]١، ١٠[

(٩) أ د(٢) = -٤ × ٢ + ٣ = -٥

ب د(٣) = -(٣)^{٣} = -٢٧

جـ د(١٠) = ٣(١٠)^{٣} + ١ = ٣٠١

(١٠) أ ع(١٠) = ٨٠ سم/ث (ب) ع(١٥٠) = ٨٠ سم/ث

جـ ع (٢١٠) = -٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠سم/ث

(١١) أ د(٥٠٠٠) = ١٢٥٠٠

ب د(١٠٠٠٠) = ٢٢٥٠٠

جـ د(٥٠٠٠٠) = ٨٥٠٠٠

(١٢) ح(ل) = ٤ل

أ ح(٣) = ١٢ (ب) ح $(\frac{١٥}{٤})$ = ١٥

الربط بالهندسة:

وضح للطلاب أن فروع الرياضيات مرتبطة ومتكاملة مع بعضها البعض.

(١٣) م = π س^{٢}، $\frac{\pi}{٤}$، ٢٥π

(١٤) أ ع - {٢، ٣} (ب) ع - {-١}

جـ]٢، ∞[د]-٢، ٢[

هـ]$\frac{١}{٢}$، ∞[و ع - {٠، -٢}

(١٥) م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =]-٢، ٣[

(د$_{١}$ + د$_{٢}$)(س) = ٥س + ٣

والمجال المشترك هو]-٢، ٣[،

(د$_{١}$ - د$_{٢}$)(س) = س - ٥

والمجال المشترك هو]-٢، ٣[

(١٦) م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =]-١، ٣[

(د$_{١}$ + د$_{٢}$)(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

(د$_{٢}$ - د$_{١}$)(س) = س^{٢} + س - ٢

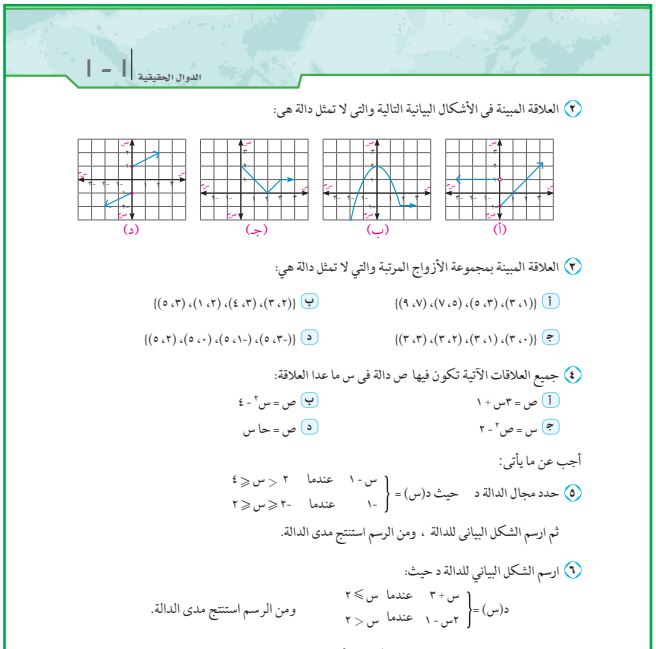
والمجال المشترك =]-١، ٣[

$(\frac{د_{١}}{د_{٢}})(س) = \frac{س+٢}{س^{٢}+٢س} = \frac{١}{س}$

والمجال المشترك =]-١، ٣[- {٠}،

$(\frac{د_{٢}}{د_{١}})(س) = \frac{س^{٢}+٢س}{س+٢} = س$

والمجال المشترك =]-١، ٣[



(٢) العلاقة المبينة فى الأشكال البيانية التالية والتى لا تمثل دالة هى:

(٣) العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

أ {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}

ب {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٥، ٣)}

جـ {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}

د {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

(٤) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

أ ص = ٣س + ١

ب ص = س^{٢} - ٤

جـ س = ص^{٢} - ٢

د ص = حا س

أجب عن ما يأتى:

(٥) حدد مجال الدالة د حيث د(س) = { س - ١ عندما ٢ < س ⩽ ٤ ؛ ١ - عندما -٢ ⩽ س ⩽ ٢ }

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

(٦) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

د(س) = { س + ٣ عندما س ⩽ ٢ ؛ ٣س - ١ عندما س > ٢ }

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

(٧) إذا كانت د(س) = { ٣س + ٣ عندما -٢ ⩽ س < ٠ ؛ ١ - س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

(٨) إذا كانت د(س) = { س^{٢} + ١ عندما -٣ ⩽ س < ٠ ؛ س + ٢ عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٣ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

(٩) إذا كان: د(س) = { -٤س + ٣ عندما س > ٣ ؛ -س^{٣} عندما ٣ ⩽ س ⩽ ٨ ؛ ٣س^{٢} + ١ عندما س < ٨ }

أوجد:

أ د(٢) ب د(٣) جـ د(١٠)

(١٠) الربط بالميكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

ع(ن) = { ٨ن عندما ٠ ⩽ ن ⩽ ١٠ ؛ ٨٠ عندما ١٠ < ن < ٢٠٠ ؛ -٤ن + ٨٨٠ عندما ٢٠٠ ⩽ ن ⩽ ٢٢٠ }

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ ع(١٠) ب ع(١٥٠) جـ ع(٢١٠)

(١١) الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

د(س) = { $\frac{٥}{٣}$ س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٥٠٠٠ ؛ ٢س + ٢٥٠٠ عندما ٥٠٠٠ < س ⩽ ١٥٠٠٠ ؛ $\frac{٣}{٢}$ س + ١٠٠٠٠ عندما ١٥٠٠٠ < س ⩽ ٦٠٠٠٠ }

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة. أوجد:

أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) جـ د(٥٠٠٠٠)

(١٢) الربط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد:

أ ح (٣) ب ح $(\frac{١٥}{٤})$

(١٣) الربط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م$(\frac{١}{٢})$، م(٥).

(١٤) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د(س) = $\frac{س+٣}{س^{٢}-٥س+٦}$ ب د(س) = $\frac{س+١}{س^{٣}+١}$

PDF Compressor Pro

(١٧) أ -٢ ب ٥٩
جـ -٦٩ د -١٢٥

(١٨) (د٥ ر)(س) = $\frac{١}{س+٣}$ ، ح = {-٣}
(ر٥ د)(س) = $\frac{١}{س}$ + ٣ ، ح = {٠}

(١٩) س = ٥ ، المجال هو [٢ ، ∞[، (د٥ ر) (٣) = -٢

(٢٠) د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = س^{٣} - ٤

تمارين إثرائية

(١) إذا كانت د علاقة على ط (مجموعة الأعداد الطبيعية) بحيث: د(س) = ٥ - س لكل س ∈ ط هل د دالة؟ ولماذا؟

(٣) إذا كانت الدالة د: {-١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤} ← ع حيث:
د(س) = ٢س + ٣ فأوجد مدى الدالة وارسم الشكل البياني لها. [الإجابة: مدى الدالة = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١}]

(٤) إذا كانت الدالة د: {٠، ١، ٢، ٣} ← ع حيث د(س) = ٢س - ١
ارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أوجد المدى.
[الإجابة: المدى = {-١، ١، ٣، ٥}]

(٥) إذا كانت د: [-١، ٤] ← ع، د(س) = ٢س + ٣
أ **أولًا:** أوجد د(-١)، د(٠)، د(١)، د(٢)، د(٣)، د(٤).
ب **ثانيًا:** ارسم الشكل البياني للدالة د واستنتج من الرسم مدى هذه الدالة. [الإجابة: المدى = [١، ١١]

(٦) ارسم منحنى كل من الدوال الآتية ومن الرسم أوجد المدى:
أ **أولًا:** د$_{١}$: ط$_{+}$ ← ط ، د$_{١}$(س) = ٢س - ١
ب **ثانيًا:** د$_{٢}$: ع ← ع ، د$_{٢}$(س) = س^{٢} + ١
جـ **ثالثًا:** د$_{٣}$: ع - {٠} ← ع ، د$_{٣}$(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س}{س}$

(٧) إذا كانت الدالة د: [٠، ٤] ← ع حيث د(س) = ٢س - ٣
أ **أولًا:** أوجد: د(٠)، د(١)، د(٢)، د(٤)
ب **ثانيًا:** ارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أوجد المدى. [الإجابة: المدى [-٣، ٥]]

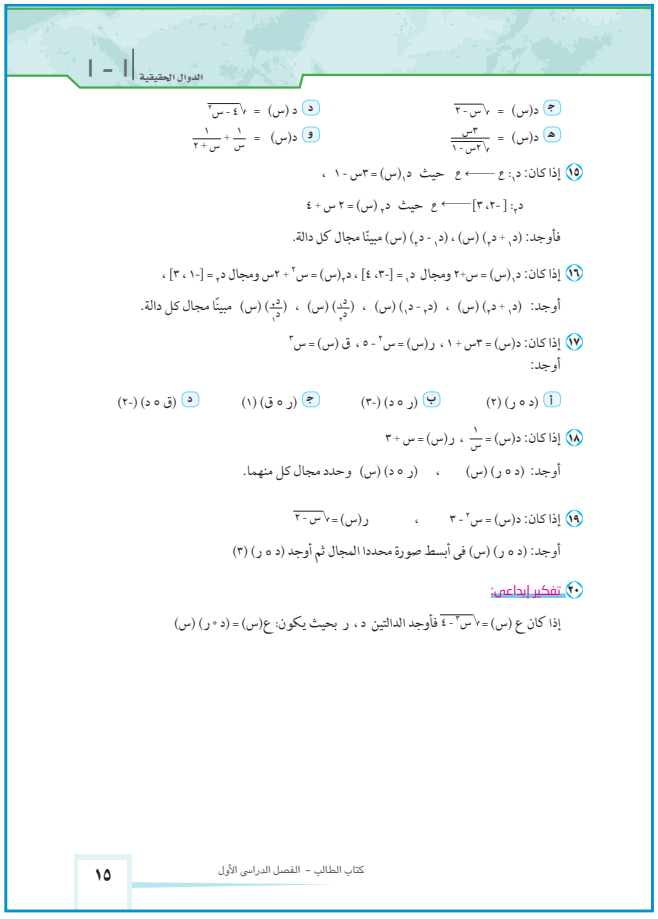
(٨) إذا كانت الدالة د: [-٢، ٤] ← ع حيث:

د(س) = { س - ١ عندما س < ٢ ; -١ عندما س ⩾ ٢ }

أ ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة. الإجابة: [-١، ٣] ∪ {-١}

(٩) ارسم منحنى الدالة د حيث:

د(س) = { س + ٣ عندما س ⩽ ٠ ; ٢س - ١ عندما س > ٠ }



(١٠) إذا كانت د: [-٢، ٤] ← ح حيث:

د(س) = { ٢س + ٣ عندما -٢ ⩽ س < ٠ ; ١ - س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤ }

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة. الإجابة: مدى الدالة هو [-٣، ٣]

(١١) إذا كانت: د[-٣، ٣] ← ع،

د(س) = { س^{٢} + ١ عندما س < ٠ ; س + ٢ عندما س ⩽ ٠ }

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة. الإجابة: مدى الدالة هو]١، ١٠]

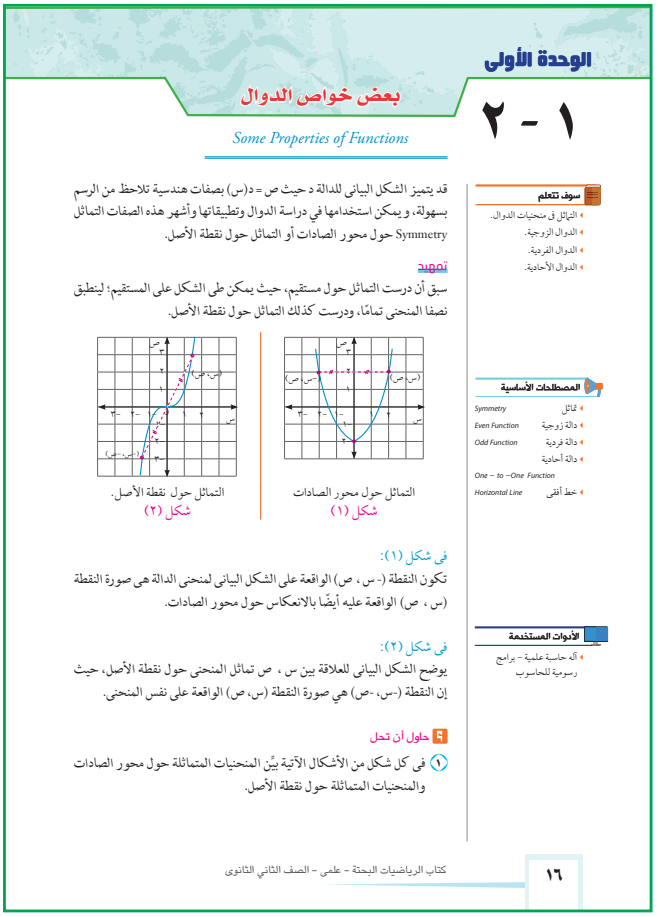
(١٢) إذا كانت د(س) = { -٣ عندما س ⩾ ٠ ; س^{٢} + ١ عندما س < ٠ }

أوجد: د(٠)، د(١)، د(٣)، د(٢)، د(-١)، د(-٢)، ثم ارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أوجد المدى.
الإجابة: مدى الدالة هو ع -]-٣، ٢]

PDF Compressor Pro

١ - ٢ بعض خواص الدوال

Some properties of functions


الوحدة الأولى

١ - ٢ بعض خواص الدوال

Some Properties of Functions

سوف تتعلم
- التماثل فى منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

المصطلحات الأساسية
- تماثل Symmetry
- دالة زوجية Even Function
- دالة فردية Odd Function
- دالة أحادية One – to – One Function
- خط أفقى Horizontal Line

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

قد يتميز الشكل البيانى للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.

التماثل حول محور الصادات
شكل (١)

التماثل حول نقطة الأصل.
شكل (٢)

فى شكل (١):
تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

فى شكل (٢):
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

حاول أن تحل
(١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.

كتاب الرياضيات البحتة – علمى – الصف الثانى الثانوى
١٦

خلفية

سبق أن درس الطالب تماثل الأشكال الهندسية، كما سبق له دراسة التماثل حول محور السينات، وحول محور الصادات، والتماثل حول مستقيم، وفى هذا الدرس سوف يدرس تماثل المنحنيات حول محور السينات وحول محور الصادات وحول نقطة الأصل تمهيدًا لدراسة الدالة الزوجية والدالة الفردية، وسوف يدرس فى هذا الدرس نوعًا خاصا من الدوال تعرف بالدوال الأحادية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس و تنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يمثل منحنيات الدوال حول محور الصادات وحول نقطة الأصل.
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية.
- يفرق بين الدوال الزوجية والدوال الفردية بيانيًا وجبريًا.
- يتعرف الدوال الأحادية.

مفردات أساسية

- تماثل – دالة زوجية – دالة فردية – دالة أحادية – خط أفقى.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - برامج رسومية للحاسوب (ebra≤eo≤).

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلى (الوسائط المتعدد).

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة (١٦) إلى صفحة (٢٤) - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

اطلب إلى طلابك إيجاد صور بعض نقاط الأزواج المرتبة فى المستوى الإحداثى المتعامد وصورها بالانعكاس حول محور السينات وحول محور الصادات، وبالنسبة لنقطة الأصل، ثم اطلب إليهم إيجاد صورة إحدى النقاط بدوران ١٨٠° أو -١٨٠° مركزه نقطة الأصل ومقارنته بالانعكاس لنفس النقطة.

إجراءات الدرس

توصل مع طلابك بأن صورة أى نقطة فى المستوى الإحداثى بالانعكاس بالنسبة لنقطة الأصل تكافئ دورانًا مركزة نقطة الأصل وبزاوية قدرها ١٨٠±°.

اطلب إلى الطلاب رسم دوال أخرى يكون فيها التماثل حول محور الصادات ، ودوال يكون فيها التماثل حول نقطة الأصل.

استخدام التكنولوجيا:

درب الطلاب فى غرفة الوسائط المتعددة باستخدام البرامج الرسومية ومنها البرنامج(*Geogebra*)في عمل انعكاس لمنحنيات الدوال حول محور الصادات وحول نقطة الأصل.

ويمكنك تنزيل نسخة من هذا البرنامج المجانى من الموقع: http:// www.geogebra.org كما يمكنك تحميل دليل المساعدة باللغة العربية من نفس الموقع.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

(١) إجابات حاول أن تحل صـ(١٦)

أ ، ج دالة فردية. ب دالة زوجية.

في بند تفكير ناقد: (الحوار و المناقشة)

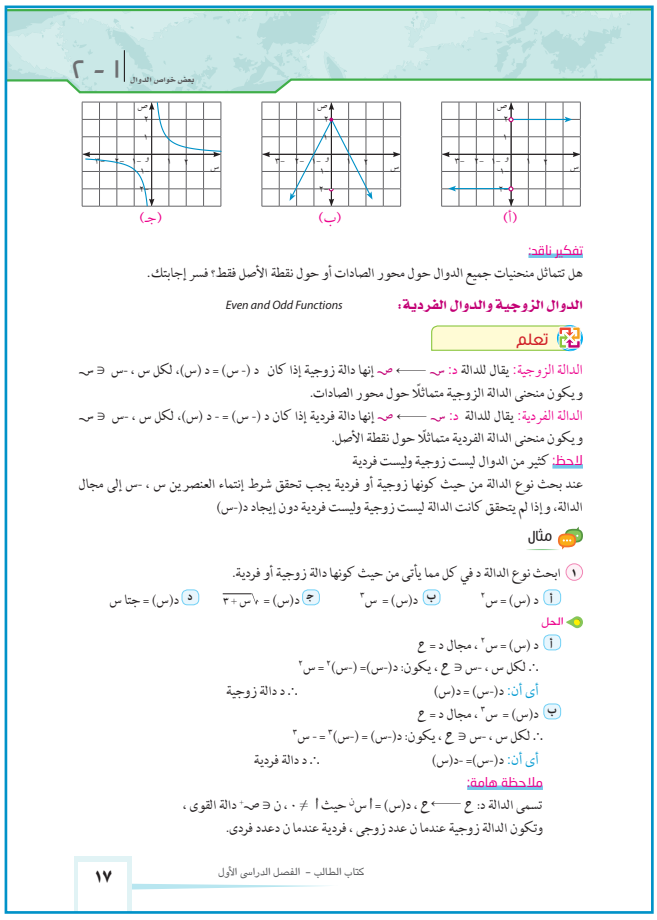
الإجابة لا: فالتماثل حول مستقيم يمكن طى الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا و الدالة يمكن أن تكون متماثلة حول محور الصادات أو المستقيم رأس يوازيه أو تكون غير متماثلة أصلاً.

إرشادات للدراسة:

- تسمى الدالة زوجية؛ لأن كل قيمة للمتغير ص تقابلها قيمتين للمتغير س (أى ينتج عنها زوج من النقاط).
- تسمى الدالة فردية لأن كل قيمة لـ ص يقابلها قيمة واحدة للمتغير س (ينتج عنها نقطة وحيدة).
- دالة القوى تؤكد ذلك فإذا كان الأس عددًا زوجيًا فإن الدالة تكون زوجية، وإذا كان الأس عددًا فرديًا تكون الدالة فردية.
- فى الدوال المثلثية: دالة جيب التمام ودالة القاطع دوال زوجية وباقى الدوال فردية.
- لاتوجد دالة زوجية وفردية فى آن واحد سوى الدالة الصفرية (د(س)=٠) لأنها متماثلة حول محور ص ومتماثلة حول نقطة الأصل.
- الدالة الثابتة دالة زوجية.
- لإثبات أن الدالة زوجية أو فردية لابد من تحقيق الشرط لكل (-س) ، س∈ مجال الدالة.
- الهدف من دراسة الدوال الزوجية هو عند رسم المنحنى عندما س ⩽ صفر فقط أمكننا رسم المنحنى كاملًا بالتماثل حول محور الصادات.
- الهدف من دراسة الدالة الفردية هو أنه عند رسم المنحنى س ⩽ صفر أمكننا رسم المنحنى كاملًا بالانعكاس حول نقطة الأصل (أو بدوران زاويته ± ١٨٠°).

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

- الدوال الزوجية هى: ب ، د ، هـ
- الدوال الفردية هى: أ ، جـ ، و ، ط
- دوال ليست زوجية وليست فردية: ز ، ح



(أ) (ب) (جـ)

تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة زوجية إذا كان د (- س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ س ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة فردية إذا كان د (- س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ س ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

(١) ابحث نوع الدالة د فى كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ د (س) = س^{٣} ب د(س) = س^{٣} ج د(س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ د د(س) = جتا س

الحل

أ د (س) = س^{٣} ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= (-س)^{٣} = -س^{٣}

أى أن: د(-س) = -د(س) ∴ د دالة فردية

ب د(س) = س^{٣} ، مجال د = ع

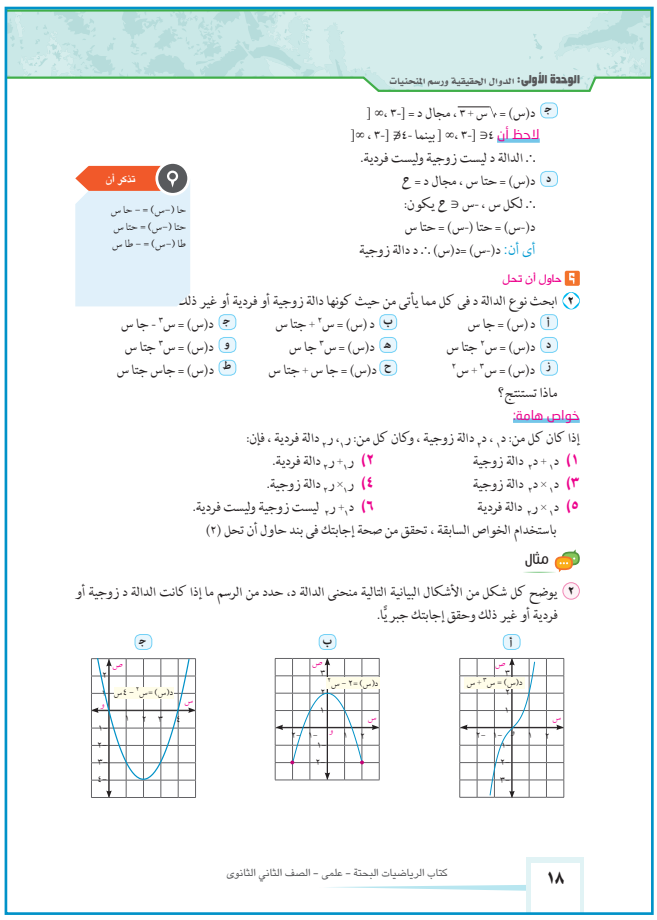
∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = (-س)^{٣} = س^{٣}

أى أن: د(-س)= د(س) ∴ د دالة زوجية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: ع ⟵ ع ، د(س) = أ س^{ن} حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص: دالة القوى ،

وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجى ، فردية عندما ن دعدد فردى.



ج د(س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ ، مجال د = [-٣، ∞ [

للحظ أن ٤ ∈ [-٣، ∞ [بينما -٤ ∉ [-٣، ∞ [

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = حتا س ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتا س

أى أن: د(-س) =د(س) ∴ د دالة زوجية

تذكر أن

حا (-س) = - حا س

حتا (-س) = حتا س

ظا (-س) = - ظا س

حاول أن تحل

(٢) ابحث نوع الدالة د فى كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د (س) = جا س ب د (س) = س^{٣} + جتا س ج د(س) = س^{٣} - جا س

د د(س) = س^{٣} جا س هـ د(س) = س^{٣} جا س و د(س) = س^{٣} جتا س

ز د(س) = س^{٣} + س^{٢} ح د(س) = جا س + جتا س ط د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية ، وكان كل من: ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دالة فردية ، فإن:

(١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية (٢) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ دالة فردية.

(٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ دالة زوجية (٤) ر$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة زوجية.

(٥) د$_{١}$ × ر$_{١}$ دالة فردية (٦) د$_{١}$ + ر$_{١}$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

مثال

(٣) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.

أ ب ج

PDF Compressor Pro



بعض خواص الدوال | ١ - ٢

الحل

أ د (س) = س^{٣} + س، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ح، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أي أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∈ ح ∴ د (-س) = (-س)^{٣} + (-س)

بالتبسيط: د (-س) = -س^{٣} - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا د (-س) = -(س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أي أن الدالة فردية.

ب د (س) = ٢ - س^{٢} ، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س ∈ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

بالتبسيط د (-س) = ٢ - س^{٢}

د (-س) = د (س) أي أن الدالة زوجية

ج د (س) = س^{٣} - ٤س ، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ح ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛

أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∵ كل س ، -س ∈ ح ∴ د (-س) = (-س)^{٣} - ٤ (-س)

بالتبسيط د (-س) = س^{٣} + ٤س ≠ د(س) ∴ د ليست زوجية

ولكن - د (س) = - س^{٣} + ٤ س

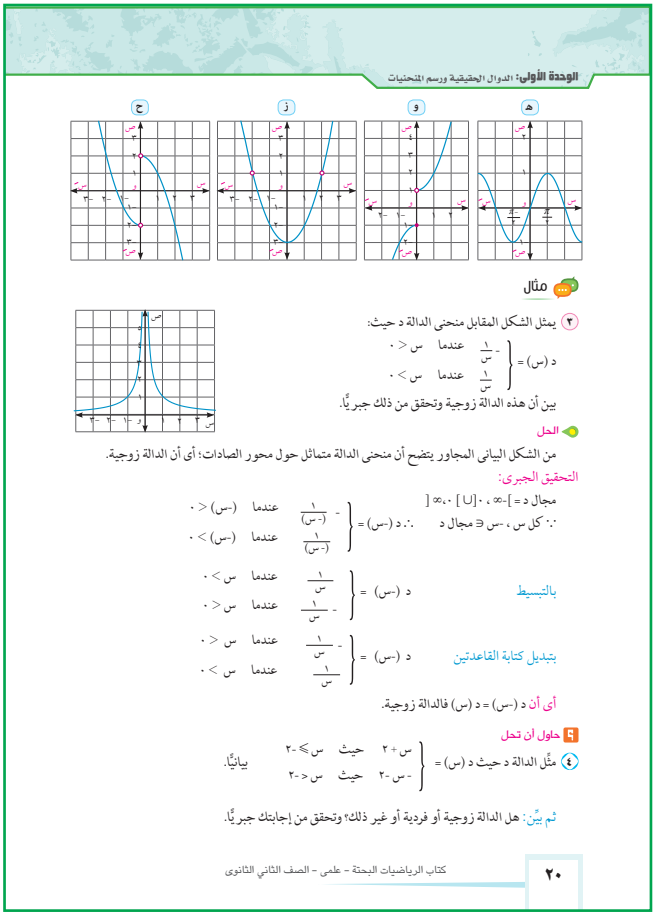
لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أي أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

حاول أن تحل

٢ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ ب ج د



الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

هـ و ز ح

مثال

٢ يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

د (س) = $\begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبريًا.

الحل

من الشكل البياني المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية.

التحقيق الجبري:

مجال د =]-∞، ٠[∪]٠، ∞[

∵ كل س ، -س ∈ مجال د ∴ د (-س) = $\begin{cases} -\frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) > ٠ \\ \frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) < ٠ \end{cases}$

بالتبسيط د (-س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ -\frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

بتبديل كتابة القاعدتين د (-س) = $\begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

أي أن د (-س) = د (س) فالدالة زوجية.

حاول أن تحل

٤ مثّل الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{حيث } س \leq -٢ \\ -س - ٢ & \text{حيث } س > -٢ \end{cases}$ بيانيًا.

ثم بيّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبريًا.

مثال (٢): ص ١٨

يبين هذا المثال أنه لإثبات إذا ما كانت الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك نستخدم إحدى الطريقتين:

- التمثيل البياني لمنحنى الدالة (هندسيًا).
- تحقيق الشرط الجبرى وذلك بمقارنة د(-س)، د(س) لكل (-س)، س تنتمى إلى مجال الدالة (جبريًا).

لإثبات أن الدالة ليست زوجية أو فردية نتبع نفس الخطوات لجميع المسائل المشابهة كما ورد في حل الفقرة (جـ).

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

٢ إجابة حاول أن تحل ص (١٩)

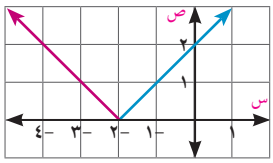
الدوال الزوجية أ ، د، ز

الدول الفردية: جـ ، هـ ، ح

دوال ليست زوجية وليست فردية: ب ، و

٣ حاول أن تحل صـ(٢٠)

منحنى الدالة كما بالرسم ومدى الدالة هو [٠، ∞[



منحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات؛ فالدالة ليست زوجية، وليس متماثلًا حول نقطة الأصل؛ فالدالة ليست فردية، ويمكن التحقق من ذلك جبريًا كالآتي:

باستبدال المتغير (-س) بالمتغير (س)

د(س) = $\begin{cases} -س + ٢ & \text{عندما } (-س) \leq -٢ \\ -(-س) - ٢ & \text{عنما } (-س) > -٢ \end{cases}$

د(-س) = $\begin{cases} -س + ٢ & \text{عندما } س \geq ٢ \\ س - ٢ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$

وبتبديل كتابة القاعدتين:

د(-س) = $\begin{cases} س - ٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ -س + ٢ & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$

لذلك فإن د(-س) = د(س)

فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ حاول أن تحل صـ ٢٠

PDF Compressor Pro

إرشادات للدراسة: الدالة الأحادية

- لاحظ أن اختبار الخط الأفقى للدوال الأحادية يستخدم لمنحنيات الدوال المرسومة مع ملاحظة أن أى خط أفقى يقطع منحنياتها فى نقطة واحدة.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

٥ حاول أن تحل ص (٢١): الإجابة: جـ ، و

٦ حاول أن تحل صـ(٢١)

أ ∵ د(س) = ٢س - ٣

وبالتعويض عن قيمتى أ، ب فى د

∴ د(أ) = ٢أ - ٣، د(ب) = ٢ب - ٣

وبوضع د(أ) = د(ب) فإن:

٢أ - ٣ = ٢ب - ٣ وبحذف (-٣)

٢أ = ٢ب أى أن أ = ب **لذلك فإن د دالة أحادية**

ب بوضع د(أ) = د(ب) ∴ $\frac{٣أ - ٥}{٤أ + ٣} = \frac{٣ب - ٥}{٤ب + ٣}$

ومنها: أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية

٧ بوضع: د(أ) = د(ب)

أ أ² - ١ = ب² - ١ ومنها أ = ± ب **أى أن** أ ≠ ب

ب أ² - ٥أ + ٦ = ب² - ٥ب + ٦

أ² - ب² = ٥أ - ٥ب

(أ - ب) (أ + ب) = ٥ (أ - ب)

∴ أ = ب = ٥ **أى أن** أ ≠ ب

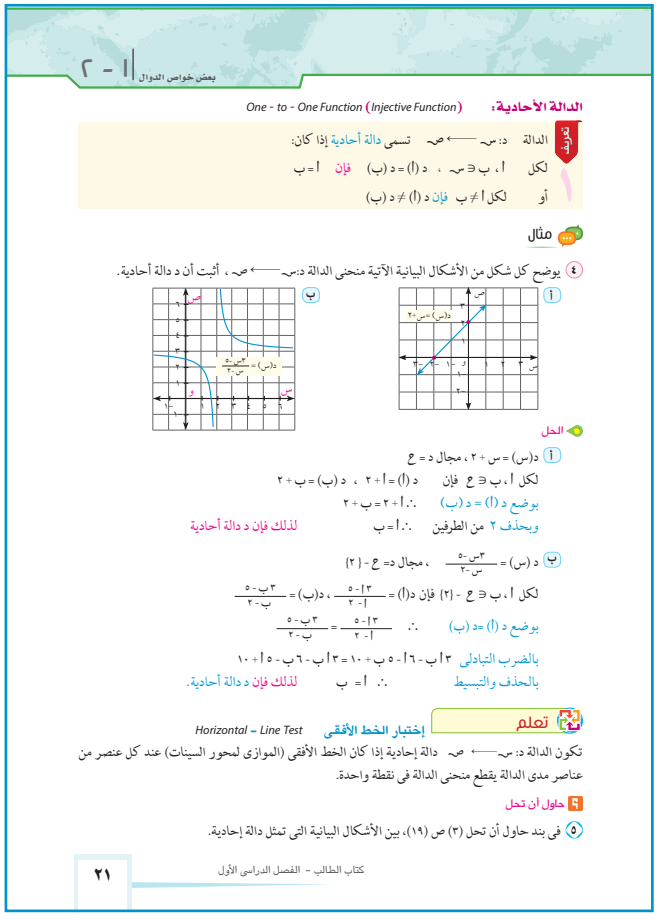
في بند تفكير ناقد ص (٢٢)

يبدأ المعلم مع طلابه بعرض السؤال التالى:

- إذا كانت د زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟
- يستقبل المعلم إجابات الطلاب ويدونها على السبورة.
- يناقش كل إجابة مع الطلاب فى تفسير: ما هو صحيح وما هو خطأ.
- توصل مع طلابك حول الإجابة الصحيحة من خلال عرض شروط الدالة الزوجية.
- لايمكن أن تكون الدالة الزوجية دالة أحادية لأن الخط الأفقى يقطع منحنى هذه الدالة في نقطتين، وهذا مايتعارض مع الدالة الأحادية ، أما فى الدالة الفردية فبعضها قد يعطى دالة أحادية والبعض الآخر قد لايكون دالة أحادية.

تمارين اثرائية

١ ابحث عن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:



بعض خواص الدوال ١ - ٢

الدالة الأحادية: One - to - One Function (Injective Function)

تعريف: الدالة د: هـ ⟵ صـ تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل أ، ب ∈ هـ ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)

مثال

٤ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د: هـ ⟵ صـ ، أثبت أن د دالة أحادية.

أ ب

الحل

أ د(س) = س + ٢ ، مجال د = ع

لكل أ، ب ∈ ع فإن د(أ) = أ + ٢ ، د(ب) = ب + ٢

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ أ + ٢ = ب + ٢

وبحذف ٢ من الطرفين ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية

ب د(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ، مجال د = ع - {٢}

لكل أ، ب ∈ ع - {٢} فإن د(أ) = $\frac{٣أ - ٥}{أ - ٢}$ ، د(ب) = $\frac{٣ب - ٥}{ب - ٢}$

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ $\frac{٣أ - ٥}{أ - ٢} = \frac{٣ب - ٥}{ب - ٢}$

بالضرب التبادلى ٣أب - ٦أ - ٥ب + ١٠ = ٣أب - ٦ب - ٥أ + ١٠

بالحذف والتبسيط ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية.

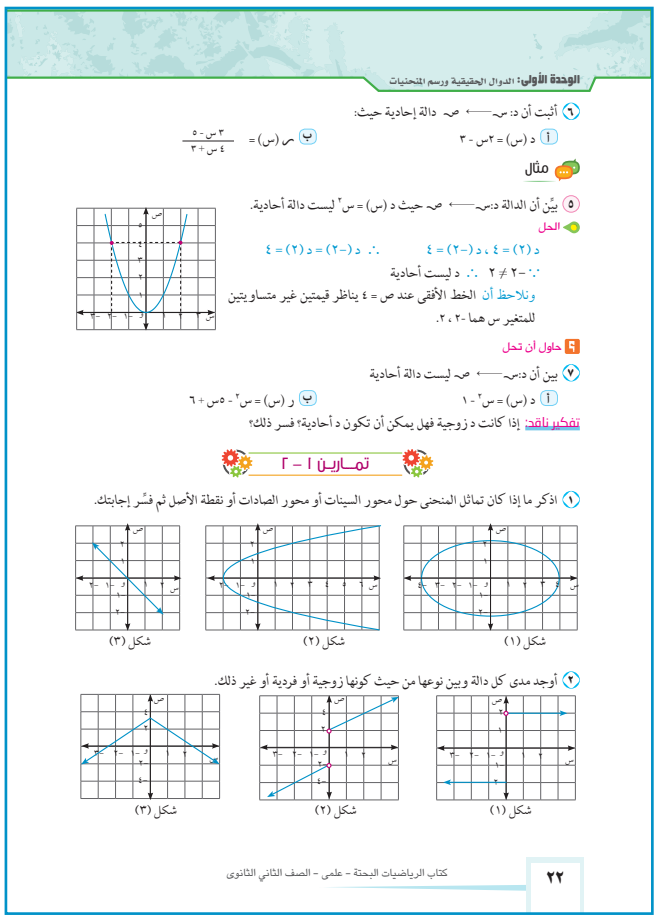
تعلم إختبار الخط الأفقى Horizontal – Line Test

تكون الدالة د: هـ ⟵ صـ دالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

حاول أن تحل

٥ فى بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التى تمثل دالة إحادية.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول ٢١



الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

٦ أثبت أن د: هـ ⟵ صـ دالة إحادية حيث:

أ د(س) = ٢س - ٣ ب ص(س) = $\frac{٣س - ٥}{٤س + ٣}$

مثال

٥ بيّن أن الدالة د: هـ ⟵ صـ حيث د(س) = س² ليست دالة أحادية.

الحل

د(٢) = ٤ ، د(-٢) = ٤ ∴ د(-٢) = د(٢) = ٤

∵ -٢ ≠ ٢ ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.

حاول أن تحل

٧ بين أن د: هـ ⟵ صـ ليست دالة أحادية

أ د(س) = س² - ١ ب ر(س) = س² - ٥س + ٦

تفكير ناقد: إذا كانت د زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟ فسر ذلك؟

تمـارين ١ - ٢

١ اذكر ما إذا كان تمثيل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسّر إجابتك.

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ٢٢

PDF Compressor Pro

أ د(س) = س^{٢} حيث د: ع$_{+}$ ← ع

ب د(س) = س^{٣} حيث د ∋]-٥، ٥[

ج د(س) = س^{٣} + ٢س

د د(س) = س^{٣} حتا س

هـ د(س) = $\frac{\text{حتا س} + ١}{\text{س}^{٢}}$، س ≠ ٠

٢ ارسم منحنى الدالة د حيث:

د(س) = { ٢س عندما س ⩽ ٠ ، -٢س عندما س > ٠ }

ومن الرسم استنتج مدى الدالة د وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

إجابة تمارين الدرس الثانى:

١ المنحنى متماثل حول محور سـ: (١) (٢)

المنحنى متماثل حول محور صـ: (١)

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل: (١)، (٣).

٢ **شكل (١):** {-٢، ٢} ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٢): ع- [-٢، ٢] فردية **شكل (٣):**]-∞، ٤] زوجية

شكل (٤): [٠، ٤] زوجية **شكل (٥):** ع - {٠} فردية

شكل (٦): ع ، فردية

٣ **دوال زوجية:** (أ)، (ز)، (ط) دوال فردية: (ب)، (جـ)، (و)

دوال غير ذلك: (د) ، (هـ) ، (ح)

٤ أ د فردية ، ج زوجية ، ب غير ذلك

٥ أ ، ج زوجية ، ب فردية ، د غير ذلك

٦ أ فردية ، المدى = {-٢، ٢}

ب زوجية ، المدى =]-∞ ، ٠]

ج غير ذلك ، المدى = ح

د زوجية ، المدى = [١ ، ∞[

٧ شكل (١): المدى = [٢ ، ∞[، ليست د أحادية

شكل (٢): المدى = [-٢، ٢] - {٠} ، ليست د أحادية

شكل (٣): المدى = [-٣، ٦] ، ليست د أحادية

شكل (٤): المدى = ح - {٠} ، دالة أحادية

٨ أ ، ب ، جـ دوال أحادية ، د ، هـ ليست دوال أحادية

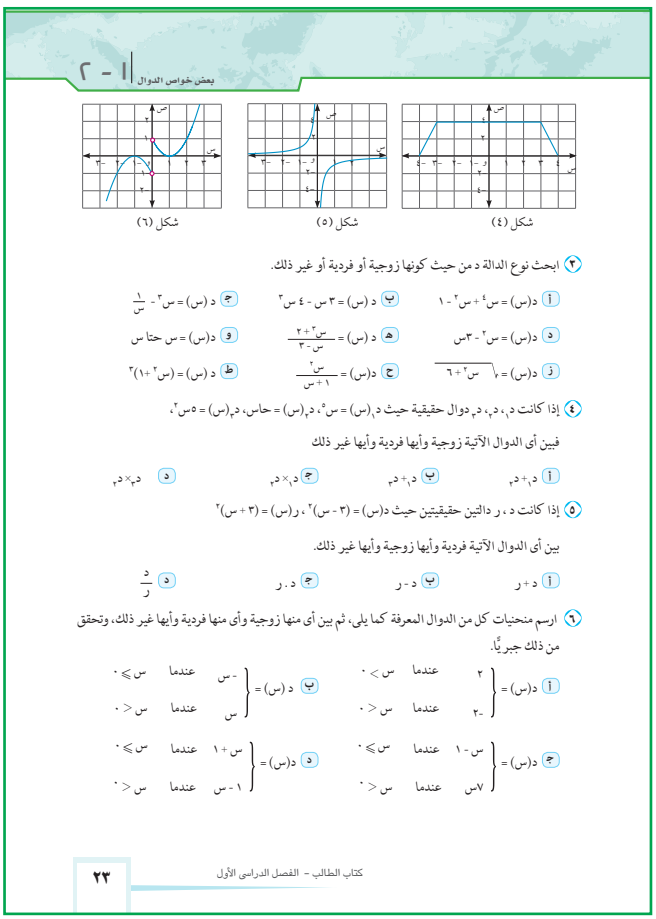
٩ **بفرض أن:** د(س) أجر سعيد ، س عدد المصابيح

أ د(س) = ٠,٣ س + ٨ × ٧

ب نعم أحادية لأنها دالة خطية

١٠ **تفكير إبداعى:**

- كلف طلابك بحل تمرين (١٠) ص٢٤
- تابع عمل طلابك داخل الفصل.
- قم بتوجيه الطلاب نحو الحلول المقترحة.
- ناقش مع طلابك الحلول التى توصلوا إليها.
- توصل معهم إلى الحل الصحيح.



شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦)

٢ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١ ب د(س) = ٣ س - ٤ س^{٣} ج د(س) = س$^{-٣}$ - $\frac{١}{\text{س}}$

د د(س) = س^{٣} - ٣س هـ د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}-٣}$ و د(س) = س حتا س

ز د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}+٦}$ ح د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}$ ط د(س) = (س^{٢} +١)^{٣}

٤ إذا كانت د$_{١}$، د$_{٢}$، د$_{٣}$ دوال حقيقية حيث د$_{١}$(س) = س^{٥}، د$_{٢}$(س) = حاس، د$_{٣}$(س) = ٥س^{٢}،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

أ د$_{١}$+د$_{٣}$ ب د$_{١}$+د$_{٢}$ ج د$_{١}$×د$_{٣}$ د د$_{٣}$×د$_{٢}$

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)^{٢} ، ر(س) = (٣ + س)^{٢}

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

أ د + ر ب د - ر ج د . ر د $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$

٦ ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كما يلى، ثم بين أى منها زوجية وأى منها فردية وأيها غير ذلك، وتحقق من ذلك جبريًا.

أ د(س) = { ٢ عندما س < ٠ ، -٢ عندما س > ٠ }

ب د(س) = { -س عندما س ⩽ ٠ ، س عندما س > ٠ }

ج د(س) = { س - ١ عندما س ⩽ ٠ ، ٧س عندما س > ٠ }

د د(س) = { س + ١ عندما س ⩽ ٠ ، ١ - س عندما س > ٠ }

٧ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:

شكل (١) شكل (٢)

شكل (٣) شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٨ في كل من الدوال المعرفة كما يلي حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ د(س) = ٣ س + ١ ب د(س) = $\frac{٣\text{س}+١}{\text{س}-٢}$ ج د(س) = س^{٣} + ١

د د (س) = ٢س^{٣} - س - ٣ هـ د(س) = س^{٤} + ٢س^{٢} + ١

٩ **الربط بالصناعة:** يعمل سعيد في مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالاضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

أ اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

ب هل الدالة د أحادية؟ فسر إجابتك.

١٠ **تفكير ابداعى:** مثّل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ يمر بالنقط (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) و يمثل دالة زوجية.

ب يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (-٢ ، ١) ، (-٣ ، ٥) و يمثل دالة فردية.

PDF Compressor Pro

٣ - ١ اطراد الدوال
Monotonicty of Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب التماثل فى الدوال حول محور الصادرات وحول نقطة الأصل، كما درس الدوال الزوجية والدوال الفردية وكيفية تميزها بيانيًّا وجبريًّا، كما درس نوعًا خاصًّا من الدوال وهو الدوال الأحادية، وسوف يستكمل الطالب فى هذا الدرس بعض خواص الدوال من حيث الاطراد (التزايد - التناقص - الثبات) مع استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص هذه الدوال.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس، وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التى تكون فيها تناقصية والفترات التى تكون فيها ثابتة.
- يستخدم البرامج الرسومية مثل (Geo Gebra) فى رسم منحنى الدالة.

مفردات أساسية

- اطراد – دالة تزايدية – دالة تناقصية – دالة ثابتة.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية - ورق مربعات - أقلام رصاص - برامج رسومية للحاسوب (GeoGebra).

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

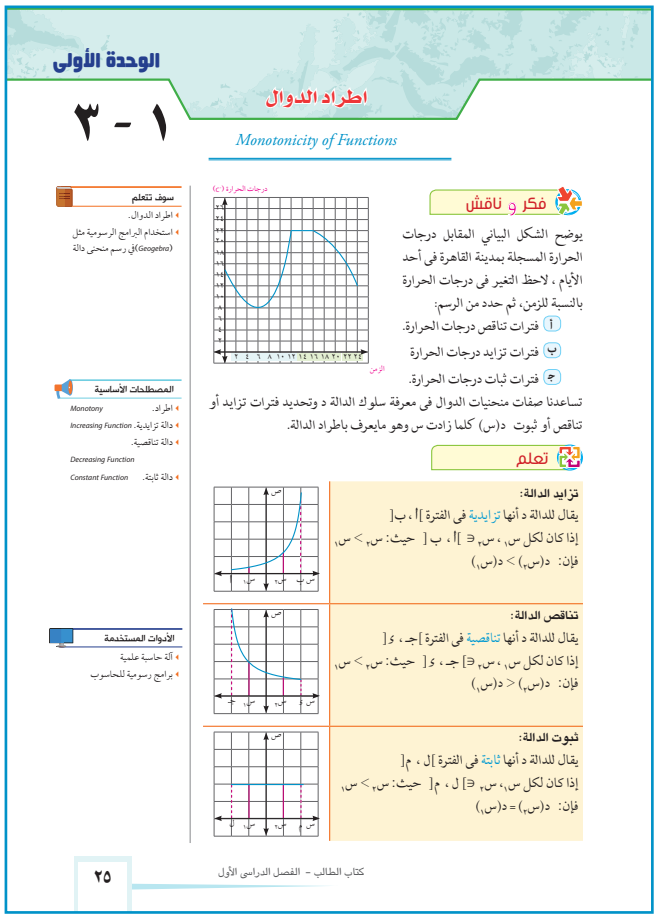
الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلى (الوسائط المتعددة).

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من صفحة (٢٥) إلى صفحة (٢٩) – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

وضح للطلابك أن المقصود بكلمة اطراد الدالة هو تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التى تكون


الوحدة الأولى

٣ - ١ اطراد الدوال

Monotonicity of Functions

سوف تتعلم
- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) فى رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية
- Monotony اطراد.
- Increasing Function دالة تزايدية.
- Decreasing Function دالة تناقصية.
- Constant Function دالة ثابتة.

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

يوضح الشكل البيانى المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة

ج فترات ثبات درجات الحرارة.

تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

تعلم

تزايد الدالة:
يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[
إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[حيث: س٢ > س١
فإن: د(س٢) > د(س١)

تناقص الدالة:
يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة]جـ ، ء[
إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]جـ ، ء[حيث: س٢ > س١
فإن: د(س٢) < د(س١)

ثبوت الدالة:
يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة]ل ، م[
إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]ل ، م[حيث: س٢ > س١
فإن: د(س٢) = د(س١)

٢٥ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة، وذلك من خلال رسم منحنى الدالة فقط دون التعرض للطرق الجبرية.

إجراءات الدرس

- يقوم المعلم بحل المثال فكر؛ وناقش؛ لبحث اطراد الدالة.
- اعرض على الطلاب الحالات المختلفة لسلوك الدالة ص ٢٥
- ومثال (١)، (٢) المرسوم يوضح تلك الفترات كما هو موضح فى الحل.

حل و فكر و ناقش:

أ]٠،٦[،]١٦،٢٤[ب]١٢،١٦[ج ض]١٢،١٦[

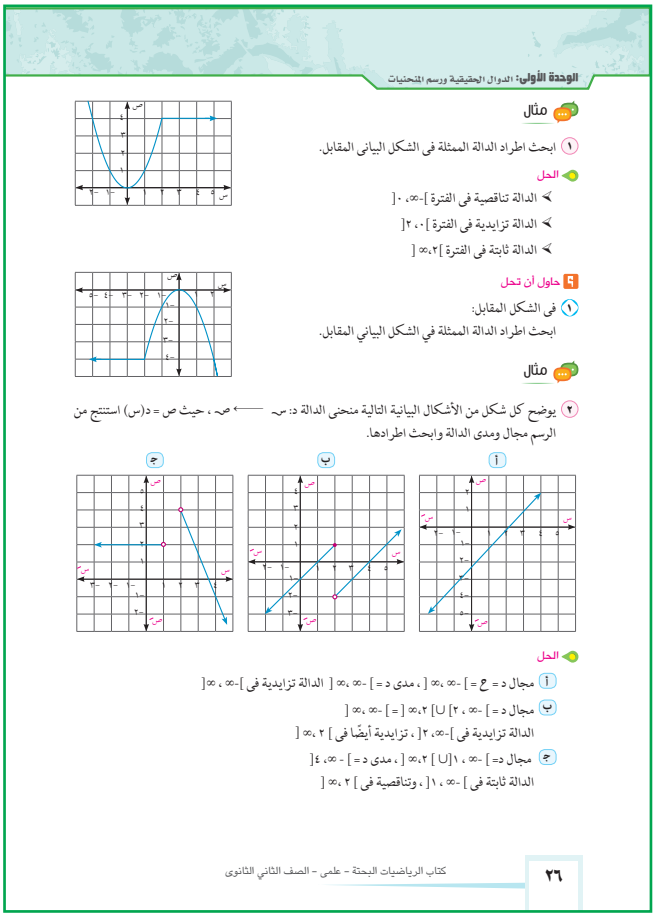
تمرين إثرائى:

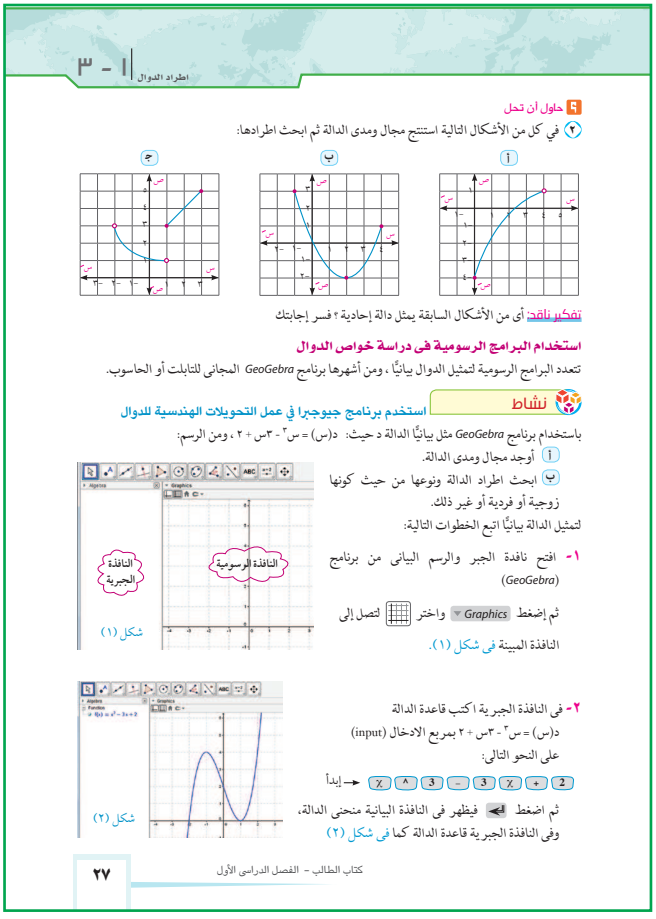
ابحث اطراد الدالة: د(س) = ٢ س + ٥ جبريًّا

الحل

بفرض أن س١ ، س٢ ∈ مجال الدالة وأن س٢ > س١
وبضرب طرفى المتباينة × ٢ تكون ٢س٢ > ٢س١
وباضافة (٥) الى طرف المتباينة ٢س٢ +٥ > ٢س١ +٥
د(س٢) > د(س١) تحقق التعريف لذلك فإن الدالة تزايدية
بالمثل يمكن إثبات تناقص الدوال جبريًّا، وهذا غير مقرر على الطالب، حيث يتم استنتاج اطراد الدوال من الرسم فقط.

PDF Compressor Pro





التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

ناقش مع طلابك بنود حاول أن تحل ص (٢٦) ، ص (٢٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابة حاول أن تحل (١) ص (٢٦)

الدالة ثابتة فى]-∞ ، -٢[

الدالة تزايدية فى]-٢، ٠[

الدالة تناقصية فى الفترة]٠، ∞[

اشر إلى طلابك بأن الفترات المأخوذة فى بحث تزايد وتناقص وثبوت الدوال كلها فترات مفتوحة.

إجابة حاول أن تحل (٢) ص (٢٧)

أ المجال = [٠، ٤] ، المدى = [-٤، ١]

والدالة تزايدية فى]٠، ٤[

ب المجال = [-١، ٤] ، المدى = [-٢، ٣]

الدالة تناقصية فى]-١، ٢[، تزايدية فى]٢، ٤[

ج المجال =]-٢، ٣[، المدى = [١، ٥]

الدالة تناقصية فى]-٢، ١[

تزايدية فى]١، ٣[

إجابة تفكير ناقد ص (٢٧)

الدوال فى شكل (أ) ، شكل (جـ) دوال أحادية، أكد على الطلاب أن الخط الأفقى يقطع منحنى كل دالة فى نقطة وحيدة.

استخدام التكنولوجيا:

يمكن تنزيل نسخة مجانية من برنامج (Geogebra) من الموقع http://www.geogebra.org

وهذا البرنامج يدعم اللغة العربية، ويخدم الرياضيات الديناميكية للمتعلم والتعلم ، ويمكن تنزيل نسخة مجانية من البرنامج لكل من أنظمة windows ، macintosh أو نظام android التابلت أو (الموبايل).

يمكنك تحميل دليل المساعدة لهذا البرنامج باللغة العربية من نفس الموقع، وبه شرح تفصيلى للبرنامج، وكيفية استخدامه لجميع أفرع الرياضيات حيث يحتوى على ثلاث نوافذ هى:

١ - نافذة الأكسيل. ٢ - النافذة الرسومية.

٣ - النافذة الجبرية.

الأخطاء الشائعة

- قد يخطأ بعض الطلاب عن إيجاد مدى الدالة فى حاول أن تحل: (٢) (جـ) بأن ٣ ∉ المدى ولكن ٣ فى الفترة الأخرى ∋ المدى ، لذا فإن المدى هو]-١، ٥]
- أكد على طلابك بأنه عند بحث الاطراد على فترات جزئية يجب أن تكون هذه الفترات مفتوحة.

PDF Compressor Pro

إجابة تمارين الدرس الثالث

شكل (١): المدى = ع - [-٢، ٢]
الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[،]٠، ∞[

شكل (٢): المدى = [٠، ∞[
الدالة تزايدية فى]-٢، ٠[،]٢، ∞[
الدالة تناقصية فى]٠، ∞[

شكل (٣): المدى =]-∞، ٠] الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[
الدالة تناقصية فى]٠، ∞[

شكل (٤): المدى = ع -]٠، ٣]
الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[،]٠، ∞[

(٢)

الشكل	المجال	المدي	الاطراد
أ	ع	]-∞، ٢]	]-∞، ٠[تناقصية،]٠، ∞[ثابتة
ب	ع	]-٤، ∞[	]-∞، ٠[تناقصية،]٠، ∞[تزايدية
جـ	]-∞، ٦]	]-∞، ٢]	]-∞، -٤[تزايدية ،]-٤، ٤[ثابتة،]٤، ٦] تناقصية
د	ع - {١}	ح - {٢}	]-∞، ١[تناقصية ،]١، ∞[تناقصية
هـ	ع - {١-}	]-٢، ∞[	]-∞، -١[تناقصية ،]-١، ∞[ثابتة
و	ع - {٢}	]٠، ∞[	]-∞، ٢[تزايدية ،]٢، ∞[تناقصية

(٣) أ المدى =]-∞، ١] ،]١، ٦] الدالة تناقصية فى]-∞، ١[، الدالة تزايدية فى]١، ٦]

ب الدالة ليست أحاديه لأن الخط الأفقى يقطع الدالة في أكثر من نقطة.

تفكير إبداعى:

يمكن للمعلم استخدام أمثلة من التمارين السابقة لدوال فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر، ويناقش الطلاب للوصول إلى الإجابة الصحيحة.

(٤) نعم لأن الخط الأفقى يقطع منحنى الدالة فى نقطة وحيدة

(٥) أ زوجية ، المدى = [-٥، ∞[

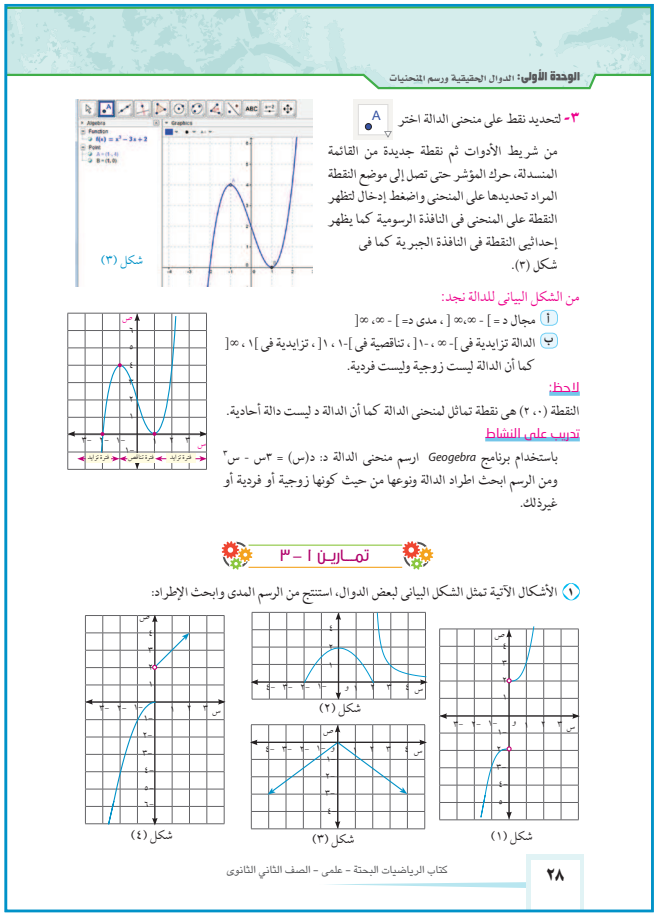
ب زوجية ، المدى =]-∞ ، ٤]

جـ غير ذلك ، المدى =]-∞، ١] ، [∞

د فردية ، المدى = ح

هـ فردية ، المدى = ح

و غير ذلك ، المدى = ح - {٢}



شكل (٣)

(٣)- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى فى النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيى النقطة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٣).

من الشكل البيانى للدالة نجد:

أ مجال د =]-∞، ∞[، مدى د =]-∞، ∞[

ب الدالة تزايدية فى]-∞ ، -١] ، [١ ، ∞[، تناقصية فى]-١ ، ١[، تزايدية فى]١ ، ∞[
كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

للحظ:

النقطة (٠ ، ٢) هى نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

تدريب على النشاط

باستخدام برنامج *Geogebra* ارسم منحنى الدالة: د(س) = ٣س - س^{٣}
ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك.

تمـارين ١ - ٣

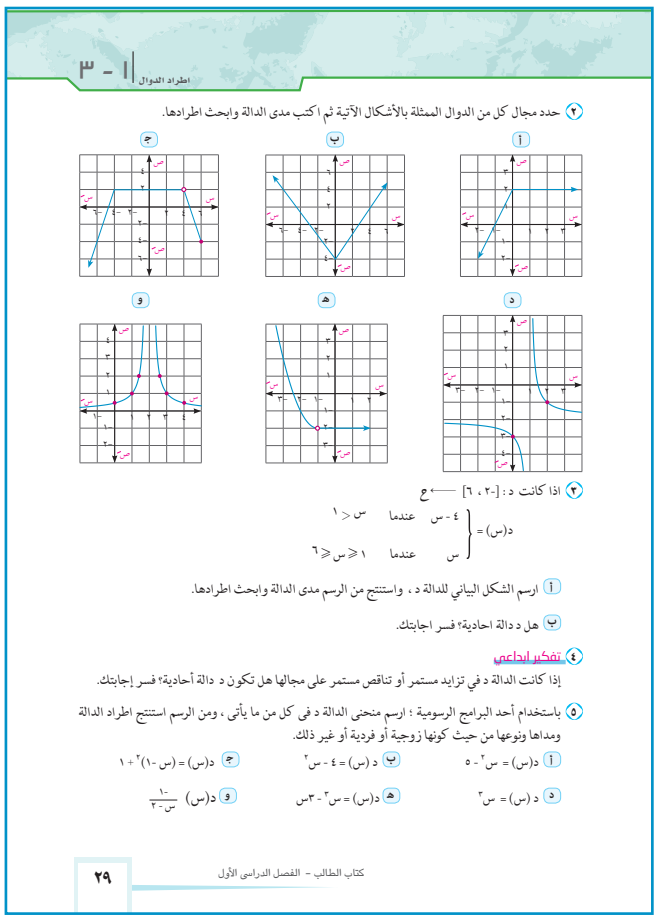
(١) الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:

شكل (٤)

شكل (٢)

شكل (٣)

شكل (١)



(٢) حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ

ب

جـ

د

هـ

و

(٣) اذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

$$د(س) = \begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } س > ١ \\ س & \text{عندما } ١ \geq س \geq ٦ \end{cases}$$

أ ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

(٤) تفكير ابداعى

إذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

(٥) باستخدام أحد البرامج الرسومية : ارسم منحنى الدالة د فى كل من ما يأتى ، ومن الرسم استنتج اطراد الدالة ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٣} - ٥ ب د(س) = ٤ - س^{٣} جـ د(س) = (س - ١)^{٣} + ١

د د(س) = س^{٣} هـ د(س) = س^{٣} - ٣س و د(س) = $\frac{١-}{س-٣}$

PDF Compressor Pro

١ - ٤ التمثيل البيانى للدوال
Graphs of Functions


الوحدة الأولى

١ - ٤ التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometriaal Transformations

سوف تتعلم
- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات
  - ص = د(س) + أ
  - ص = د(س + أ)
  - ص = د(س + أ) + ب
  - ص = – د(س)
  - ص = أ د(س)
  - ص = أ د(س +ب) + جـ
- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية
- تحويل. Transformation
- انتقال. Translation
- انعكاس. Reflection
- رأسى Vertical
- أفقى Horizontal
- خط تقارب Asymptutes

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

الدالة كثيرة الحدود Polynomial Functions

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:
د(س) = أ٠ + أ١ س + أ٢ س٢ + أ٣ س٣ +..... + أ ن س ن

حيث: أ٠ ، أ١ ، أ٢ ، ..... ، أ ن ∈ ع ، أ ن ≠ ٠ ، ن ∈ ط

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، ولذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

للحظ:
١- إذا كان د(س) = أ٠ ، أ٠ ≠ ٠ فإن د تسمى دالة كثيرة الحدود الثابتة.
٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالًا خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالًا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالًا تكعيبية.
٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.
٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.
٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود د، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

مثال
(١) إذا كان د ، ر كثيرتا حدود حيث د(س) = (أ س + ٥)٢ ،
ر(س) = ٩س٢ + ٣٠ س + جـ - ٤ ، وكان د(س) = ر(س) أوجد قيمتى أ ، جـ.

الحل.
د(س) = (أ س + ٥)٢ = أ٢ س٢ + ١٠ أ س + ٢٥
∵ د(س) = ر(س) ∴ معاملات قوى س المتناظرة متساوية
بمقارنة معامل س : ١٠أ = ٣٠ ∴ أ = ٣
بمقارنة الحد المطلق: جـ - ٤ = ٢٥ ∴ جـ = ٢٩

حاول أن تحل
(١) إذا كان د(س) = (أ + ٢ ب) س٢ - جـ س + ٤ ، ر(س) = ٧س٢ + ٥ س + (أ - ب)
أوجد قيم أ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س)

كتاب الرياضيات البحتة – علمى – الصف الثانى الثانوى ٣٠

خلفية

سبق أن درس الطالب الدالة، حيث تتحدد بثلاثة عناصر هي المجال والمجال المقابل وقاعدة الدالة. كما درس كذلك الدالة الزوجية والدالة الفردية ،كذلك بحث اطراد الدالة، وفى هذا الدرس سوف يدرس كيفية استخدام التحويلات الهندسية فى رسم الدوال.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف دوال كثيرة الحدود (الخطية – التربيعية – التكعيبية)
- يتعرف دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- يتعرف الدالة الكسرية.
- يستخدم التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم الدوال المختلفة.
- يجرى التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية كنشاط

مفردات أساسية

- تحويل – انعكاس– انتقال – رأسى – أفقى – خط تقارب.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض - شفافيات - آلة حاسبة بيانية - برنامج رسوم بيانية بالحاسوب - ورق مربعات.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى - حجرة الوسائط.

مصادر التعلم:

- كتاب الطالب من صـ ٣٠ إلى صـ ٤٧ – الشبكة الدولية للمعلومات – مكتبة المدرسة.

التهيئة

- اطلب إلى طلابك أن يكتب كل منهم دالة كثيرة حدود ويذكر درجتها، ثم اطلب منهم كتابة درجة كل دالة من هذه الدوال، ثم اطلب إليهم تعريف الدوال: الخطية ، التربيعية ، التكعيبية ، المقياس والكسرية.

إجراءات الدرس

- أكد إلى الطلاب على الشروط اللازم توافرها حتى تكون الدالة د كثيرة الحدود مع مراجعة الدوال الخطية والتربيعية التى درسها الطالب فى مرحلة سابقة.
- وضح إلى الطلاب بأن الدالة د(س) = ٠ ليست دالة ثابتة ولكنها تسمى بالدالة الصفرية.
- أكد إلى الطلاب الشروط اللازمة؛ لتساوى دوال كثيرة الحدود وأعط لهم أمثلة توضح ذلك.
- استخدم طريقة مقارنة المعاملات في إيجاد المجاهيل عند مقارنة دالتين لهما نفس الدرجة.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

- اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى فقرة: حاول أن تحل صـ٣٠ وتابع إجاباتهم.

الحل

(١) بوضع: (أ + ٢ ب) س^{٣} - جـ س + ٤ = ٧س^{٣} + ٥س + (أ - ب)

ومقارنة المعاملات نجد أن:

أ + ٢ ب = ٧ ، أ - ب = ٤ ، جـ = -٥

وبحل المعادلتين: ب = ١ ، أ = ٥

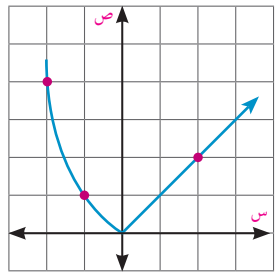
اطلب إلى طلابك حل ماورد فى فقرة حاول أن تحل ص (٣٢) وتابع إجاباتهم

الحل:

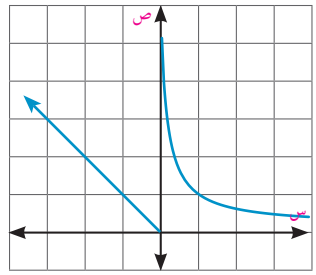
(٢) مدى الدالة هو $[0, \infty[$

الدالة تناقصية فى $]-\infty, 0[$

الدالة تزايدية فى $]0, \infty[$



(٣) مدى الدالة هو $[0, \infty[$



اطراد الدالة:

الدالة تناقصية فى $]-\infty, 0[$

الدالة تناقصية فى $]0, \infty[$

فى بند تعلم (ص٣١)

- كلف طلابك بالتحقق من بحث اطراد الدالة الدوال فى (١)، (٢)، (٣).
- تابع إجاباتهم.
- ناقش مع طلابك الإجابات المختلفة.
- قم بتصحيح المفاهيم الخطأ لديهم.
- تأكد من فهم طلابك لمفهوم اطراد الدالة.

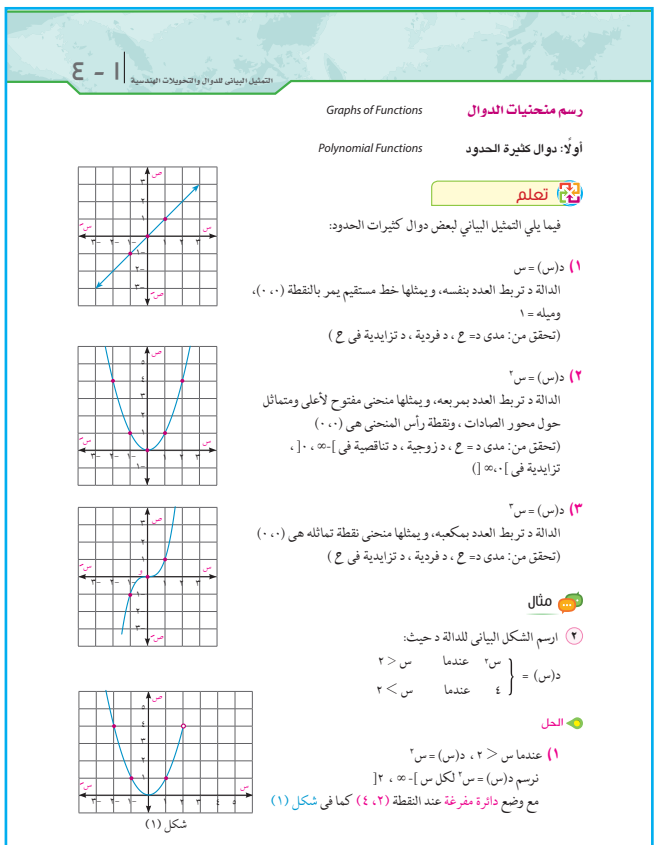
تمارين إثرائية:

ارسم الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ومن الرسم، أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها

(١) $د(س) = \begin{cases} س + ٣ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٤ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \\ س & \text{عندما } س \geq ٠ \end{cases}$

(٣) $د(س) = \begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$



رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

أولًا: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

تعلم

فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:

(١) د(س) = س

الدالة د تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠،٠)، وميله = ١

(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)

(٢) د(س) = س^{٢}

الدالة د تربط العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠،٠)

(تحقق من: مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى $]-\infty, 0[$ ، تزايدية فى $]0, \infty[$)

(٣) د(س) = س^{٣}

الدالة د تربط العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠،٠)

(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)

مثال

(٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س > ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$

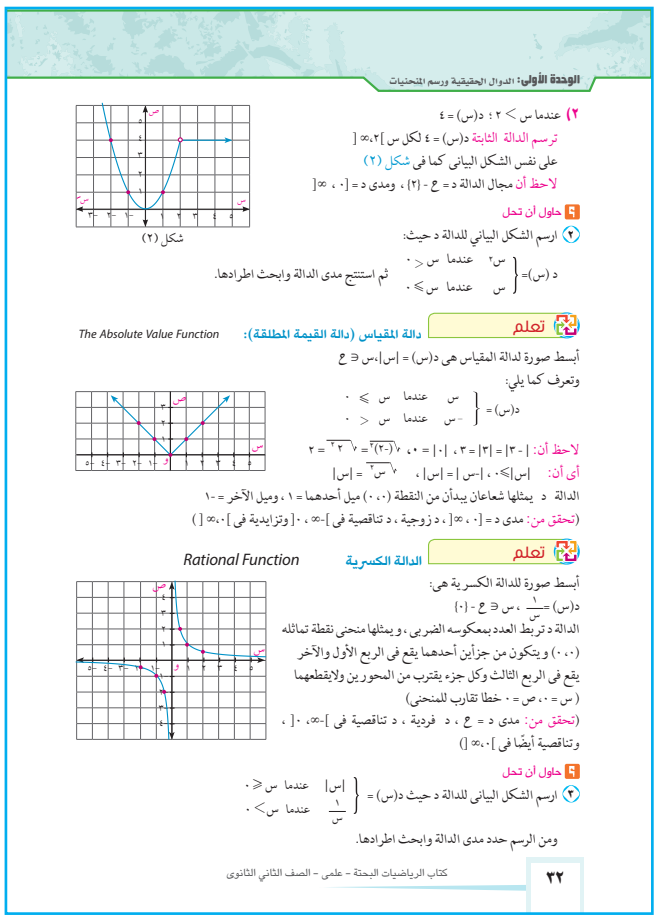
الحل

(١) عندما س > ٢ ، د(س) = س^{٢}

نرسم د(س) = س^{٢} لكل س $]-\infty, ٢[$

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما فى شكل (١)

شكل (١)



(٢) عندما س < ٢ ؛ د(س) = ٤

ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س $]-\infty, ٢[$

على نفس الشكل البياني كما فى شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة د = ع - {٢} ، ومدى د = $]0, \infty[$

شكل (٢)

حاول أن تحل

(٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \\ س & \text{عندما } س \leq ٠ \end{cases}$ ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

تعلم

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س| ،س ∈ ع

وتعرف كما يلي:

$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

لاحظ أن: |-٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠ ، $\sqrt{(-٢)^{٢}} = \sqrt{٢^{٢}} = ٢$

أى أن: |س| ≥ ٠ ، |-س| = |س| ، $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠،٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

(تحقق من: مدى د = $[0, \infty[$ ، د زوجية ، د تناقصية فى $]-\infty, 0[$ وتزايدية فى $]0, \infty[$)

تعلم

الدالة الكسرية *Rational Function*

أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ ع - {٠}

الدالة د تربط العدد بمعكوسه الضربى ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (٠،٠) ويتكون من جزأين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخر يقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى د = ع ، د فردية ، د تناقصية فى $]-\infty, 0[$ ، وتناقصية أيضًا فى $]0, \infty[$)

حاول أن تحل

(٣) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س \geq ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

PDF Compressor Pro

٤) د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س \geq ٠ \\ \frac{-١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

فى بند حاول أن تحل (ص ٣٢)

ناقش مع طلابك اطراد الدالة بعد رسمها بيانيًّا، وحدد معهم مدى الدالة.

مفهوم التحويلات الهندسية فى الرسوم البيانية:

أشر إلى الطلاب أنه يمكن أن نسحب (الإزاحة) الأشكال الهندسية أو نعكسها (نقلبها) أو ندورها للحصول على أشكال أخرى مناظرة لها باستخدام هذه التحويلات لذلك فإن **التحويل الهندسى هو:** عملية نقل الشكل الأصلى إلى شكل آخر جديد يسمى الصورة

وأهم أنواع هذه التحويلات هو:

- الإزاحة (الإنسحاب).
- الانعكاس .
- الدوران (أى تدوير أى شكل حول نقطة).
- أكد إلى الطلاب بأن هذه التحويلات الهندسية تحافظ على تطابق الصورة الناتجة مع الأصل أى أن التحويلات السابقة متساوية القياس.
- والجدول التالى يبين مفهوم الانعكاس والانتقال فى المستوى الإحداثى:

التحويل الهندسى	حول محور س	حول محور ص
الانعكاس	(أ، ب) ← (أ، -ب)	(أ، ب) ← (-أ، ب)
الانتقال	(أ، ب) ← (أ+جـ، ب)	(أ، ب) ← (أ، ب + د)

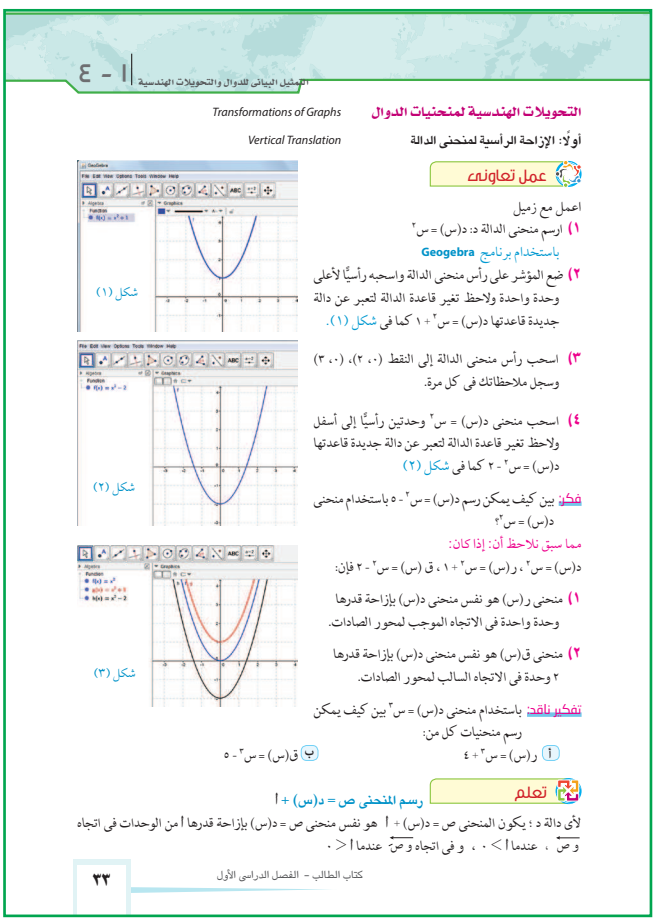
محاور نقاط التماثل:

الدالة / قاعدتها	التربيعية ص = س^{٢}	المقياس ص = |س|	التكعيبية د(س) = س^{٣}	الكسرية د(س) = $\frac{١}{س}$
محور التماثل	محور صـ أى س = ٠	محور صـ أى س = ٠		
نقطة التماثل			نقطة الأصل (٠،٠)	نقطة الأصل (٠،٠)

تفكير ناقد ص (٣٣)

أ) يتم نقل منحنى الدالة د بمقدار ٤ وحدات لأعلى .

ب) يتم نقل منحنى الدالة د بمقدار ٥ وحدات لأسفل.



التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية ٤ - ١

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

أولًا: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢}

باستخدام برنامج Geogebra

٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًّا لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} + ١ كما فى شكل (١).

شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.

شكل (٢)

٤) اسحب منحنى د(س) = س^{٢} وحدتين رأسيًّا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} - ٢ كما فى شكل (٢)

فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^{٢} - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^{٢}؟

شكل (٣)

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} + ١ ، ق (س) = س^{٢} - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = س^{٢} بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^{٢} + ٤ ب) ق(س) = س^{٢} - ٥

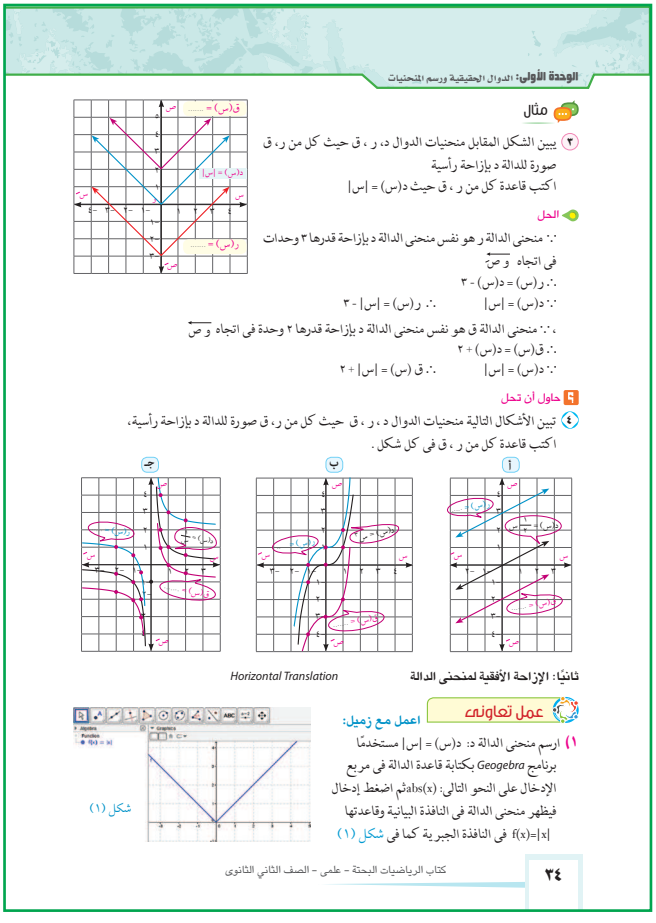
تعلم

رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ، عندما أ > ٠ ، و فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ عندما أ < ٠ .

٣٣

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول



الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

مثال

٣) يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر ، ق حيث د(س) = |س|

الحل

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$

∴ ق(س) = د(س) + ٢

∵ د(س) = |س| ∴ ق (س) = |س| + ٢

حاول أن تحل

٤) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ر ، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية، اكتب قاعدة كل من ر ، ق فى كل شكل.

ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

عمل تعاونى

اعمل مع زميل:

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا برنامج *Geogebra* بكتابة قاعدة الدالة فى مربع الإدخال على النحو التالى: f(x)=|x| ثم اضغط إدخال فيظهر منحنى الدالة فى النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x| فى النافذة الجبرية كما فى شكل (١)

شكل (١)

٣٤

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

PDF Compressor Pro

الأخطاء الشائعة:

- وضح إلى الطالب الفرق بين نقطة التماثل كزوج مرتب (للدوال التكعيبية ، الكسرية)، محور التماثل كمعادلة خط مستقيم (للدوال التربيعية) دوال المقياس.
- وضح كذلك الفرق بين محور الانعكاس ومحور التماثل.

حاول أن تحل: ص (٣٤)

أ) ر(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ، ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س - ٢

ب) ر(س) = س^{٣} + ١ ، ق(س) = س^{٣} - ١

جـ) ر(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ + ٢ ، ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ - ١

فكر ص(٣٥)

- رسم منحنى الدالة ر: اسحب منحنى الدالة د ٥ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور سـ.
- رسم منحنى الدالة ق: اسحب منحنى الدالة د فى الاتجاه السالب لمحور سـ.

حاول أن تحل ص (٣٦)

٥) أ) منحنى الدالة ر هو منحنى الدالة د بإزاحة ٤ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات.

ب) منحنى الدالة ع هو منحنى الدالة د بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦) أ) د(س) = |س + ٣|

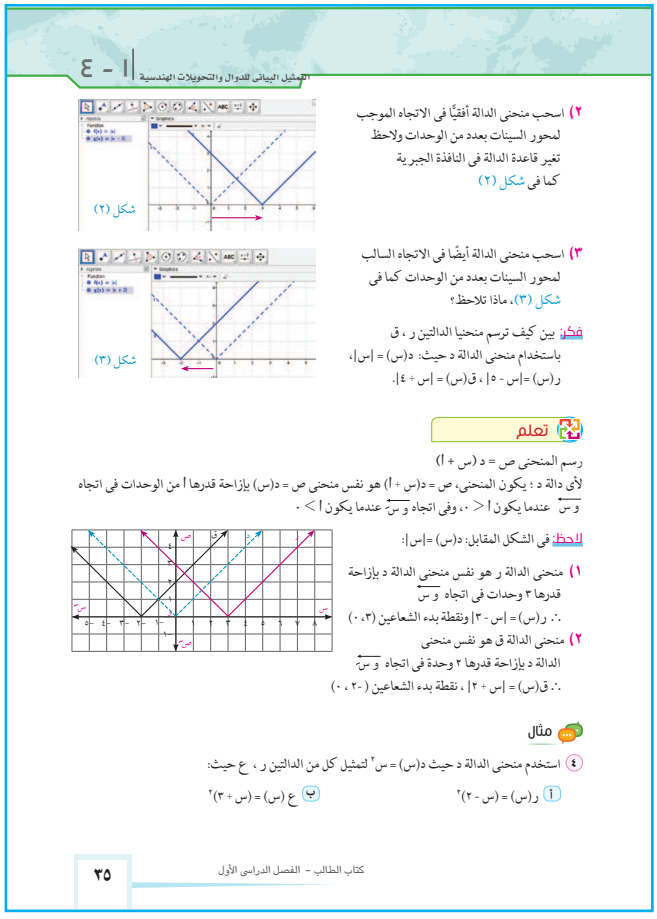
ب) د(س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ جـ - د(س) = (س - ٢)^{٣}

تفكير ناقد ص (٣٦)

قد يجد الطالب صعوبة فى رسم المنحنيات فيجب التأكد على إزاحة منحنى الدالة د ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور سـ، وحدتان موجبتان فى اتجاه محور صـ.
وهذا هو مفهوم الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية معًا.

الأخطاء الشائعة:

قد يخطأ بعض الطلاب عند الإزاحة الأفقية للدالة.
د(س) = |س +٣| بمقدار ٣ وحدات ولم يحدد هل فى اتجاه اليمين أو اليسار ، بين أنها تكون عكس إشارة الحد المطلق إما الإزاحة الرأسية تكون في نفس اشارة الحد المطلق.



٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٢)

شكل (٢)

٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا فى الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما فى شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟

شكل (٣)

فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) =|س - ٥| ، ق(س) = |س + ٤|.

تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + ا)
لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + ا) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها |ا| من الوحدات فى اتجاه وس عندما يكون ا < ٠ ، وفى اتجاه وس عندما يكون ا > ٠ .

للحظ: فى الشكل المقابل: د(س) =|س|:

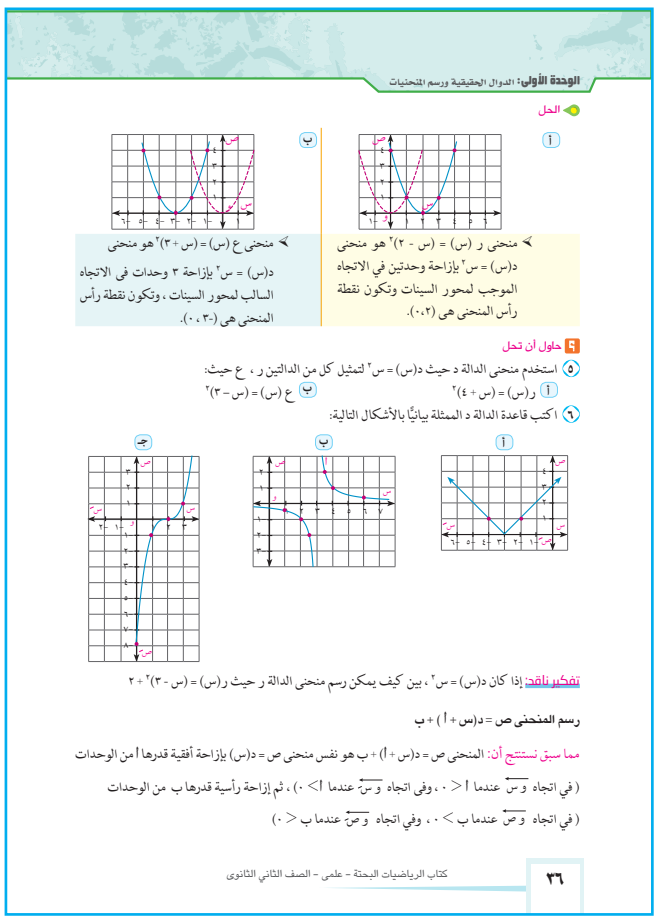
١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه وس
∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه وس
∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدء الشعاعين (-٢، ٠)

مثال

٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ) ر(س) = (س - ٢)^{٢} ب) ع (س) = (س + ٣)^{٢}



الحل

أ) منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٢،٠).

ب) منحنى ع (س) = (س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣، ٠).

حاول أن تحل

٥) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ) ر(س) = (س + ٤)^{٢} ب) ع (س) = (س - ٣)^{٢}

٦) اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية:

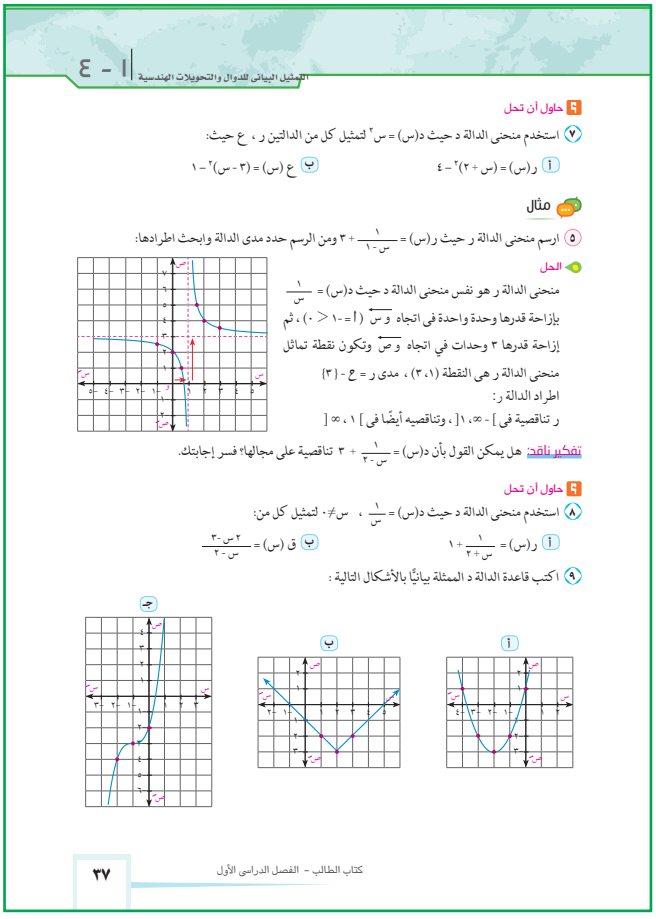
أ) ب) جـ)

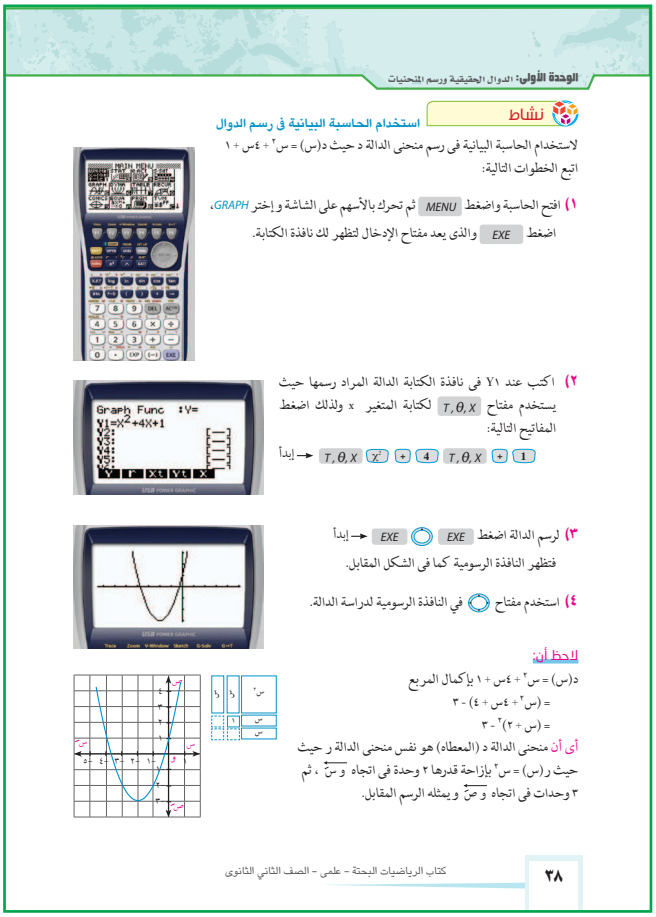
تفكير ناقد: إذا كان د(س) = س^{٢} ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = (س - ٣)^{٢} + ٢

رسم المنحنى ص = د(س + ا) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + ا) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |ا| من الوحدات (في اتجاه وس عندما ا < ٠ ، وفى اتجاه وس عندما ا > ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (في اتجاه وص عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه وص عندما ب < ٠)

PDF Compressor Pro





التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

ناقش مع طلابك البنود التالية (**حاول أن تحل - تفكير ناقد - تطبيق**) من ص (٣٧) إلى ص (٣٩) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

حاول أن تحل ص (٣٧)

٧ أ يتم إزاحة منحنى الدالة د بمقدار وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور س ، ٤ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.

ب لاحظ أن (٣ - س)٢ = (س - ٣)٢

يتم إزاحة منحنى الدالة د بمقدار ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور س، ووحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور ص.

الأخطاء الشائعة

تفكير ناقد ص (٣٧)

الإجابة: بالطبع (لا) ، لأن د(س) ⟵ - ∞ عندما س → ٢+ ،

د(س) ⟵ ∞ عندما س → ٢- .

والصواب هو: الدالة تناقصية فى الفترات] - ∞، ٢ [،] ٢، ∞ [أى أنه يجب تحديد كل فترة للدالة فى هذه الحالة ، ويرجى تنبيه الطلاب إلى هذا الخطأ الشائع.

حاول أن تحل ص (٣٧): ٩

أ ص = (س + ٢)٢ - ٣

ب ص = |س - ٢| - ٣

جـ ص = (س + ١)٣ - ٣

استخدام التكنولوجيا

الآلة الحاسبة الرسومية Casio Fx-98606 SD

وضح لطلابك أهمية هذه الآلة الحاسبة الرسومية التى تضم جميع الوظائف العلمية والإحصائية ورسم المخططات البيانية بكافة انواعه ومن ضمنها حل المعادلات الجبرية ونظرية ذات الحدين المتعددة الحدود Polynomial كما أنها قابلة للبرمجة، ويمكن حفظ النتائج المتحصل عليها باستخدام الذاكرة المنتقلة (SD) الموجودة بهذه الآلة ، كما يوجد روابط لتحميل هذه الآلة على الشبكة العنكبوتية يمكن استخدامها دون وجود الآلة الحاسبة (كأصدار تجريبي لمدة ٩٠ يومًا)

تطبيق ص (٣٩)

مجال الدالة = ح - {٢} ، المدى = ح - {٤}

الدالة تناقصية فى] - ∞، ٢ [،] ٢، ∞ [

PDF Compressor Pro

انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

اطلب إلى طلابك تأمل الأشكال الأربعة المرسومة فى ص (٣٩) ويدونوا ملاحظاتهم عليها.

نلاحظ أن هذه الأشكال هى الرسم البياني للدوال الآتية:

ص = س^{٢} ، ص = س^{٣} ، ص = |س|، ص = $\frac{١}{س}$ وقد تم انعكاسها على محور سـ لتصبح صورة كل دالة هى الدالة نفسها، ولكن بإشارة سالبة لذلك يمكن استنتاج أن:

- لأى دالة د ، يكون المنحنى ص = -د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

ناقش مع طلابك التمارين الواردة فى فقرة حاول أن تحل ص (٤٠) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة كتطبيق على مثال (٦)

الإجابات

أ منحنى الدالة ر هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢} فى محور س، ثم ازاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور السينات و إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات ومحور التماثل هو: س +١ = ٠

ب منحنى الدالة ر هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٣} فى محور سـ ، ثم ازاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات ونقطة التماثل هى النقطة (٣، ٠).

ج منحنى الدالة ر هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = |س| فى محور السينات ، ثم ازاحة أفقية قدرها ٥ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات و إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

تمارين إثرائية

فى كل مماياتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ ر(س) = ٢ - |س +٤|

ب ر(س) = ١ - (س + ٣)^{٢}

ج ر(س) = -٣ - (س -٢)^{٣}

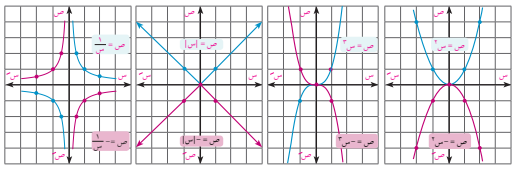
د ر(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ - ٢

ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها.

تطبيق: باستخدام الحاسبة الرسومية ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

ثالثًا: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

تعلم

رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

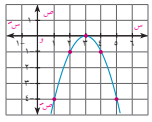
٦ باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

أ ر(س) = -(س - ٣)^{٢} ب ق (س) = ٤ - |س+٣|

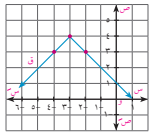
ج ع (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ - ٢

الحل

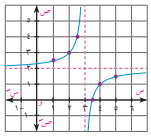
أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = س^{٢} فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب منحنى ق(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



ج منحنى ع(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = $\frac{١}{س}$



فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣،٢)

حاول أن تحل

١٠ فى كل مماياتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ ر(س) = ٣ - (س +١)^{٢} ب ر(س) = - (س - ٣)^{٢}

ج ر(س) = ٣- |س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

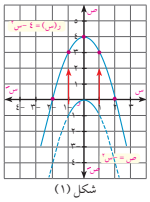
مثال استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

٧ مستخدمًا التحويل المناسب ، ارسم منحنيى الدالتين ر ، ق حيث ر(س) = ٤ - س^{٢} ، ق(س) = |٤ - س^{٢}|

الحل

أولًا: رسم منحنى الدالة ر

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} بانعكاس فى محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ ويوضحه شكل (١)



شكل (١)

ثانيًا: رسم منحنى الدالة ق

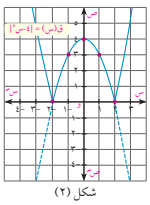
∵ ق (س) = |٤ - س^{٢}| ∴ ق (س) = |ر(س)|

فيكون الإحدائى الصادى لجميع نقط منحنى الدالة ق موجبًا حيث:

ص = |ر(س)|

∴ ص = { ر(س) عندما ر(س) ≥ ٠ ، -ر(س) عندما ر(س) < ٠

أى أن منحنى الدالة ق يقع فى الربعين الأول والثانى فقط وهذا يعنى إنعكاسًا لمنحنى الدالة ر لكل ر(س) < ٠ فى محور السينات كما فى شكل (٢).



شكل (٢)

PDF Compressor Pro

التمدد:

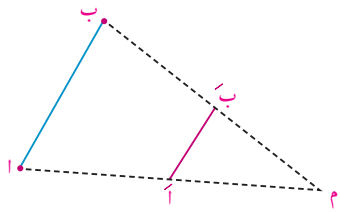
أشر إلى الطلاب بأن التحويلات الهندسية السابقة (الانعكاس، الانتقال، الدوران) تكون فيها الصورة مطابقة تمامًا للأصل، والتمدد نوع آخر من التحويلات حيث يحدث تغير فى شكل منحنى الدالة من حيث التكبير أو التصغير.

ففي منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، إذا كتبت كالآتى:

ص = أ د (س) حيث أ > ٠ فإن:

- التمدد تكبير للإحداثي الصادى إذا كان أ > ١
- التمدد تصغير للإحداثي الصادى إذا كان أ < ١
- التمدد مطابق إذا كان أ = ١

معلومات إثرائية:



في الشكل المقابل:

إذا كان التمدد الذى مركزه م ومعامله ر ينقل ا إلى اَ ، ب إلى ب فإن:

اَ بَ = |ر| ا ب

ويمكن ربط مفهوم التمدد بمقياس الرسم، حيث معامل التمدد هو مقياس الرسم، التكبير والتصغير فى الصورة في الحقيقة الصورة فى الرسم.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

ناقش مع طلابك التمارين الواردة فى بند حاول أن تحل، وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

الإجابات:

حاول أن تحل ص (٤١)

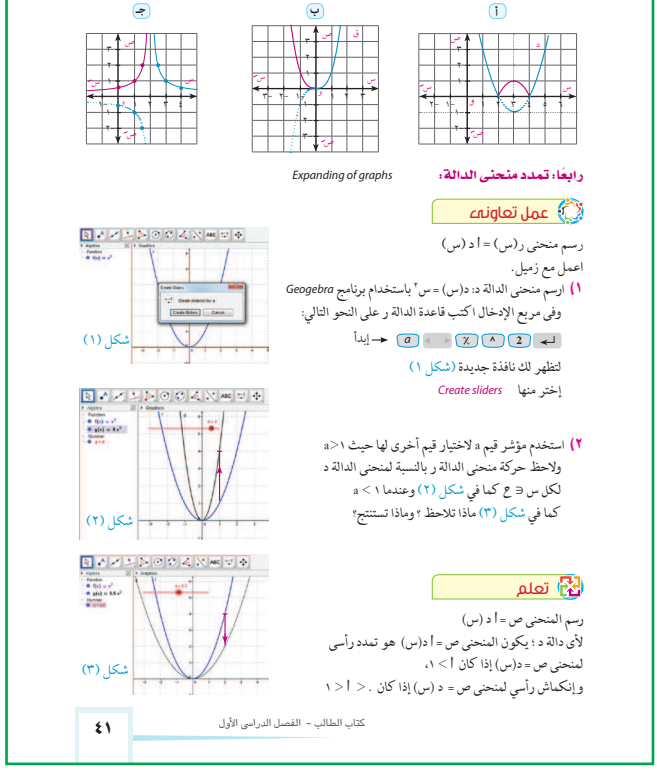
(١١) أ د(س) = |١ - (س-٣)٢|

ب ق (س) = |س|٣

جـ ر(س) = $\left|\frac{١}{س-٢}\right|$

(١٢) أ المدى =] -∞ ، ٠] ، الدالة تزايدية فى] -∞ ، ٠ [وتناقصيه فى] ٠، ∞ [

ب المدى =] - ∞، ٢] ، الدالة تزايدية فى] -∞، ٥ [وتناقصية فى] ٥، ∞ [.



حاول أن تحل

(١١) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:

أ ب جـ

رابعًا: تمدد منحنى الدالة:

Expanding of graphs

عمل تعاونى

رسم منحنى ر(س) = أ د (س)

اعمل مع زميل.

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س٢ باستخدام برنامج Geogebra

وفى مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

a ( ) ٨ ٢ ← إبدأ

لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

إختر منها Create sliders

شكل (١)

٢) استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث a>١

ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د

لكل س ∈ ع كما في شكل (٢) وعندما ١ < a

كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

شكل (٢)

شكل (٣)

تعلم

رسم المنحنى ص = أ د (س)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمدد رأسى لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١،

وإنكماش رأسي لمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١

رسم منحنى الدالة ر: ر(س) = أ د (س + ب) + جـ

مثال

استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = ٢ |س|

ب ع(س) = ٢|س - ٧| + ٢

الحل

أ منحنى ر(س) هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د

معاملة | = ٢ > ٠ وعلي ذلك فإن:

لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س، ٢ ص) ∈ بيان ر

ب منحنى ع(س) هو نفس منحنى ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ،

وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{وص}$

حاول أن تحل

(١٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س٢ لتمثيل الدالتين ر ، ع :

أ ر(س) = - $\frac{١}{٢}$س٢

ب ع(س) = $\frac{١}{٢}$ - ٢ (س - ٥)٢

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.

نشاط

تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب)

Trigonometric functions

أولًا: الإزاحة في اتجاه محور السينات

First: Translation on X – axis

١) استخدم برنامج جيوجبرا (GeoGebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدريج (π).

٢) فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: sin (x) ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ٠ منقط، شرطى، متصل ....).

٣) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: sin (x + (π/3)) أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (enter) ولون هذا المنحنى بلون آخر.

PDF Compressor Pro

نشاط (آليات تنفيذ النشاط)

- اطلب الى طلابك قراءة الخطوات الموضحة صـ ٤٢،٤٣ في كتاب الطالب لتدريبهم على كيفية تطبيق التحويلات الهندسية التى سبق دراستها في الدوال الجبرية على كل من دوال الجيب و جيب التمام
- وضح للطلاب الجزء الأول من النشاط الخاص بالإزاحة فى اتجاه محور السينات باستخدام برنامج geogebra ثم انتقل بهم إلى تنفيذ الخطوات الخاصة بالإزاحة في اتجاه محور الصادات فى الجزء الثاني

سلم تقييم النشاط:

التقدير	أداء الطالب
ممتاز	يستخدم برنامج geogebra بدقة تامة لرسم الأشكال البيانية لمنحنى دالة الجيب، ويحدد الإزاحتين س، ص بكل دقة.
جيد جدًا	يستخدم نفس البرنامج ويرسم بدقة دالة الجيب ويخطأ خطأ بسيطًا في تحديد الإزاحتين س ، ص
جيد	يستخدم نفس البرنامج ويرسم منحنى دالة الجيب، لكنه يخطأ فى تحديد الإزاحتين السينية والصادية، ويحتاج إلى مساعدة بسيطة.
مقبول	يرسم منحنى دالة الجيب فقط، ولكنه لايستطيع رسم منحنيات الإزاحة السينية والصادية، ويحتاج إلى مساعدة.
ضعيف	لايمكنه استخدام البرنامج فى رسم المنحنيات، ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه.

تفكير ناقد:

يهدف إلى تدريب الطالب على استنتاج قاعدة الدالة من خلال الشكل البياني لها وتحديد مداها وبحث اطرادها.

أ) د(س) = حا س - ١ ، المدى = [-٢، ٠]

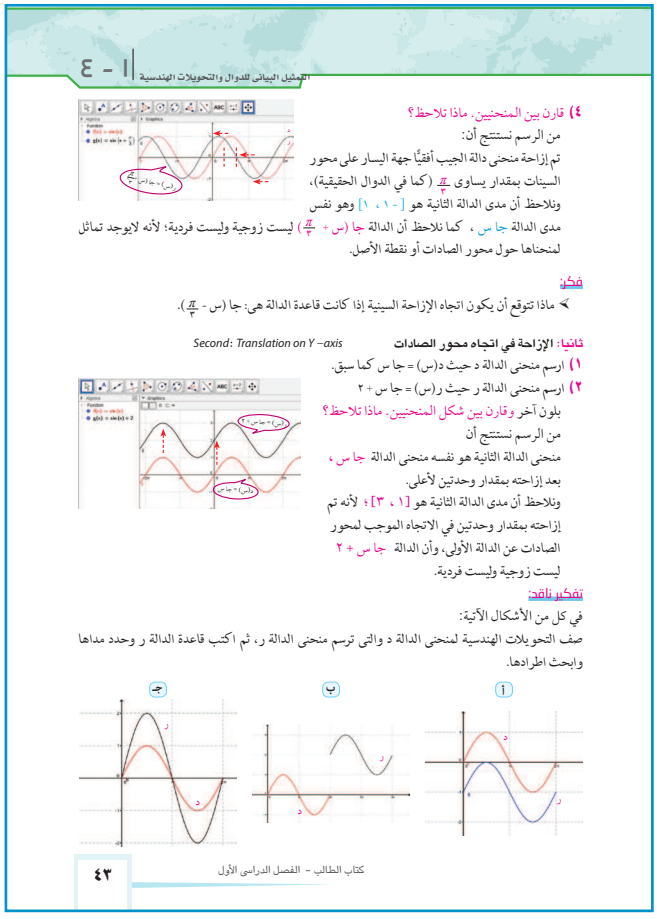
الدالة تزايدية في]٠، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{\pi٣}{٢}$ ، ٢π[،

تناقصية في]$\frac{\pi}{٢}$، $\frac{\pi٣}{٢}$[

ب) د(س) = حا (س - $\frac{\pi}{٢}$) + ٢ ، المدى = [١ ، ٣]

الدالة تزايدية في]٢π، $\frac{\pi٥}{٢}$[،]$\frac{\pi٧}{٢}$، ٤π[

تناقصية في]$\frac{\pi٥}{٢}$، $\frac{\pi٧}{٢}$[



جـ) د(س) = ٢ حا س ، المدى =] -٢ ، ٢[

الدالة تزايدية فى]٠، $\frac{\pi}{٢}$[،]$\frac{\pi٣}{٢}$ ، ٢π[

الدالة تناقصية فى]$\frac{\pi}{٢}$، $\frac{\pi٣}{٢}$[

PDF Compressor Pro

إجابات تمارين الدرس الرابع

(١) أ د(س) = ر(س) وبمقارنة المعادلات

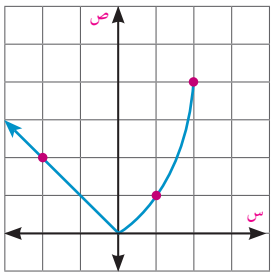
أ + ب = ٥ ، أ + جـ = ٣ ، ب = -٢

أ - ٢ = ٥ ومنها أ = ٧،

٧ + جـ = ٣ ومنها جـ = -٤

(٢)

أ

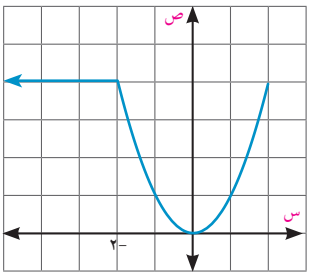


المدى =] ٠ ، ∞ [

د تناقصية فى] -∞ ، ٠ [

د تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

ب

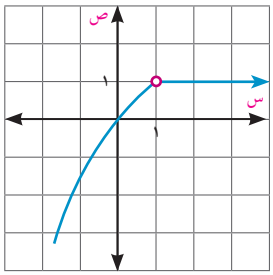


المدى =] ٠ ، ∞ [

د ثابتة فى] -∞ ، -٢ [

د تناقصية فى] -٢ ، ٠ [

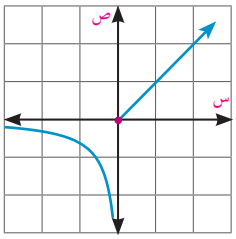
د تزايدية فى] ٠ ، ∞ [



المدى =] -∞ ، ١ [

د تزايدية فى] -∞ ، ١ [

د ثابتة فى] ١ ، ∞ [



المدى =] -∞ ، ٠ [

د تناقصية فى] -∞ ، ٠ [

د تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

(٣) جـ (٤) ب (٥) أ (٦) جـ

(٧) قاعدة ر هى: ر (س) = س^{٢} - ٢

قاعدة ق هى: ق (س) = (س + ٤)^{٢}

قاعدة ع هى : ع (س) = (س + ٤)^{٢}

(٨) ر(س) = (س - ٣)^{٣} ، ق (س) = س^{٣} - ٤،

ع (س) = (س + ٤) ^{٢} - ١

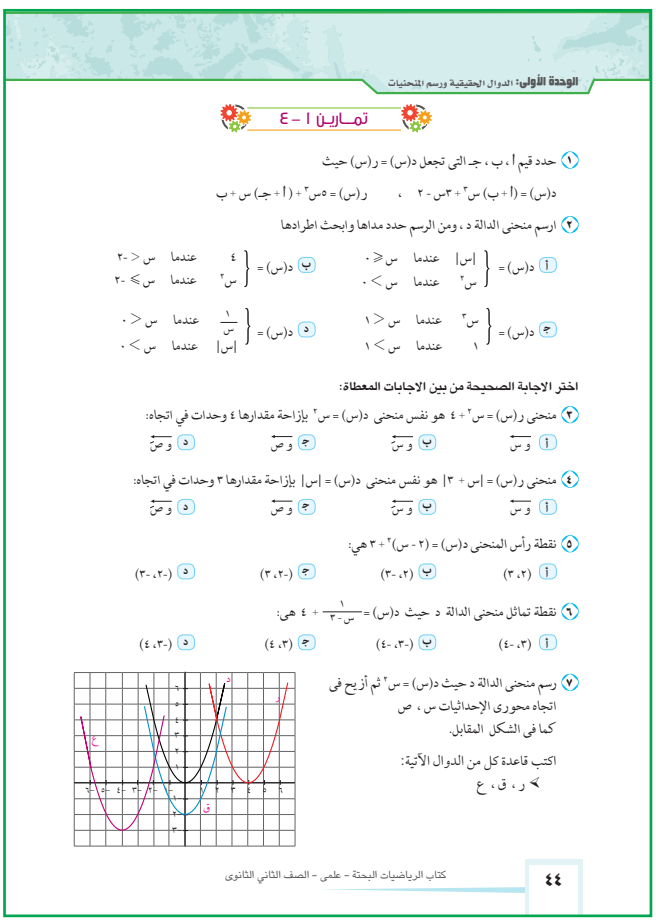
(٩) ر(س) = |س - ٣| ، ق (س) = |س| - ٢

ع (س) = |س + ٣| + ٢

(١٠) أ د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ ب د(س) = $\frac{١}{س}$ - ٣

جـ د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ د د(س) = $\frac{١}{س + ٢}$

هـ د(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ - ٢ هـ د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣



الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

تمـارين ١ - ٤

(١) حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س) حيث

د(س) = (أ + ب) س^{٣} + ٣س - ٢ ، ر(س) = ٥س^{٣} + (أ + جـ) س + ب

(٢) ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ د(س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، س^{٢} عندما س < ٠ }

ب د(س) = { ٤ عندما س > -٢ ، س^{٢} عندما س ≤ -٢ }

جـ د(س) = { س^{٣} عندما س < ١ ، ١ عندما س ≥ ١ }

د د(س) = { $\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ ، |س| عندما س > ٠ }

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

(٣) منحنى ر(س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

أ $\overleftarrow{وس}$ ب $\overrightarrow{وس}$ جـ $\overleftarrow{وص}$ د $\overrightarrow{وص}$

(٤) منحنى ر(س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

أ $\overleftarrow{وس}$ ب $\overrightarrow{وس}$ جـ $\overleftarrow{وص}$ د $\overrightarrow{وص}$

(٥) نقطة رأس المنحنى د(س) = (٢ - س)^{٢} + ٣ هي:

أ (٣ ، ٢) ب (٢ ، -٣) جـ (٣ ، -٢) د (-٣ ، -٢)

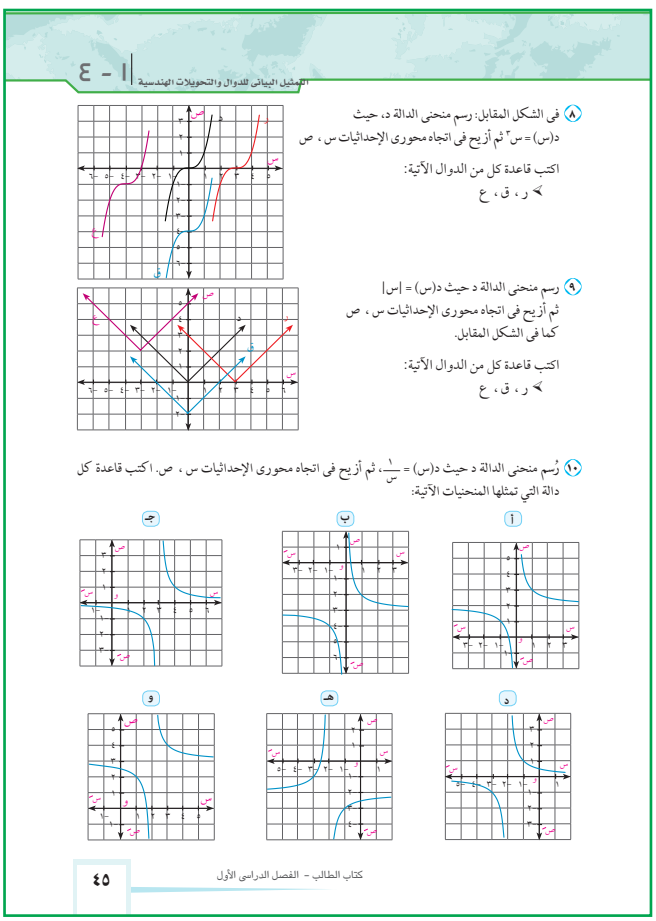
(٦) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي:

أ (-٤ ، ٣) ب (-٤ ، -٣) جـ (٤ ، ٣) د (-٤ ، -٣)

(٧) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

أ ر ، ق ، ع



التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية | ٤ - ١

(٨) فى الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = س^{٣} ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

أ ر ، ق ، ع

(٩) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

أ ر ، ق ، ع

(١٠) رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص. اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

PDF Compressor Pro

في التمارين من رقم (١١) إلى رقم (١٨)

تتطلب من الطالب المهارة فى رسم منحنيات هذه الدوال وذلك باستخدام مفهوم الإزاحة السينية أو الإزاحة الصادية أو الإزاحتين معًا، وذلك بتحديد نقطة رأس المنحنى لدالتى المقياس والتربيعية أو نقطة التماثل للدالة التكعيبية والدالة الكسرية، وبالتالى يسهل عليه إيجاد المدى و يبحث الاطراد و يعين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

و يمكن التحقق من رسم هذه الدوال باستخدام أحد البرامج الرسومية (*GeoGebrea*) أما فى الدوال المتعددة التعريف يستخدم كل فترة جزئية من مجال الدالة فى رسم قاعدة الدالة المناظرة لها.

(١٩) د(س) = |س - ٤|

(٢٠) د(س) = $\begin{cases} (س-١)^{٢} - ٤ & ، \ ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ ٤ - (س-١)^{٢} & ، \ ٠ < س < -١ \end{cases}$

ومن الخطأ الشائع لدى الطالب إيجاد د(-١) = ٠ ، د(٤) = ٥ ليكون المدى [٠ ، ٤] بينما المدى من الرسم

(٢١) ف = ع × ن ∴ ف = ٣٠ × ٣ = ٩٠ م

∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$ أى أن: ع ∝ $\frac{١}{ن}$

عندما ع = ٤٥ م/ق ∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ومنها ن = ٢ ق

(٢٢) بفرض أن الطول = س ، العرض = ص

أ) س = $\frac{٤٠٠}{ص}$ ∴ س ∝ $\frac{١}{ص}$

ب) ص = $\frac{٤٠٠}{س}$ جـ ص = $\frac{٤٠٠}{٢٥}$ = ١٦ م

(٢٣) الاختيار الصحيح هو (ب) لأن:

الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى واحد، لكن الإحداثى الصادى للدالة د أكبر من الدالة ر و يمكنك التحقق من ذلك بالرسم بوضع أ = ٠ مثلًا للتسهيل.

(٢٤) أ) النقطة (٠ ، ٣) تحقق المنحنى ٣ = أ (٠ - ٢)^{٢} + ٤

ومنها أ = $-\frac{١}{٤}$

ب) أقصى ارتفاع للبوابة ٤ متر

جـ) عرض البوابة = ٢ × ٢ = ٤ أمتار

(٢٥) د(س) = (س - ٣)^{٢} - ٤

أ) م = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$

ب) مساحة الجزء المحصور = $\frac{٣٢}{٣} - \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = \frac{٢٠}{٣}$

(٢٦) د(س) = ٥٠ س

(١١) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيًا.

أ) د(س) = س^{٢} - ٤ ب) د$_{١}$(س) = س^{٢} + ١ جـ) د$_{٢}$(س) = (س + ١)^{٢}

د) د$_{٣}$(س) = (س - ٣)^{٢} هـ) د$_{٤}$(س) = (س - ١)^{٢} - ٢ و) د$_{٥}$(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} - $\frac{١}{٤}$

(١٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ) د(س) = |س| + ١ ب) د$_{١}$(س) = |س| - ٣ جـ) د$_{٢}$(س) = |س + ٢|

د) د$_{٣}$(س) = |س - ٥| هـ) د$_{٤}$(س) = |س + ٢| + ١ و) د$_{٥}$(س) = |س - ٣| - ٢

ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

(١٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ) د(س) = د(س) - ٣ ب) د$_{١}$(س) = د(س) + ١ جـ) د$_{٢}$(س) = د(س - ٢)

د) د$_{٣}$(س) = د(س + ٣) هـ) د$_{٤}$(س) = د(س - ٢) - ١ و) د$_{٥}$(س) = د(س + ٣) + ٢

ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ) ق(س) = د(س + ١) ب) ق(س) = د(س - ٣) جـ) ق(س) = د(س) + ٢

د) ق(س) = د(س) - ٤ هـ) ق(س) = د(س + ٢) - ٥ و) ق(س) = د(س - ٢) + ٢

(١٥) استخدم منحنى الدالة د حيث د حيث د (س) = س^{٣} لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ) د(س) = ٤ - س^{٣} ب) د$_{١}$(س) = - (س - ٣)^{٣} جـ) د$_{٢}$(س) = ٢ - (س + ٣)^{٣}

(١٦) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانيًا.

أ) د(س) = ٢ - |س| ب) د$_{١}$(س) = - |س| + ٥ جـ) د$_{٢}$(س) = ٤ - |س + ٣|

د) د$_{٣}$(س) = ٢ |س| هـ) د$_{٤}$(س) = ٢ - ٢ |س - ١| و) د$_{٥}$(س) = ٥ - ٢ |س + ٢|

(١٧) ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ) د(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ -س^{٣} - ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ ب) د$_{١}$(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ١ & \text{عندما } ٠ < س \leqslant ٤ \\ -س^{٣} - ١ & \text{عندما } س \geqslant ٤ \end{cases}$

جـ) د$_{٢}$(س) = س |س| - ١ د) د$_{٣}$(س) = $\frac{٣س}{س + ١}$

(١٨) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، فارسم الشكل البيانى للدالة ل فى الحالات الآتية:

أ) ل(س) = |د(س)| ب) ل(س) = ٢ + |د(س)| جـ) ل(س) = |د(س - ٢)|

(١٩) ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان:

أ) د(س) = $\sqrt{٧ س^{٢} - ٨ س + ١٦}$ ب) د(س) = |س^{٣} - ٣س - ٣| ، س ∈ [-١ ، ٤]

(٢٠) **الربط مع التجارة:** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

(٢١) **الربط مع الميكانيكا:** يقطع جسم مسافة ف مترًا في ٣ دقائق إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا/ دقيقة، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًّا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًّا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة اذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

(٢٢) **المجتمعات العمرانية:** خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س متراً، ومساحتها ٤٠٠ مترًا مربعًا.

أ) بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسياً مع عرضها.

ب) اكتب قاعدة الدالة د التى تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًّا.

جـ) أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التى طولها ٢٥ متراً وتحقق من ذلك جبريًّا.

تفكير ابداعى:

(٢٣) إذا كان س$_{١}$ ، س$_{٢}$ أصفارًا للدالة د: د(س) = (س - أ)^{٢} -٨ حيث س$_{١}$ < س$_{٢}$ وكان س$_{٣}$ ، س$_{٤}$ أصفارًا للدالة ر: ر(س) = ٥ - (س - أ)^{٢} حيث س$_{٣}$ < س$_{٤}$ ، أ ∈ ع فأى العبارات التالية صحيحة:

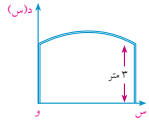
أ) س$_{١}$ < س$_{٣}$ < س$_{٤}$ < س$_{٢}$ ب) س$_{١}$ < س$_{٣}$ < س$_{٢}$ < س$_{٤}$

جـ) س$_{٣}$ < س$_{١}$ < س$_{٤}$ < س$_{٢}$ د) س$_{٣}$ < س$_{١}$ < س$_{٢}$ < س$_{٤}$

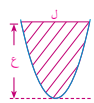
(٢٤) **الربط مع الصناعة:** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = أ (س -٢)^{٢} + ٤ كما فى الشكل المقابل. أوجد:

أ) قيمة أ ب) أقصى ارتفاع للبوابة

جـ) عرض البوابة



(٢٥) **الربط مع الهندسة:** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى العلاقة م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع



أ) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د: د(س) = س^{٣} - ٣س + ٥ بالوحدات المربعة

ب) ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنى الدالتين د، ر حيث ر(س) = |س - ٣| - ٢ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

PDF Compressor Pro

١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absoluse Value Equations and Inequalites



الوحدة الأولى

١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

سوف تتعلم
- حل معادلات المقياس بيانيًا
- حل معادلات المقياس جبريًا
- حل متباينات المقياس بيانيًا.
- حل متباينات المقياس جبريًا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية
- معادلة. Equation
- متباينة. Inequality
- حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

أولًا: حل المعادلات

فكر ونقش

مثل بيانيًا في شكل واحد منحنى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية.

لاحظ الرسم ثم اجب:

(أ) ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنى الدالتين معًا؟

(ب) إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

(ج) استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

نلاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

٢) لأي دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:

مجموعة الحل = {أ}

مجموعة الحل = ϕ

مجموعة الحل = {أ،ب}

مجموعة الحل = $[\frac{1}{2}, \infty[$

حل المعادلة: | أ س - ب| = جـ

مثال

(١) حل المعادلة: |س - ٣| = ٥ بيانيًا وجبريًا.

كتاب الرياضيات البحتة - علمي - الصف الثاني الثانوي

٤٨

خلفية

سبق للطالب أن حل المعادلات والمتباينات الجبرية فى متغير وفى متغيرين من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية جبريًا وبيانيًا، وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب أنماطًا أخرى من معادلات ومتباينات المقياس جبريًا وبيانيًا، كما سيتعرف على بعض الخواص الأخرى للمقياس ، كما ينمذج مشكلات وتطبيقات حياتية، وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس بالطريقة الجبرية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل معادلات المقياس بيانيًا.
- يحل معادلات المقياس جبريًا.
- يحل متباينات المقياس بيانيًا.
- يحل متباينات المقياس جبريًا.
- ينمذج مشكلات وتطبيقات حياتية، ويحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس.

مفردات أساسية

- معادلة – متباينة – حل بيانى – حل جبرى.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - أقلام رصاص - برامج رسومية للحاسوب.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى - غرف الوسائط المتعددة.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من صفحة (٤٨) إلى صفحة (٥٦) – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

فى بند عمل تعاونى

- اطلب إلى الطلاب باستخدام الحاسبة البيانية أو باستخدام أحد البرامج الرسومية للحاسوب (التابلت) رسم دالتين أحدهما دالة خطية، والأخرى دالة مقياس، ثم اطلب إليهم إيجاد مجموعة نقاط التقاطع المحتملة لكل منهما.
- بين إلى الطلاب بأنه عند تساوى الدالتين السابقتين تكون مجموعة حلها هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنيهما كما هو موضح بالأشكال المرفقة ص (٤٨) من كتاب الطالب والتى تتناول الحالات الآتية:
- لا يوجد حل على الإطلاق.
- يوجد حل وحيد فقط.
- يوجد حلان.
- توجد مجموعة لانهائية من الحلول على صورة فترة.

إجراءات الدرس

أعط بعض الأمثلة التوضيحية من المعادلات التى تعزز هذه المفاهيم كالآتى:

مثل بيانيًا فى شكل واحد منحنى الدالتين د، ر ومن الرسم أوجد مجموعة الحل المشترك (إن وجدت)

١ - د(س) = |س -٢| ، د(س) = ١ - س — **الإجابة** ϕ

٢ - د(س) = |س +٢| ، ر(س) = ٢ - س — **الإجابة** {٠}

٣ - د(س) = ٢|س| ، ر(س) = ١٥ -س^{٢} — **الإجابة** {-٣، ٣}

٤ - د(س) = |س -٢| ، ر(س) = ٣ - |س +١| — **الإجابة** [-١، ٢]

٥ - د(س) = |٤س-٨| ، ر(س) = ٨ - ٤ س — **الإجابة** {٢}

PDF Compressor Pro

فى مثال (١) ص (٤٨)

يمكن اضافة الحلول الجبرية الآتية

∵ |س-٣| = ٥ ∴ س - ٣ = ± ٥

ومنها: س = ٨ أو س = -٢

بتربيع الطرفين:

|س - ٣|^{٢} = ٥^{٢} أى س^{٢} - س - ١٦ = ٠

(س - ٨) (س + ٢) = ٠

ومنها س = ٨ أو س = -٢

وفى هذه الحالة لابد من تحقيق صحة الحل، وذلك بالتعويض فى المعادلة الأصلية ، وتعتبر هذه خطوة إجرائية من خطوات الحل وعلى وجه العموم يفضل الحل الأساسى لمعادلات المقياس، وذلك باستخدام إعادة تعريف دالة المقياس كما فى الحل الجبري ص (٤٩) بكتاب الطالب.

التقييم المستمر: (الحوار و المناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (٤٩) ، ص (٥٠) وتوصل معهم إلى الحلول الصحيحة.

الإجابات:

٢ أ س = ± ٤

ب مجموعة الحل ϕ لأنه لايوجد عدد موجب يجمع مع العدد (١) ليكون المجموع مساويًا صفر.

ج | س -٧| = ٥

س - ٧ = ٥ عندما س ⩽ ٧ ومنها س = ٢ ∋ [٧،∞ [

-س + ٧ = ٥ عندما س > ٧

ومنها س = ٢ ∋]-∞، ٧]

مجموعة الحل هى { ٢ ، ١٢}

٣ أ مجموعة الحل هى { ٤ ، $\frac{-١٠}{٣}$ }

ب مجموعة الحل هى ϕ

تمارين إثرائية

أوجد جبريًا أو بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١ |س| = ٣ — **الإجابة:** {-٣، ٣}

٢ |٣ - ٢س | = ٧ — **الإجابة:** {-٢، ٥}

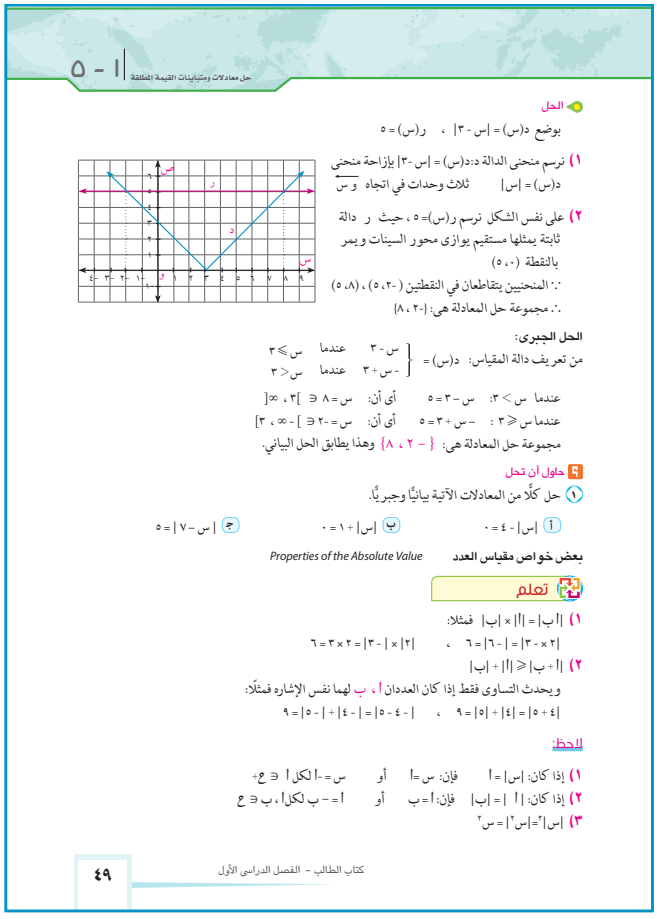
٣ س^{٢} + |س|=٢ — **الإجابة:** {-١، ١}

٤ س^{٣} |س| = ٨س — **الإجابة:** {-٢، ٠، ٢}

٥ |س-٢| = ٣س - ٤ — **الإجابة:** { $\frac{٣}{٢}$ }

٦ |٢س -٣| = س + ٣ — **الإجابة:** {٠ ، ٦}

٧ |س +٢| = س^{٢} + ٢ — **الإجابة:** {٠، ١}



الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥

١) نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س -٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

٢) على نفس الشكل نرسم ر(س)= ٥ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ٥)

∵ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (-٢، ٥) ، (٨، ٥)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {-٢ ، ٨}

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: د(س) = { س - ٣ عندما س ⩾ ٣ ، -س + ٣ عندما س > ٣

عندما س > ٣: س - ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∋]٣، ∞[

عندما س ⩽ ٣ : -س + ٣ = ٥ أى أن: س = -٢ ∋]-∞ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة هى: { -٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البيانى.

حاول أن تحل

١) حل كلًا من المعادلات الآتية بيانيًا وجبريًا.

أ |س| - ٤ = ٠ ب |س| + ١ = ٠ ج |س - ٧| = ٥

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*

تعلم

١) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:

|٢ × -٣| = |-٦| = ٦ ، |٢| × |-٣| = ٢ × ٣ = ٦

٢) |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

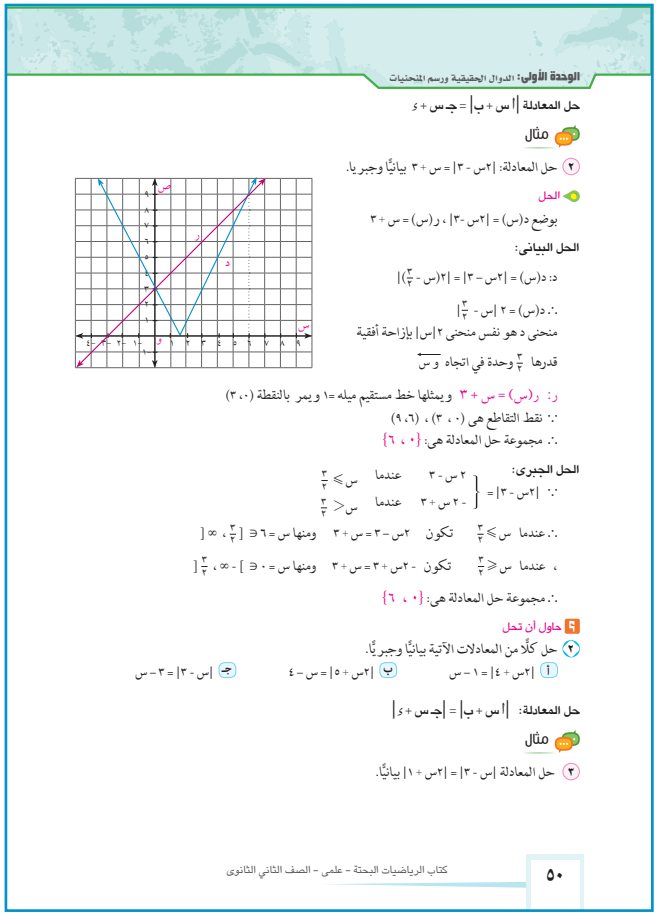
|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، |-٤ - ٥| = |-٤| + |-٥| = ٩

للحظ:

١) إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∋ ع+

٢) إذا كان: |أ| = |ب| فإن: أ = ب أو أ = - ب لكل أ ، ب ∋ ع

٣) |س|^{٢} = |س^{٢}| = س^{٢}



حل المعادلة |أ س + ب| = جـ س + ء

مثال

٢) حل المعادلة: |٢س - ٣| = س + ٣ بيانيًا وجبريا.

الحل

بوضع د(س) = |٢س -٣| ، ر(س) = س + ٣

الحل البيانى:

د: د(س) = |٢س - ٣| = |٢(س - $\frac{٣}{٢}$)|

∴ د(س) = ٢ |س - $\frac{٣}{٢}$|

منحنى د هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

ر: ر(س) = س + ٣ ويمثلها خط مستقيم ميله =١ ويمر بالنقطة (٠، ٣)

∵ نقط التقاطع هى (٠ ، ٣) ، (٩،٦)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

الحل الجبرى:

∵ |٢س - ٣| = { ٢ س - ٣ عندما س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ ، -٢ س + ٣ عندما س < $\frac{٣}{٢}$

∴ عندما س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ تكون ٢س - ٣ = س + ٣ ومنها س = ٦ ∋ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [

، عندما س < $\frac{٣}{٢}$ تكون -٢س + ٣ = س + ٣ ومنها س = ٠ ∋ [-∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

حاول أن تحل

٢) حل كلًا من المعادلات الآتية بيانيًا وجبريًا.

أ |٢س + ٤| = ١ - س ب |٢س + ٥| = س - ٤ ج |س - ٣| = ٣ - س

حل المعادلة: |أ س + ب| = |جـ س + ء|

مثال

٣) حل المعادلة |س - ٣| = |٢س + ١| بيانيًا.

PDF Compressor Pro

في بند فكر ص (٥١):

(أ) يمكن حل المعادلة: |س +٧| = |س -٥|

وذلك بتربيع طرفى المعادلة والتحقق من صحة الحل كالآتى:

س^{٢} + ١٤س + ٤٩ = س^{٢} - ١٠س +٢٥ وبحذف س^{٢} من طرفى المعادلة:

١٤ س + ٤٩ = -١٠س + ٢٥

∴ ٢٤ س = -٢٤ ومنها س = -١

تحقيق صحة الحل:

الطرف الأيمن = |-١ +٧| = ٦ ،

الطرف الأيسر = |-١ -٥| = ٦

الطرفان متساويان ∴ مجموعة الحل = {-١}

فى بند فكر ص (٥٢):

بتربيع طرفى المعادلة: س^{٢} - ٦س + ٩ = ٤س^{٢} - ٣٦ س + ٨١

أى أن: (س -٤) (س - ٦) = ٠

ومنها س = ٤ أو س = ٦

التحقيق: عندما س = ٤ ، الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ١

عندما س = ٦ ، الطرف الأيمن = ٣ ، الطرف الأيسر = -٣

∴ س = ٦ لاتحقق حل المعادلة

مجموعة الحل هى {٤}

القضايا المتضمنة في الدرس:

يركز هذا الجزء على التطبيقات الحياتية المرتبطة بحل المعادلات، ويذكر الكتاب مثالين عن تخطيط المدن وشبكات الطرق، وهذان المثالان من المشكلات المرتبطة بالبيئة المصرية فحاول أن تناقش هذه القضايا مع طلابك فى محاولة للوصول لحلول عامة للقضاء على هذه المشكلات.

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك بنود حاول أن تحل ص (٥٢) وتوصل معهم إلى الحلول الصحيحة.

الإجابات:

(٤) (أ) ٢|س-٢| = |س -١| ∴ ٢ س - ٤ = ± (س -١)

ومنها س = ٣ تحقق الحل، س = $\frac{٥}{٣}$ لاتحقق الحل

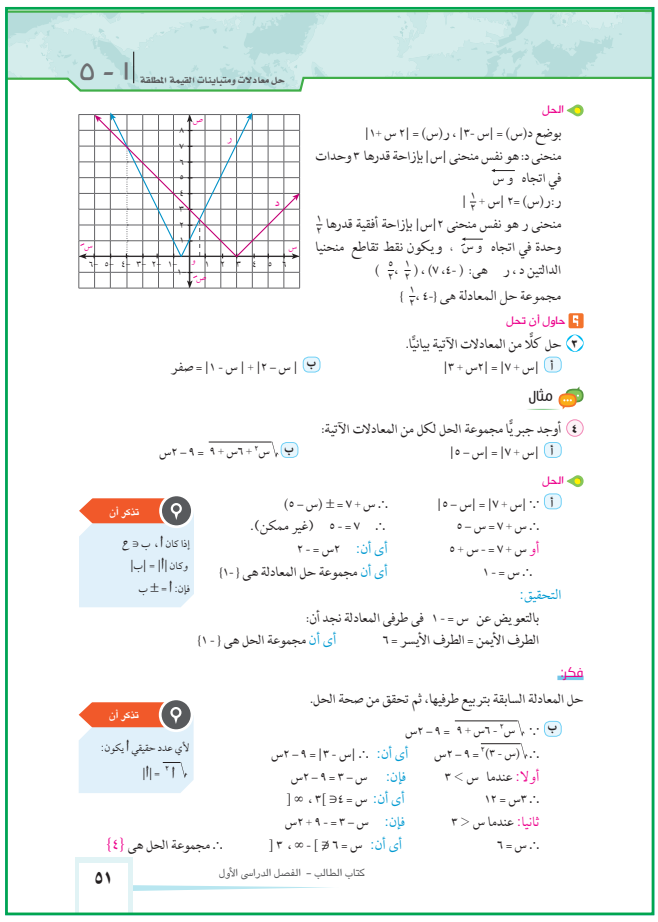
مجموعة الحل هى {٣}

(ب) |س- ٢| = ٤ أى س - ٢ = ± ٤

س - ٢ + ٤ = ٠ ومنها س = -٢ أو

س - ٢- ٤= ٠ ومنها س = ٦

مجموعة الحل هى { -٢ ، ٦}



الحل

بوضع د(س) = |س -٣| ، ر(س) = ٢|س +١٠|

منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

ر:ر(س) = ٢ |س + $\frac{١}{٢}$ |

منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هى: (-٤، ٧) ، ($\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

مجموعة حل المعادلة هى {-٤، $\frac{١}{٢}$ }

حاول أن تحل

(٣) حل كلًا من المعادلات الآتية بيانيًا.

(أ) |س +٧| = |٢س + ٣|

(ب) |س -٢| + |س - ١| = صفر

مثال

(٤) أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(أ) |س +٧| = |س -٥|

(ب) $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$ = ٩ - ٢س

الحل

(أ) ∵ |س +٧| = |س -٥|

∴ س +٧ = س -٥

أو س +٧ = - س +٥

∴ س = -١

∴ س +٧ = ± (س -٥)

∴ ٧ = -٥ (غير ممكن).

أى أن: ٢س = -٢

أى أن مجموعة حل المعادلة هى {-١}

تذكر أن

إذا كان أ، ب ∈ ح

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

التحقيق:

بالتعويض عن س = -١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦ أى أن مجموعة الحل هى {-١}

فكر

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

(ب) ∵ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ٩ - ٢س

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ = ٩ - ٢س أى أن: ∴ |س -٣| = ٩ - ٢س

أولا: عندما س < ٣ فإن: س - ٣ = ٩ - ٢س

∴ ٣س = ١٢ أى أن: س = ٤ ∉]-∞ ، ٣[

ثانيا: عندما س > ٣ فإن: س - ٣ = -٩ + ٢س

∴ س = ٦ أى أن: س = ٦ ∈]٣ ، ∞-[

∴ مجموعة الحل هى {٤}

تذكر أن

لأى عدد حقيقي أ يكون:

$\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ|

فكر

(١) هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلّ للمعادلة؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٤) أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(أ) |س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠

(ب) $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ٤

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

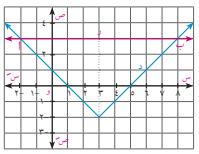
مثال

تخطيط المدن

(٥) قطعة أرض محصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = |س-٣| -٢ ، ر(س)=٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل



بتمثيل منحيي الدالتين د ، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (-٣،٢) ، ب (٣،٨) ، و تكون قطعة الأرض على شكل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية جـ حيث

أ ب = ٨-(-٢)=١٠ وحدات

جـ ؤ = ٣-(-٢)=٥ وحدات

∴ مساحة Δ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × جـ ؤ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = ٢٥ (٨ × ٨) = ١٦٠٠ متراً مربعًا.

حاول أن تحل

(٥) أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = |س-٢| -١ ، ر(س)=٥-|س-٢|

مثال

شبكات الطريق

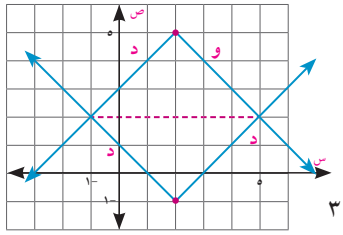
(٦) طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = |س-٥| ، و الثاني يمثله منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س ، اذا تقاطع الطريقان في نقطتي أ، ب أوجد المسافة بين أ،ب لأقرب كيلو متر اذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

الحل

يتقاطع الطريقان عندما د(س)= ر(س) ، ويكون |س-٥| = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س = ص

PDF Compressor Pro

٥ من الرسم المجاور



مساحة الشكل

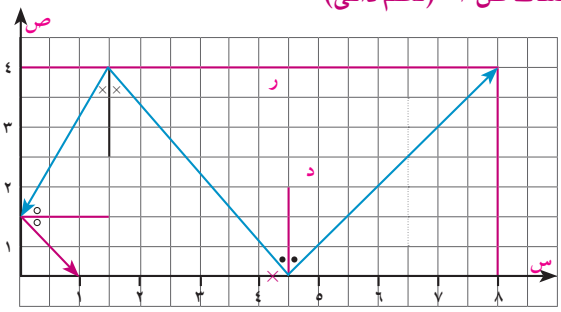
= مساحة △ العلوى

+ مساحة △ السفلى

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ + \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣$

= ١٨ وحدة مربعة.

نشاط ص ٥٣ (تعلم ذاتى)



مسار كرة البلياردو تخضع للشكل المبين عدة مرات، والتى تخضع فى المسار لدالة المقياس د(س) = $\frac{٤}{٣}$ | س - ٥|

ومن مسار الكرة حسب الرسم الموضح نجد أن الكرة يستحيل سقوطها فى الجيب الموجود عند النقطة ب

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما جاء ببند حاول أن تحل ص (٥٤) وذلك بالاستعانة بالأشكال المرسومة فى مثال (٧) وتوصل معهم إلى الإجابة الصحيحة.

الإجابات:

أ مجموعة الحل هى [-٤، ٠]

ب مجموعة الحل هى [١ ، ٥]

جـ مجموعة الحل هى ح - [-١ ، ٥]

الأخطاء الشائعة:



يراعى الحالات التالية عند حل المسائل السابقة:

١)]-∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح -]أ ، ب[

كذلك:]-∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح -]أ ، ب[

٢) عند حل المتباينة

$\frac{١}{|٢س - ٣|} \geq ٢$

عند إيجاد المعكوس الضربي لطرفي المتباينة فإنه يتغير اتجاهها أى تصبح: | ٢ س - ٣| $\leq \frac{١}{٢}$

كما يجب التأكيد بأن س $\neq \frac{٣}{٢}$ فى هذه الحالة ويكمل الحل كما جاء فى مثال ٨.

∴ س - ٥ = ٢س أى س = ٦ ، ص = ١ ∴ أ(٦،١)

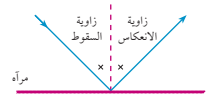
أو س - ٥ = -٢س أى س = ٠ ، ص = ٥ ∴ ب(٠،٥)

أ ب = $\sqrt{(٦-٠)^٢ + (١-٥)^٢}$ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات ∴ المسافة بين أ ، ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = $\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

نشاط

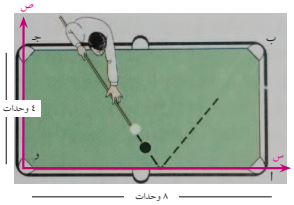
اذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساوياً لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل و بعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.



١) يوضح الشكل المقابل:

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء، باعتبار $\overleftrightarrow{س}$ ، $\overleftrightarrow{ص}$ محوري الاحداثيات المتعامدة، وأن مسار الكرة يتبع منحني الدالة د حيث: د(س) = $\frac{٤}{٣}$ |س-٥|

هل تسقط الكرة السوداء في الجيب ب؟ فسر إجابتك رياضيًا.



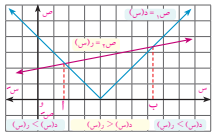
حاول أن تحل

٦) في المثال السابق تحقق من نقط التقاطع بحل المعادلتين بيانيًا.

ثانيا: حل المتباينات *Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< ، > ، ≤ ، ≥) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانيًا



يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:

ص = د(س) ، ص = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى {أ ، ب}

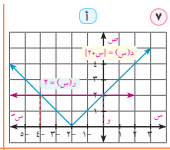
أى أن: ص = ص عندما س = أ أو س = ب

ويلاحظ: ص > ص أى د(س) > ر(س) عندما س ∈]أ ، ب[

ص > ص أى د(س) > ر(س) عندما س ∈]-∞ ، أ[∪]ب ، ∞[

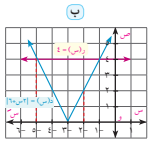
مثال

(٧) أ



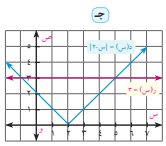
مجموعة حل المتباينه
|س+٢| > ٢
هى:]-٤ ، ٠[

(٧) ب



مجموعة حل المتباينه
|٢ س + ٦| ≤ ٤
هى:]-∞ ، -٥[∪ [-١ ، ∞[
أى أن: ع -]-٥ ، -١[

(٧) جـ



مجموعة حل المتباينه
|س - ٢| ≥ ٣
هى: [-١ ، ٥]

حاول أن تحل

٧) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

أ |س + ٢| ≥ ٢ ب |٢ س + ٦| ≤ ٤ جـ |س - ٢| > ٣

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان |س| ≥ أ ، أ > ٠ فإن: -أ ≥ س ≥ أ

ثانيًا: إذا كان |س| ≤ أ ، أ > ٠ فإن: س ≤ أ أو س ≥ -أ

مثال

٨) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٣| > ٤ ب $\sqrt{س^٢ - ٣س + ١}$ ≤ ٤

جـ $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ ≤ ٢

الحل

أ ∵ |س - ٣| > ٤ أى - ٤ > س - ٣ > ٤

وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ -٤ + ٣ > س - ٣ + ٣ > ٤ + ٣

أى أن: -١ > س > ٧

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٧[

تذكر أن

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ < ب ، ب < جـ فإن أ < جـ

إذا كان: أ < ب فإن أ + جـ < ب + جـ

أ جـ < ب جـ عند جـ < ٠

أ جـ > ب جـ عند جـ > ٠

إذا كان أ ، ب موجبتان ، أ < ب فإن $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$

PDF Compressor Pro

٣) إذا كان مجموعة حل المتباينة: |س| < ٣ هى]-٣، ٣[
فإن مجموعة حل المتباية |س| > ٣
مباشرة تكون: ح =]-∞، -٣[∪]٣، ∞[

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما جاء فى فقرة حاول أن تحل ص (٥٥) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

الإجابات:

(٨) أ مجموعة الحل هى]-٤، ١٨[

ب مجموعة الحل هى $[-٥، \frac{١}{٣}[$

جـ مجموعة الحل هى ح =]-٥، ١١[

د مجموعة الحل هى $[-\frac{٥}{٣}، \frac{٥}{٣}] - \{٠\}$

(٩) أ |س - ٨٠| > ٢٠

ب |س - ٣٨,٥| > ٣,٥

جـ |س - ١٥| ≥ ١٥

بند تفكير ناقد:

أ |س| ≥ ٤

ب |س - ٣| > ٣

جـ |س| ≤ ٢

د |س - ٢| < ٤

إجابات تمارين الدرس الخامس:

(١) {-١، ٥}

(٢) {-٢، ٥}

(٣) {٦}

(٤) {٠}

(٥) {١}

(٦) $\{\frac{٣}{٢}\}$

(٧) ϕ

(٨) {٣}

(٩) {٤}

(١٠) {-٤، ١٠}

(١١) {٠}

(١٢) $\{\frac{٣}{٢}\}$

(١٣) {١، ٥}

(١٤)]-∞، ٠[

(١٥) $\{\frac{١}{٢}\}$

(١٦)]-١، ٣[

(١٧)]-١، ٥[

(١٨) ح =]٢، ٨[

(١٩) ح =]-٢، ٥[

(٢٠) ح

(٢١) ح = $]-\frac{٣}{٢}، \frac{٧}{٢}[$

(٢٢)]-١٢، ١٨[

(٢٣) $]-\frac{٢}{٢}، ٢[$

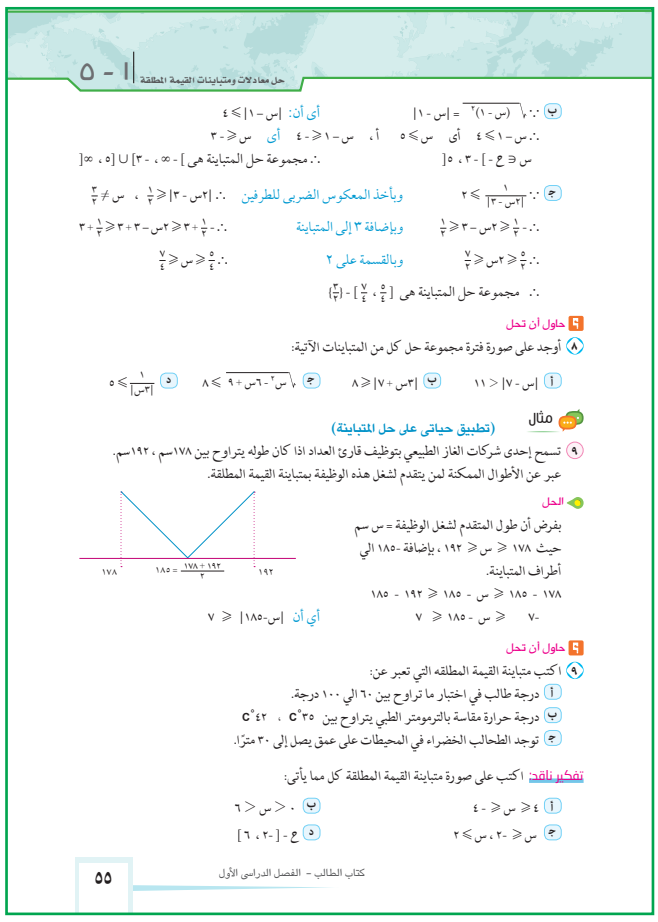
(٢٤) $]\frac{٥}{٣}، \frac{٩}{٣}[$

(٢٥) ϕ

(٢٦) ع =]-٣، ٥[

(٢٧)]-٢، ٤[

(٢٨) $]-\frac{١}{٢}، \frac{٧}{٢}[$



ب ∵ $\sqrt{(س-١)^٢}$ = |س - ١|
أى أن: |س - ١| ≤ ٤
∴ س - ١ ≤ ٤ أى س ≤ ٥ ، س - ١ ≥ -٤ أى س ≥ -٣
∴ مجموعة حل المتباينة هى]-∞، -٣[∪]٥، ∞[
س ∈ ع =]-٣، ٥[

جـ ∵ $\frac{١}{|٣-س|}$ ≥ ٢
وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين ∴ |٣ - س| ≤ $\frac{١}{٢}$ ، س ≠ ٣
وبإضافة ٣ إلى المتباينة ∴ -$\frac{١}{٢}$ ≤ ٣ - س ≤ $\frac{١}{٢}$
وبالقسمة على ٢ ∴ $\frac{٥}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{٧}{٢}$
∴ مجموعة حل المتباينة هى $[\frac{٥}{٢}، \frac{٧}{٢}] - \{٣\}$

حاول أن تحل

(٨) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٧| > ١١ ب |٣س + ٧| ≥ ٨ جـ $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$ ≤ ٨ د $\frac{١}{|٣-س|}$ ≤ ٥

مثال (تطبيق حياتى على حل المتباينة)

(٩) تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعي بتوظيف قارئ العداد اذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨سم ، ١٩٢سم.
عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

الحل

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم
حيث ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ ، بإضافة -١٨٥ الي أطراف المتباينة.
١٧٨ - ١٨٥ ≤ س - ١٨٥ ≤ ١٩٢ - ١٨٥
-٧ ≤ س - ١٨٥ ≤ ٧
أي أن |س-١٨٥| ≤ ٧

حاول أن تحل

(٩) اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن:

أ درجة طالب في اختبار ما تراوح بين ٦٠ الي ١٠٠ درجة.
ب درجة حرارة مقاسة بالترمومتر الطبي يتراوح بين ٣٥°c ، ٤٢°c
جـ توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تفكير ناقد: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتى:

أ ٤ ≤ س ≤ -٤ ب ٠ < س < ٦
جـ س ≤ -٢ ، س ≥ ٢ د ع =]-٢، ٦[

تمـارين ١ - ٥

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١) |س - ٢| = ٣ (٢) |٣ - ٢ س| = ٧ (٣) |س + ٢| = |٣ س - ١٠|
(٤) |س + ٢| + |س - ٢| = ٠ (٥) |س| = |س + ٢| (٦) |س - ٢| = |٣ س - ٤|
(٧) |س - ١| = |س - ٢| (٨) |٢س - ٦| = |س - ٣| (٩) $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$ + |٢س| = ٩

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٠) |س - ٣| = ٧ (١١) |س + ٢| + |س - ٢| = ٠ (١٢) |س - ٢| = |٣ س - ٤|
(١٣) |٢ س - ٤| = |س + ١| (١٤) |س| = |س + ٠| (١٥) |س + ٢| = |س - ٣|

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا:

(١٦) |س - ١| > ٢ (١٧) |س - ٢| > ٣ (١٨) |٥ - س| < ٣
(١٩) |٢ س - ٣| ≤ ٧ (٢٠) |٣ + س| < -١ (٢١) |٢ س - ٥| ≤ ٢

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبريًا:

(٢٢) |س - ٣| ≥ ١٥ (٢٣) |٣ س - ٢| > ٤ (٢٤) |٣ س - ٧| ≤ ٢
(٢٥) |٣ س + ٢| + ٥ > ٤ (٢٦) $\sqrt{س^٢ - ٣س + ١}$ ≤ ٤ (٢٧) $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ ≥ ٩
(٢٨) |٣س - ٣| + |٦ - ٤س| > ١٢ (٢٩) $\frac{١}{|٥-س|}$ ≤ ٣ (٣٠) $\frac{١}{|٣-س|}$ < ٢

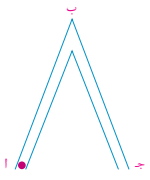
(٣١) **الربط بالميكانيكا:**

يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨سم/ث من الموضع أ إلى الموضع جـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم و الموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ |٥ - ن| حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالسنتيمترات.

أ احسب المسافة بين الجسم و الموضع ب بعد ثانيتين و بعد ٨ ثوان
ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك

ب متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب، فسر إجابتك.

جـ متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب.



PDF Compressor Pro

(٢٩) $]\frac{٧}{٣}، \frac{٨}{٣}[$ ، $\{\frac{٥}{٢}\}-]-\infty، ٢[$ (٣٠) $]\frac{٥}{٤}، \frac{٧}{٤}[$ ، $\{\frac{٣}{٢}\}-$

(٢٥) أ ٢٤ ب ٣، ٧ ج $[٤، ٦]$

إجابات التمارين العامة على الوحدة ص ٥٩

(١) أ المدى ح دالة أحادية، الدالة تناقصية على مجالها.

ب المدى $]-\infty، -١]$، ليست أحادية، $]-\infty، ٢$ [تزايدية، $]٢، \infty[$ تناقصية.

ج المدى $]٠، \infty[$ ليست أحادية، $]-\infty،$ تناقصية، $]٠، \infty[$ تزايدية

د المدى $]٠، ٢]$، ليست أحادية، $]-٤، ب[$ تزايدية، $]-٢، ٢[$ ثابتة، $]٢، ٤[$ تناقصية.

هـ المدى = ح، أحادية، تزايدية على مجالها ح.

و المدى = ح - {٠}، أحادية، تناقصية فى $]-\infty، ٠[$ ، $]٠، \infty[$

(٢) أ ح ب ح - {٣، -١}

ج ح د $]٣، \infty[$

هـ ح - $]-٢، \infty[$ و ح - {٢}

(٨) أ {-١، ٢} ب {-١، ١}

ج $\{\frac{١}{٢}\}$ د {-٤، -٢}

هـ ح - $]-\frac{٤}{٣}، \frac{٨}{٣}[$ و ح - $[-١، ٨]$

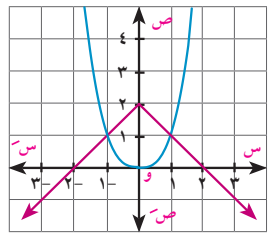
(٩) أ $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدة مساحة

ب $٢ \times \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٨$ وحدة مساحة.

(١٠) ١٥٨٥، ١٦١٥

(١١) {-٢٠، ٥٢} التدريج كل ٦ وحدات

(١٢) من الرسم مجموعة حل المعادلة هو {-١، ١}



(١٣) لكل -س،

س ∋ مجال الدالة ح

$ر(-س) = \frac{١٢}{٢ + |س|}$

$= \frac{١٢}{٢ + |-س|}$

∴ $ر(-س) = ر(س)$ ∴ الدالة زوجية

بوضع: $\frac{١٢}{٢ + |س|} = ٢$

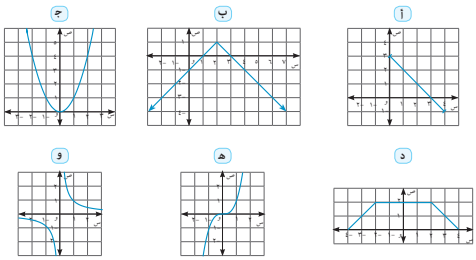
$|س| + ٢ = ٦$ ∴ $|س| = ٤$

∴ مجموع الحل هى {-٢، ٢}

تمـــارين عامة

(١) فى الأشكال البيانية الآتية:

أولًا: عين مدى الدالة ثانيًا: حدد الدوال الأحادية ثالثًا: ادرس اطراد كل دالة.



(٢) أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

أ $د_١(س) = ٣س^٢ + ٢س + ٣$ ب $د_٢(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٣س - ٣}$ ج $د_٣(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

د $د_٤(س) = \sqrt{٧ - س} - ٣$ هـ $د_٥(س) = \frac{٣}{\sqrt{٧ + س} + ٢}$ و $د_٦(س) = \frac{١}{\sqrt{٧ - ٤س^٢ + ٤}}$

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث ص = س لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ $ر_١(س) = ٤ + س$ ب $ر_٢(س) = س - ١$ ج $ر_٣(س) = س + \frac{٣}{٢}$

ثم أثبت أن كل دالة من هذه الدوال دالة أحادية وابحث اطراد كل منها.

(٤) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل الدالة ر بيانيًا ثم ابحث اطرادها:

أ $ر(س) = |س| - ١$ ب $ر(س) = ٢ - |س|$ ج $ر(س) = |س + ٢| - ٣$

ثم ابحث اطراد كل منها.

(٥) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ $ر_١(س) = س^٣ - ٣$ ب $ر_٢(س) = ٢ - س^٣$ ج $ر_٣(س) = (س - ٢)^٣ + ١$

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

(٦) استخدم منحنى الدالة د، حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل ما يلي بيانيًا:

أ $ر_١(س) = (س + ٣)^٣$ ب $ر_٢(س) = -(س - ١)^٣$ ج $ر_٣(س) = (س - ١)^٣ - ٢$

د $ر_٤(س) = (س + ١)^٣ - ٢$

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ لتمثيل مما يلي بيانيًا:

أ $د_١(س) = \frac{١}{س + ١}$ ب $د_٢(س) = \frac{-١}{س + ٢}$ ج $د_٣(س) = \frac{١}{س} + ٢$

د $د_٤(س) = ١ - \frac{١}{س}$ هـ $د_٥(س) = \frac{س + ١}{س}$ و $د_٦(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$

(٨) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًا وحقق الناتج جبريًا.

أ $|٢س - ١| - ٣ = ٠$ ب $|٣س - ٢| + ٢س - ٣ = ٠$ ج $|س + ٢| = |س - ٣|$

د $|س + ٣| \geq ١$ هـ $|٣س - ٢| \leq ٦$ و $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} > ٥$

(٩) **الربط بالهندسة:** أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين د ، ر حيث:

أ $د(س) = |س + ٣| + ٢$ ، $ر(س) = ٤$

ب $د(س) = |س + ٣| - ١$ ، $ر(س) = ٣ - |س + ٣|$

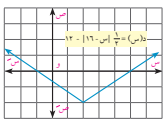
(١٠) ينتج مصنع البان عبوات وزن كل منها س جم ولمراقبة جودة الانتاج تمر العبوة على سير مراقبة الوزن الذي يسمح بمرورها اذا كان $|س - ١٦٠٠| \leq ١٥$ حدد أكبر وزن وأصغر وزن للعبوة التي يمكن طرحها في الأسواق ومن إنتاج هذا المصنع.

(١١) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$د(س) = \frac{١}{٢}|س - ١٦| - ١٢$

اختر الوحدات المناسبة للمحورين $\overleftrightarrow{وس}$ ، $\overleftrightarrow{وص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٦$ بيانيًا



تفكير ابداعى:

(١٢) ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث $د(س) = س^٢|س|$ ، $ر(س) = ٢ - |س|$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ر(س)$

(١٣) أثبت أن الدالة د حيث $د(س) = \frac{١٢}{٢ + |س|}$ زوجية، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٢$

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمى

اختبار تراكمى

١ أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} ، ع(س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتى:

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

أ قاعدة الدالة فى شكل (١) هى .....
ب قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى .....
ج قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى .....
د الدالة ليست أحادية كما فى شكل .....
هـ مدى الدالة فى شكل (١) هو .....
و مدى الدالة هو ع كما فى شكل .....
ز نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى .....
ح معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى .....

٢ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلى:

أ د(س) = $\frac{س}{س^{٢}-٣س-١٠}$ ب د(س) = $\sqrt{س+٢}$ ج د(س) = $\frac{٢}{\sqrt{س-٣}}$

٣ إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، ر(س) = ٢س فأوجد كلًا من:

(د + ر)(س) ، (د . ر)(س) ، ($\frac{د}{ر}$)(س) ثم أوجد قيمة (د + ر)(١) ، (د . ر)(٢) ، ($\frac{د}{ر}$)(-١)

٤ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٣| + ١، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ |س + ٢| = ٣س - ١٠ ب |س| - ٢ - س = ٠ ج |٣ - ٢س| > ٥

٦ أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{|س|+١}{|س|}$ زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢س - ٢، وتحقق من صحة الحل.

٧ الربط بالميكانيكا: أُطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتر، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ ن - ٤,٩ ن^{٢} بيّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد

أ ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.
ب الزمن الذى يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٧٠,٤ مترًا من سطح الأرض.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول ٦١

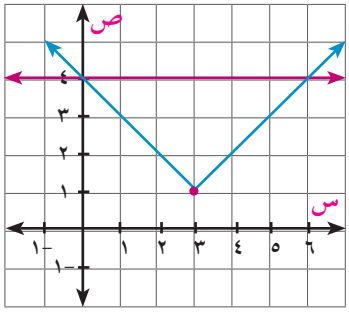
إجابة اختبار تراكمى

١ أ ر(س) = (س - ٢)^{٢} ب ر(س) = س^{٣} + ٢
ج ع(س) = $\frac{١}{س-١}$ + ٤ د شكل ١، ٣
هـ]٠، ∞[و شكل (٣)
ز (١، ٤) ح س = ٢

٢ أ ح = {-٢، ٥} ب]-∞، -٢[
ج]٣، ∞[

٣ (د + ر) (س) = ٢س + $\frac{١}{س}$،
(د، ر) (س) = ٢، $\frac{ر}{د}$(س) = ٢
(د + ر) (١) = ٣ ، (د ، ر) (٢) = ٢ ، $\frac{ر}{د}$(-١) = ٢

٤



من الرسم د تناقصية فى]-∞ ، ٣[، تزايدية فى]٣، ∞[
مجموعة حل المعادلة هو {٠، ٦}

٥ أ {٦} ب {١}
ج ح =]-١، ٤[

٦ د(-س) = $\frac{|-س|+١}{|-س|}$ = $\frac{|س|+١}{|س|}$

∴ د(-س) = د(س) ∴ الدالة زوجية

د(س) = $\frac{١}{|س|}$ + ١ = $\begin{cases} \frac{١}{س}+١ & ، س < ٠ \\ -١ - \frac{١}{س} & ، س > ٠ \end{cases}$

مدى الدالة هو]١، ∞[معادلة محور التماثل ص = ٠

مجموعة حل المعادلة:

د(س) = ٢س - ٢ هو {٢}

٧ الدالة من الدرجة الثانية هى ليست أحادية.

أ ف$_{ن}$ = ٢ = ٩٨ × ٢ - ٤,٩ × ٤ = ١٧٦,٤ مترًا.

ب ٤٧٠,٤ = ٩٨ن$_{ن}$ - ٤,٩ ن$_{ن}^{٢}$ = ٢ن$_{ن}^{٢}$ - ٢٠ن$_{ن}$ + ٩٦ = ٠

(ن$_{ن}$ - ١٢) (ن$_{ن}$ - ٨) = ٠

∴ ن$_{ن}$ = ٨ ثوان، ن$_{ن}$ = ١٢ ثانية.

وهو عائد لنفس نقطة القذف.

PDF Compressor Pro

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their applications

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب الأسس الصحيحة الموجبة والسالبة، وتعرف على خواصها فى مجموعة الأعداد الحقيقية، وسوف يستكمل الطالب فى هذه الوحدة دراسة الأسس الكسرية وخواصها، كذلك الجذر النونى لعدد حقيقى، ثم يدرس الدالة الأسية وتمثيلها بيانيًا، ثم يدرس الدالة اللوغاريتمية كدالة عكسية للدالة الأسية، وكذلك يدرس خواص اللوغاريتمات وتطبيقاتها الحياتية.

وتتكون هذه الوحدة من:

- الدرس (الأول): الأسس الكسرية.
- الدرس (الثاني): الدالة الأسية.
- الدرس (الثالث): حل المعادلة الأسية وتطبيقاتها.
- الدرس (الرابع): الدالة العكسية.
- الدرس (الخامس): الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا.
- الدرس (السادس): بعض خواص اللوغاريتمات.

مخرجات التعلم

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية د: س ⟵ $ا^{س}$ حيث ا ∈ $ع^{+}$ − {١}.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية
- يتعرف دالتى النماء والتضاءل.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلات أسية على الصورة $ا^{س} = ب$.
- يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $ا^{س} = ب$.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{ا}$ س أو د(س) = لو$_{ا}$ س
  حيث ا ∈ $ع^{+}$ − {١}، س ∈ $ع^{+}$.
- يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها (اختبار الخط الأفقى).
- يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغازيتمية بيانيًا.



الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية.

كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية

(لو (س ص) = لو س + لو ص)، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية

ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت،

ونسبة القوات، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلول ما.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية د: س ⟵ $ا^{س}$ حيث ا ∈ $ع^{+}$ − {١}.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلات أسية على الصورة $ا^{س} = ب$.
- يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $ا^{س} = ب$.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{ا}$ س أو د(س) = لو$_{ا}$ س
  حيث ا ∈ $ع^{+}$ − {١}، س ∈ $ع^{+}$.
- يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها (اختبار الخط الأفقى).
- يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
  - لو$_{ا}$ (س ص) = لو$_{ا}$ س + لو$_{ا}$ ص س > ٠ ، ص > ٠
  - لو$_{ا}$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_{ا}$ س − لو$_{ا}$ ص س > ٠ ، ص > ٠
  - لو$_{ا}$ ($س^{ن}$) = ن لو$_{ا}$ س س > ٠ ، ا ∈ $ع^{+}$ − {١}، ن ∈ ع
  - لو$_{ا}$ ($\frac{١}{س}$) = − لو$_{ا}$ س ، س > ٠ ، ا ∈ $ع^{+}$ − {١}
  - لو$_{ا}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} ا}$ ، س > ٠ ، ا ، ب ∈ $ع^{+}$ − {١}
  - لو$_{ا}$ ب = $\frac{١}{لو_{ب} ا}$ ا ، ب ∈ $ع^{+}$ − {١}
  - لو$_{ا}$ ا = ١ ا ∈ $ع^{+}$ − {١}
  - لو$_{ا}$ ١ = صفر ا ∈ $ع^{+}$ − {١}
- يمثل الدالة اللوغاريتمية بيانيًا.
- يحل مسائل تشتمل على قوانين اللوغاريتمات.
- يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

PDF Compressor Pro



المخطط التنظيمي للوحدة

يتناول المخطط التنظيمي الموضوعات الأساسية (الممثلة في الأسس الكسرية والدالة الأسية والمعادلات الأسية والدالة العكسية والدالة اللوغارتمية وخواص اللوغاريتمات ويتناول كل موضوع عدد من المفاهيم والعلاقات مثل مفهوم الجزر النوني وقوانين الأسس وتعريف الدالة الأسية وكما يوضح المخطط العلاقات والقواعد والشروط الخاصة بكل موضوع وكذلك التمثيل البياني لتلك الدوال.

زمن تدريس الوحدة

١٢ حصة.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة

التفكير الناقد - التفكير الإبداعى فى الرياضيات - التفكير التحليلى - حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة بيانية - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - حاسب آلى - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة:

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة، وسلم التقييم الخاص بكل منها، والاختبار التراكمى فى نهاية كل وحدة.

PDF Compressor Pro

١ - ٢ الأسس الكسرية
Rational exponents

خلفية

سبق أن درس الطالب الأسس الصحيحة سواء الموجبة أو السالبة، وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب الأسس الكسرية ويعمم قوانين الأسس والجذور النونية للعدد الحقيقى، وكما سيدرس علاقة الجذور بالأسس الكسرية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس، وتنفيذًا للأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد الجذور النونية لعدد حقيقى.
- يحول من صورة الجذور إلى أسس كسرية.
- يختصر مقادير جبرية تحتوى على صورة جذرية أو أسس كسرية.

مفردات اساسية:

- القوة النونية – الأساس – الأس – جذر نونى – أس كسرى.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسى - آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة:

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم:

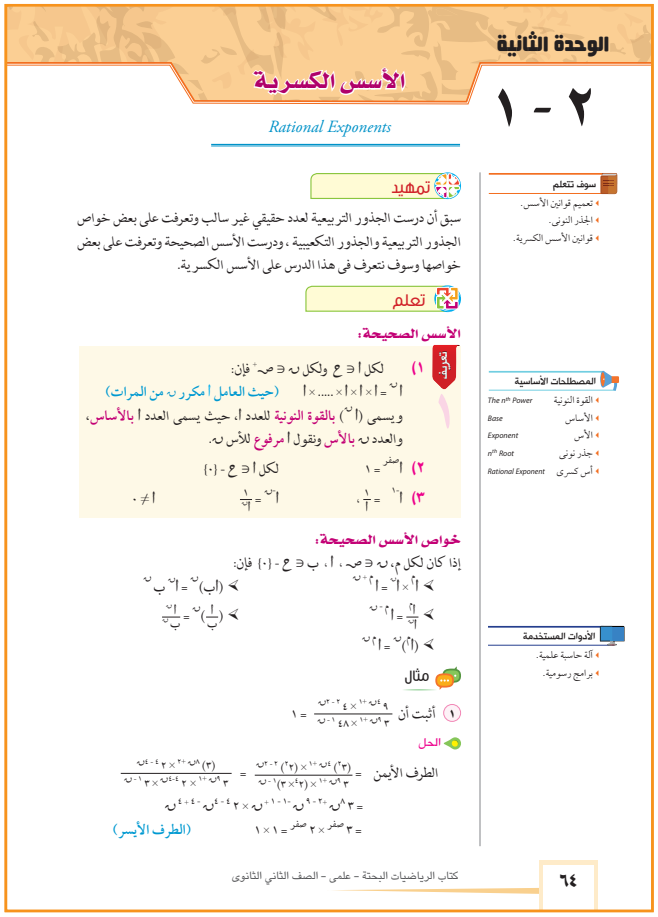
- الكتاب المدرسى من صـ ٦٤ إلى صـ ٧٠ – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

- استرجع مع طلابك الجذور التربيعية لعدد حقيقى غير سالب، وكذلك أمثلة للأسس الصحيحة وخواصها.

إجراءات الدرس

بين للطلاب الفرق بين مفهوم الأس للعدد أ والقوة النونية لنفس العدد كما جاء فى التعريف.



الوحدة الثانية

١ - ٢ الأسس الكسرية

Rational Exponents

سوف تتعلم
- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية
- القوة النونية The nth Power
- الأساس Base
- الأس Exponent
- جذر نونى nth Root
- أس كسرى Rational Exponent

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية ، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف فى هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

الأسس الصحيحة:

تعريف

١) لكل أ ∈ ع ولكل ن ∈ ص+ فإن: أ^ن = أ × أ × أ × ..... × أ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)
ويسمى (أ^ن) بالقوة النونية للعدد أ، حيث يسمى العدد أ بالأساس، والعدد ن بالأس ونقول أ مرفوع للأس ن.

٢) أ^صفر = ١ لكل أ ∈ ع - {٠}

٣) أ^١ = أ ، ١/أ = أ^-١ ، أ ≠ ٠

خواص الأسس الصحيحة:

إذا كان لكل م، ن ∈ ص ، أ، ب ∈ ع - {٠} فإن:
- أ^م × أ^ن = أ^(م+ن)
- (أ^م)^ن = أ^(م×ن)
- (أب)^ن = أ^ن ب^ن
- أ^م ÷ أ^ن = أ^(م-ن)
- (أ/ب)^ن = أ^ن / ب^ن

مثال

١) أثبت أن (٩ س^١٠ ص^٤ × ٣ س^-٢ ص^-٣) / (٣ س^١٠ ص^-١ × ٤٨ س^-١ ص^-٣) = ١

الحل

الطرف الأيمن = (٣)^٩ س^١٠ ص^٤ × (٣)^-٢ س^-٢ ص^-٣ / (٣)^٣ س^١٠ ص^-١ × (٤ × ٣)^-١ س^-١ ص^-٣
= ٣^٨ س^٢٠ ص^-٩ × ٣^-٢ س^-٢ ص^٣ / ٣^٣ س^١٠ ص^-١ × ٤^-١ × ٣^-١ س^-١ ص^-٣
= ٣^صفر × ٢^صفر = ١ × ١ (الطرف الأيسر)

كتاب الرياضيات البحتة – علمى – الصف الثانى الثانوى ٦٤

- وضح للطلاب مفهوم الأس السالب ، الأس الصفرى مع التنبيه على أن:

  أ^صفر = ١ حيث أ ≠ ٠ لأن صفر صفر كمية غير معينة.

- ناقش مع طلابك خواص الأسس الصحيحة مؤكدًا على الشروط اللازمة حتى تكون هذه القوانين صحيحة .

- يمكنك إعطاء بعض الأمثلة البسيطة عقب كل قانون كتطبيق مباشر عليه حتى يتثنى للطالب فهم القانون ، ويمكنك الاستعانة ببعض الأمثلة الآتية:

١) أ^٢ × أ^٣ = ...
٢) أ^٥ ÷ أ^٣ = ...
٣) (س٢)^٢ = ...
٤) ٢^٣ × ٦^٢ ÷ ٢^٧ = ...
٥) (٣ × ٢^٧)^٣ ÷ ٢٣ = ...
٦) (٨ × ٢٦)^٢ ÷ (١٢)^٢ = ...
٧) ٣٦ × ٣^-٣ × ٢^-٢
٨) (٢٢)^٣ × (٢ - ٣)^٢ = ...
٩) (-٢)^٦ × ٢^٤ / ٨^٢ = ...
١٠) (٣√٨)^-٥ × ٤(٣√٨) × ٣√٨ = ...

- ناقش مع طلابك مثال (١) مع التأكيد على ضرورة تحليل الأساس إلى عوامله الأولية ووضع كل عامل فى صورة أس ، ثم تطبيق قوانين الأسس.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

▫ اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند (حاول أن تحل) صفحة ٦٥ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات

(١) ٣

(٢) الأيمن = $\frac{(-٥)\times٤\times٣^{-٢}س}{(-٢)\times٣\times٣^{-٢}س}$ = $\frac{١١}{١٥}$

فى بند تفكير ناقد ص (٦٥)

يهدف الى استيعاب مفهوم إشارة القوة النونية للعدد (أ ∈ ح) عندما يكون الأس زوجيًا أو فرديًا

أ $أ^{ن}$ > صفر ب $أ^{ن}$ < صفر

الجذر النونى:

▫ أشر إلى الطلاب بأن المعادلة $س^{٤}$ = ١٦ لها أربعة جذور، جذران حقيقيان هما ٢ ، -٢، وجذران مركبان هما ٢ت ، -٢ت.

▫ بين للطلاب أن المطلوب فى هذه الوحدة هو إيجاد الجذور الحقيقية فقط، ويمكن الحصول عليها بأخذ الجذر الرابع للعدد ١٦ مباشرة، ويجب التأكيد على أن الجذر الاساسى لهذا الجذور الأربعة هو الجذر الموجب، ويرمز له بالرمز $\sqrt[٤]{١٦}$ أو $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$

▫ المعادلة $س^{٣}$ = -٢٧ لها ثلاثة جذور؛ جذر حقيقى وحيد هو -٣ هو الجذر الأساسى، وجذران آخران مركبان، وللحصولُ على هذه الجذور المركبة كالآتى: $س^{٣}$ + ٢٧ = ٠

(س + ٣) ($س^{٢}$ - ٣س + ٩) = ٠

▫ العامل الآخر هو معادلة تربيعية يمكن إيجاد جذورها باستخدام القانون العام.

التقسيم المستمر (الحوار و المناقشة)

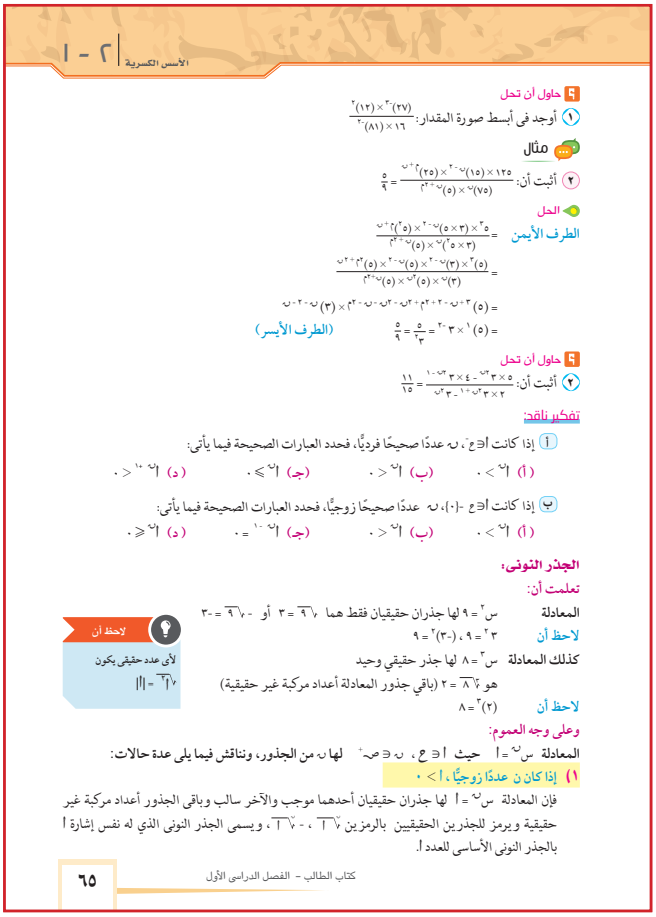
إجابات حاول أن تحل صـ٦٦

(٣) أ {٣ ، -٣} ب {٣} ج ϕ د -٤

الأخطاء الشائعة (بند تفكير ناقد)

قد يخلط بعض الطلاب بين إيجاد الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{٦٤}$ وهو خطأ شائع.

(٤) الجذر السادس للعدد ٦٤، هذا لفظ عام يعبر عن جميع الجذور السداسية للعدد ٦٤ منها اثنان حقيقيان هما ٢ ، -٢ وأربع جذور سداسية أخرى مركبة بينما $\sqrt[٦]{٦٤}$ له قيمة وحيدة هى ٢ **(الجذر السادس الاساسى للعدد ٦٤)**





PDF Compressor Pro

فى بند تعميم قوانين الأسس:

- اطرح على طلابك السؤال التالى: هل قوانين الأسس الكسرية هى نفس قوانين الأسس الصحيحة ؟
- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(٦٦ - ٦٨) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

إجابات حاول أن تحل صـ٦٧ ، صـ٦٨

٤) أ) ٥ ب) ϕ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) -٤٩

٥) أ) $أ^{٢}$ ب) $(س + ٢ص)^{٣}$

فى بند فسر لماذا؟ ساعد طلابك فى اكتشاف الفرق بين $(-٨)^{\frac{١}{٣}}$ و $(-٨)^{\frac{٢}{٦}}$، لأن $\sqrt[٦]{-٨}^{٢} \notin ع$

إرشادات للدراسة:

- أشر إلى الطلاب بالتأكيد عما يأتى عند تطبيق القوانين والتعريفات الآتية:

$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ بأن ن $\in$ صـ$^{+}$ - {١}، أ $\in$ ح.

$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ حيث ن $\in$ صـ - {١}، $\sqrt[ن]{أ} \in ع$.

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن عدد زوجى

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا مان ن عدد فردى

فمثلًا: $\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٤]{س^{٤}} = \sqrt[٦]{س^{٦}} = ... = |س|$ ، $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ ، $\sqrt[٥]{-س^{٥}}$

= -س ، ...

الأخطاء الشائعة: درب طلابك على استخدام قوانين الأسس بدقة دون الوقوع فى الأخطاء الآتية:

$\sqrt[ن]{أ + ب} \neq \sqrt[ن]{أ} + \sqrt[ن]{ب}$ بينما: $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

حيث $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$

الخطأ: $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٢}} = ٢$

الصواب: $= (\sqrt[١٠]{(-٣٢)})^{٢}$ غير معرف

وأكد على الطلاب بأن: $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{-٣٢} = -٢$ معرفة فى هذة الحالة

فى بند خواص الجذور النونية:

- أكد على الطلاب القاعدة التالية:

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى

حل المعادلات الآسية فى ع:

وضح للطلاب المفاهيم الآتية عند حل المعادلات الأسية تجنبًا للخطأ:

- إذا كان م عدد فردى وكان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$

فمثلا: إذا كانت $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن $س = ٣٢^{\frac{٢}{٣}} = ٤$



الأسس الكسرية | ٢ - ١

تعميم قوانين الأسس

قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

مثال

٣) أوجد قيمة كل مما يأتى (إن أمكن)

أ) $(١٦)^{\frac{١}{٢}}$ ب) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ جـ) $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}$

د) $(-٩)^{\frac{١}{٢}}$ هـ) $٦٤^{\frac{١}{٣}}$ و) $(٢٧)^{\frac{١}{٣}}$

الحل

أ) $(١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$ ب) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$

جـ) $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$ د) $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \notin ع$ [لاحظ أن $\sqrt{-٩} = ٣ت$]

هـ) $٦٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦^{\frac{١}{٢}})^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$ و) $(٢٧)^{\frac{-١}{٣}} = (\frac{١}{٢٧})^{\frac{١}{٣}} = (\frac{١}{٣})^{٤} = \frac{١}{٨١}$

حاول أن تحل

٤) أوجد قيمة كل مما يأتى (إن امكن):

أ) $(١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$ ب) $(-٨١)^{\frac{١}{٤}}$ جـ) $(١٢٨)^{\frac{١}{٧}}$ د) $-(٣٤٣)^{\frac{١}{٣}}$

فسر لماذا؟

العدد $(-٨)^{\frac{١}{٣}}$ معرف فى ع $\sqrt[٣]{-٨} = -٢ \in ع$ ، بينما العدد $(\sqrt[٦]{-٨})^{٢}$ غير معرف فى ع

خواص الجذور النونية Properties of n^{th} Roots

١) $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب $\neq ٠$ حيث كل من $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$

مثال

٤) أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ) $\sqrt{١٨ أ^{٣} ب^{٥}}$ ب) $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$

الحل

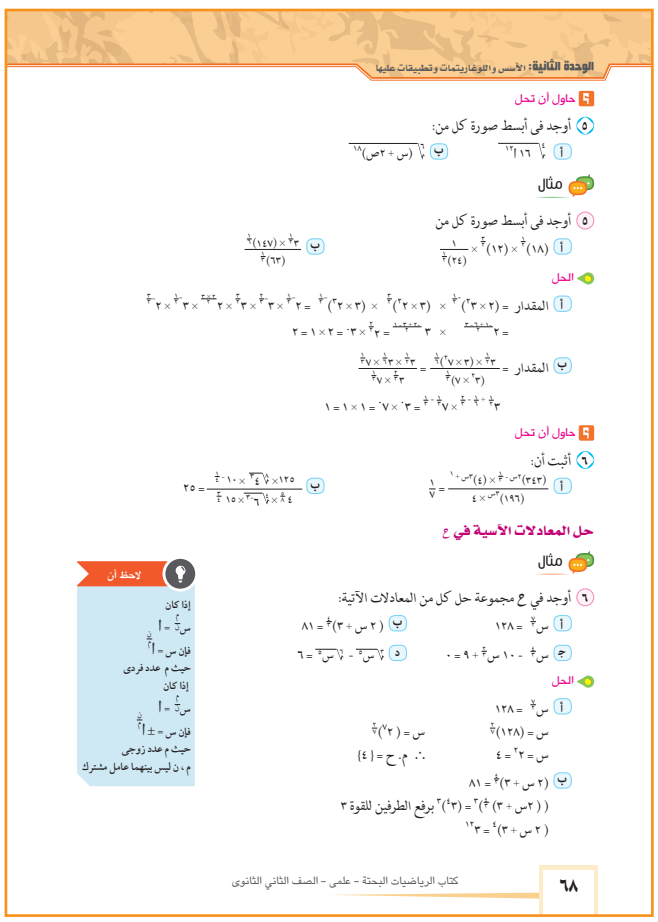
أ) $\sqrt{١٨ أ^{٣} ب^{٥}} = \sqrt{٩ \times ٢ \times أ^{٢} \times أ \times ب^{٤} \times ب} = ٣ أ ب^{٢} \sqrt{٢ أ ب}$

ب) $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{٨}} = ٢ |س| ص^{٢}$

لاحظ أن

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى



حاول أن تحل

٥) أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ) $\sqrt[٤]{١١٦^{١١}}$ ب) $\sqrt[٥]{(س + ٢ص)^{١٨}}$

مثال

٥) أوجد فى أبسط صورة كل من

أ) $\frac{(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{١}{٣}}}{(٢٤)^{\frac{١}{٣}}}$ ب) $\frac{٣^{\frac{١}{٣}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٣}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٣}}}$

الحل

أ) المقدار $= \frac{(٣ \times ٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٢})^{\frac{١}{٣}}}{(٣ \times ٢^{٣})^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times ٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}} \times ٢^{\frac{٢}{٣}}}{٣^{\frac{١}{٣}} \times ٢^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٣^{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}} \times ٢^{\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}} = ٣^{\frac{٣}{٦}} \times ٢^{\frac{٦}{٦}} = ٣^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = \sqrt{٣} \times ٢$

ب) المقدار $= \frac{٣^{\frac{١}{٣}} \times (٧ \times ٣)^{\frac{١}{٣}}}{(٧ \times ٣^{٢})^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣}} \times ٣^{\frac{١}{٣}}}{٧^{\frac{١}{٣}} \times ٣^{\frac{٢}{٣}}}$

$= ٣^{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}} = ٣^{٠} \times ٧^{٠} = ١ \times ١ = ١$

حاول أن تحل

٦) أثبت أن:

أ) $\frac{(٣٤٣)^{س-\frac{٢}{٣}} \times (٤)^{س+١}}{(١٩٦)^{س} \times ٤^{س}} = \frac{١}{٧}$ ب) $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٤]{١٠} \times \sqrt[٤]{٣}}{\sqrt[٤]{١٥} \times \sqrt[٤]{٦}} = ٢٥$

حل المعادلات الأسية فى ع

مثال

٦) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٢} = ١٢٨$ ب) $(٢ س + ٣)^{٤} = ٨١$

جـ) $س^{٤} - ١٠ س^{٢} + ٩ = ٠$ د) $\sqrt{س^{٣}} - س^{\frac{١}{٢}} = ٦$

الحل

أ) $س^{٢} = ١٢٨$

$س = (١٢٨)^{\frac{١}{٢}}$ $س = (٢^{٧})^{\frac{١}{٢}}$

$س = ٢^{\frac{٧}{٢}} = ٤$ $\therefore$ م.ح = {٤}

ب) $(٢ س + ٣)^{٤} = ٨١$

$((٢ س + ٣)^{٤})^{\frac{١}{٤}} = (٣)^{٢}$ برفع الطرفين للقوة $\frac{١}{٤}$

$(٢ س + ٣)^{١} = ٣^{٢}$

لاحظ أن

إذا كان

$س^{ن} = أ$

فإن $س = \pm أ^{\frac{١}{ن}}$

حيث م عدد فردى

إذا كان

$س^{ن} = أ$

فإن $س = \pm أ^{\frac{١}{ن}}$

حيث م عدد زوجى

م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

PDF Compressor Pro

- إذا كان م عددًا زوجيًّا (بشرط أن م ، ن ليس بينهما عامل مشترك) وكان س $^{\frac{م}{ن}}$ = أ فإن س = $\pm$ أ$^{\frac{1}{م}}$

فمثلاً: إذا كان س$^{\frac{3}{4}}$ = ١٦ فإن س = $\pm$ ١٦$^{\frac{1}{4}}$ × ٢^{٤} = $\pm$ ٨

- بين للطلاب أنه يمكن التحقق من صحة الحل، وذلك بالتعويض فى المعادلة الأصلية.

تمارين اثرائية:

اثبت أن

(١) $\frac{٣^{٢} \times ٤ \times ٣^{٤}}{٩ \times ٤^{٢}} = ١٨$ (٢) $\frac{٣(٢٥) \times ٣(٤)}{٢(٨) \times ٥(٥)} = ٥$

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما جاء فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

أ ± ٢٧ ب ١ جـ ± ٣٢

إجابات تمارين الدرس الأول:

(١) ١ (٢) أ ٤ ب $\frac{١٢٥}{٨}$ جـ $\frac{١٢٥}{٨}$ د $\frac{٢}{٣}$ هـ ٤

(٣) أ ٤ ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١٦ د $(\sqrt[٥]{\text{س}})^{٤}$

هـ ٢ و {٠، ٤} ز ٢٥

(٤) **اكتشف الخطأ:** ناقش طلابك فى الإجابات المختلفة وتفسيراتهم ، وضح أين الخطأ فى:

أ الخطأ العدد السالب مرفع لأس زوجى

ب س = $(\sqrt[٤]{٣\pm})^{٤}$ = ± ٣.

(٥) $\sqrt[٤]{١٩}$

(٦) أ $\frac{١}{٤}$ ب ± ٣ جـ ٩ د {٠، ± $\sqrt[٤]{٥}$}

هـ {١، ٣٢} و {٩، ٢٥} ز {٢٧} ح {-٢، ٤}

(٧) ٣٦

(٨) أ س ب ٢٤ أ

نشاط: آليات تنفيذ النشاط

يهدف هذا النشاط إلى تدريب الطالب على مهارة استخدام الآلة الحاسبة فى تبسيط الأسس الكسرية.



٢ - ١ الأسس الكسرية

٢ س + ٣ = ± (١٢)$^{\frac{1}{2}}$ ٢ س + ٣ = ± ٣^{٢}

إما ٢ س + ٣ = ٢٧ ٢ س = ٢٤ ∴ س = ١٢

أو ٢ س + ٣ = -٢٧ ٢ س = -٣٠ ∴ س = -١٥

م.ح = {١٢، -١٥}

جـ س$^{\frac{2}{3}}$ - ١٣ س$^{\frac{1}{3}}$ + ٣٦ = ٠

(س$^{\frac{1}{3}}$ - ٩) (س$^{\frac{1}{3}}$ - ٤) = ٠

إما س$^{\frac{1}{3}}$ - ٩ = ٠ أو س$^{\frac{1}{3}}$ - ٤ = ٠

س$^{\frac{1}{3}}$ = ٣^{٢} س$^{\frac{1}{3}}$ = ٢^{٢}

س = ± (٣)^{٢} س = ± (٢)^{٢}

س = ± ٢٧ س = ± ٨

م.ح = {٢٧، -٢٧، ٨، -٨}

د $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ - ٣١ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ - ٣٢ = ٠

س$^{\frac{2}{3}}$ - ٣١ س$^{\frac{1}{3}}$ - ٣٢ = ٠

(س$^{\frac{1}{3}}$ - ٣٢) (س$^{\frac{1}{3}}$ + ١) = ٠

إما س$^{\frac{1}{3}}$ - ٣٢ = ٠ أو س$^{\frac{1}{3}}$ + ١ = ٠

س$^{\frac{1}{3}}$ = ٣٢^{١} س$^{\frac{1}{3}}$ = -١ مرفوض

س = (٢)^{٥}

س = ٣٢

م.ح = {٣٢}

حاول أن تحل

(٧) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ س$^{\frac{1}{4}}$ = ٨١ ب (س + ١)$^{\frac{2}{3}}$ = ٣٢ جـ $\sqrt[٤]{\text{س}^{٤}}$ - ٣ $\sqrt[٤]{\text{س}^{٢}}$ = ٤

تمـــاريـــن ٢ - ١

(١) اختصر $\frac{٨^{\frac{1}{٤}} \times ٢^{-٢}}{٦^{٢} \times ٣^{٢}}$

(٢) متى تكون العلاقة $\sqrt[٧]{\text{أ ب}} = \sqrt[٧]{\text{أ}} \times \sqrt[٧]{\text{ب}}$ صحيحة لجميع قيم أ ، ب الحقيقية.

(٣) أكمل ما يأتي:

أ (٨)$^{\frac{2}{3}}$ فى أبسط صورة تساوى ..... ب (٦$\frac{١}{٤}$)$^{\frac{1}{2}}$ فى أبسط صورة تساوى .....

جـ ($\frac{١٦}{٢٥}$)$^{-\frac{1}{2}}$ فى أبسط صورة تساوى ..... د $\sqrt[٣]{(\frac{٣}{٨})^{٢}}$ فى أبسط صورة تساوى .....

هـ (٥$^{-٢}$ - ٣$^{-١}$)$^{-١}$ فى أبسط صورة تساوى .....

(٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان ٥^{س} = ٢ فإن ٢٥$^{-س}$ تساوى ..... (١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)

ب (٢^{٧} ÷ ٢^{٥})$^{-٢}$ تساوى ..... (٢ ، -٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$)

جـ إذا كان س$^{\frac{1}{4}}$ = ٦٤ فإن س تساوى ..... (٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)

د أي مما يأتي لا يساوي $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ ($(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٤}$ ، $\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$ ، س$^{\frac{4}{3}}$ ، (س$^{\frac{1}{3}}$)^{٤})

هـ إذا كان ٤ س^{٥} = ١٢٨ فإن س تساوى ..... (٤ ، ± ٢ ، ٢ ، -٢)

و مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة (س - ٢)$^{\frac{4}{3}}$ = ١٦ يساوي ..... ((صفر) ، {٤} ، {٨} ، {٤، ٠})

ز إذا كان ٣^{أ} = ٤^{٣} فإن ٩$^{\frac{1}{2}}$ + ١٦$^{\frac{1}{4}}$ تساوى ..... (٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)

(٥) **اكتشف الخطأ:**

أ -٨١ = (-٩)$^{\frac{2}{3}}$ = $\sqrt[٣]{(-٩)^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{-٧٢٩}$ = ٩

ب إذا كان س^{٤} = ٨١ فإن س = $\sqrt[٤]{٨١}$ ∴ س = ٣

(٦) **الربط بالهندسة:** إذا كان طول نصف قطر كرة ن، يعطى بدلالة الحجم ح من العلاقة ن = $(\frac{٣ح}{٤\pi})^{\frac{1}{3}}$. أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

(٧) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ س$^{\frac{1}{5}}$ = $\frac{١}{٣٢}$ ب س^{٤} = ٨١

جـ $\sqrt[٥]{(\text{س}-١)^{٥}}$ = ٣٢ د (س^{٢} - ٥ س + ٩)$^{\frac{2}{3}}$ = ٢٤٣

هـ س$^{\frac{1}{3}}$ - ٥ س$^{\frac{1}{6}}$ + ٤ = صفر و س + ١٥ = ٨ $\sqrt[٣]{\text{س}}$

ز $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ - ٢٥ $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + ٥٤ = صفر ح (٢س - ١)^{٤} = (س + ٣)^{٤}

(٨) إذا كان س$^{\frac{1}{3}}$ + ٣ ص$^{\frac{1}{3}}$ = ٢٧ فما قيمة س + ص

(٩) **تفكير ابداعى:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان س > صفر فإن: $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ - $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ - $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ + ١٠ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ + ١ = ... (س ، -س ، صفر ، -١)

ب إذا كان أ = $\frac{٢\sqrt{٧}}{\sqrt{٧}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي ..... (أ^{١٢} ، أ^{١٦} ، أ^{١٩} ، أ^{٢٤})

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

أ $\sqrt[٧]{\frac{٣^{٣} \times ٧^{٢٧}}{٧^{٢}}}$

ب (٢٣)$^{\frac{1}{2}}$ + (٠,٠١)$^{\frac{1}{2}}$



PDF Compressor Pro

٢ - ٢ الدالة الأسية
Exponential function

خلفية

سبق أن درس الطالب الدوال كثيرات الحدود على الصورة.
د (س) = أ$_{ن}$ + أ$_{ن-١}$ س + أ$_{ن-٢}$ س^{٢} + ... أ$_{٠}$ س^{ن} وحيث مجالها ع ومجالها المقابل ع، ودرس كذلك التمثيل البيانى لبعض هذه الدوال مثل الدالة الخطية، والدالة التربيعية والدالة التكعيبية.
وفى هذا الدرس سوف يتعرف الطالب دالة جديدة تسمى الدالة الأسية وفيها يكون المتغير المستقل (س) هو الأس كما يدرس تمثيلها البيانى.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يرسم الشكل البيانى للدالة الأسية.
- يتعرف على دالتى النماء والتضاؤل.
- يحل تطبيقات حياتية على الدالة الأسية.

مفردات أساسية

- دالة أسية – نمو أس – تضاؤل أسى.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - جهاز عرض فوق رأس - حاسب آلى - برامج رسومية - ورق بيانى.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى صـ٧١ إلى صـ٧٦ - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة:

نشاط: عمل تعاونى

قسم طلابك إلى مجموعات عمل .

- اطلب من طلابك تنفيذ النشاط الموجود بكتاب الطالب صـ٧١ و إكمال الجدول.
- ناقش الإجابات المختلفة ودونها على السبورة



الوحدة الثانية

٢ - ٢ الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and it Applications

سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية
- دالة أسية. *Exponential Function*
- نمو أسى. *Exponential Growth*
- تضاؤل أسى. *Exponential Decay*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

نشاط

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانٍ، ويستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤	.....	.....	.....	٦٤

١) أكمل الجدول السابق.
٢) عبّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.
٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.
٤) عبّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.

تعلم

الدالة الأسية *Exponential Function*

تعريف: تسمى الدالة د حيث د(س) = أ^{س} حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ∈ ع بالدالة الأسية.

مثال:
- د(س) = ٢^{س} دالة أسية أساسها (٢) وأسها (س).
- د(س) = ٥$^{س+١}$ دالة أسية أساسها (٥) وأسها (س+١).
- د(س) = $(\frac{١}{٣})^{-س}$ دالة أسية أساسها $(\frac{١}{٣})$ وأسها (٢س)

حاول أن تحل

١) بين أى الدوال الآتية دالة أسية.
- أ) د(س) = س^{٢}
- ب) د(س) = (٢)^{س}
- ج) د(س) = $\frac{٣}{س+١}$
- د) د(س) = س^{٣} - ١
- هـ) د(س) = $(\frac{٢}{٤})^{س-١}$
- و) د(س) = (-٢)^{س}

تذكر أن
الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.
الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لايساوى الواحد.

٧١ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

- توصل مع طلابك إلى الإجابات الصحيحة.

إجابة أسئلة النشاط

١) ٨ ، ١٦ ، ٣٢
٢) ص = ٢^{س}
٣) ص = ٢^{٨} = ٢٥٦ خلية

- يجب أن يفرق الطلاب بين الدالة الجبرية د(س) = س^{٢}، د(س) = س^{٣} والدالة الأسية د(س) = ٢^{س}، د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$
- أساس الدالة الأسية د (س) = أ^{س} يجب أن يكون عددًا موجبًا لا يساوى ١ فنجد أن: د (س) = (-٣)^{س}

ليست دالة أسية لأن الأساس سالب،

كذلك: د (س) = (١)^{س} ليست دالة أسية لأن الأساس = ١

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

- اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند (حاول أن تحل) صفحة ٧١ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات

١) ب) أسية أساسها ٢ وأسها س
هـ) أسية أساسها $(\frac{٣}{٤})$ وأسها س - ١
و) أسية أساسها (٢٠) و أسها س

PDF Compressor Pro

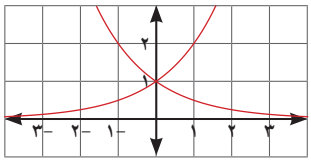
التمثيل البيانى للدالة الأسية

ناقش مع طلابك مجال الدالة الأسية ومداها والشكل العام للمنحنى عندما أ > ١ وكذلك عندما ٠ < أ < ١ أو استعن بفترة لقيم ر مناسبة، لإيجاد مجموعة من النقاط التى تقع على منحنى الدالة ثم استخدام القلم الرصاص فى توصيل هذه النقاط، وفى هذا الجزء يجب التأكيد على ما يلى:

- فى الدالة د (س) = أ^س حيث أ > ١ تسمى دالة نماء (تزايدية) وتكون الدالة أكثر نماءً كلما زادت قيمة أ
- أيضًا فى الدالة د (س) = أ^س حيث ٠ < أ < ١ دالة تضاؤل (تناقصية)، وتكون أكثر تضاؤلًا كلما اقتربت قيمة أ من الصفر.

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

- اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند (حاول أن تحل) صـ٧٢ مع متابعة إجاباتهم.



إجابات

(٢) د (ر) = ٢^س المجال = ع
المدى = ع+
متزايدة على مجالها حيث أ > ١

د (ر) = (١/٢)^س المجال = ع المدى = ع+
متناقصة على مجالها حيث ٠ < أ < ١

تفكير ناقد صـ٧٢

ينمى قدرات الطالب الإبداعية فى التعرف بأنه إذا كان الأساس ٠ < أ < ١ فإن القوة تقل فى القيمة بزيادة الأس أى أن التناسب عكسيًّا بينما يكون طرديًّا عندما تكون أ > ١ .

الإجابة:

(٣) حيث إن تكون ٠ < أ < ١ فإن الدالة د (س) = أ^س تكون تناقصية على مجالها.

∴ ٠ < √٥ - ٢ < ٠.٧ ترتيب س

∴ د (٧) < د (√٥ - ٢) < د (٠) < د (-٢)

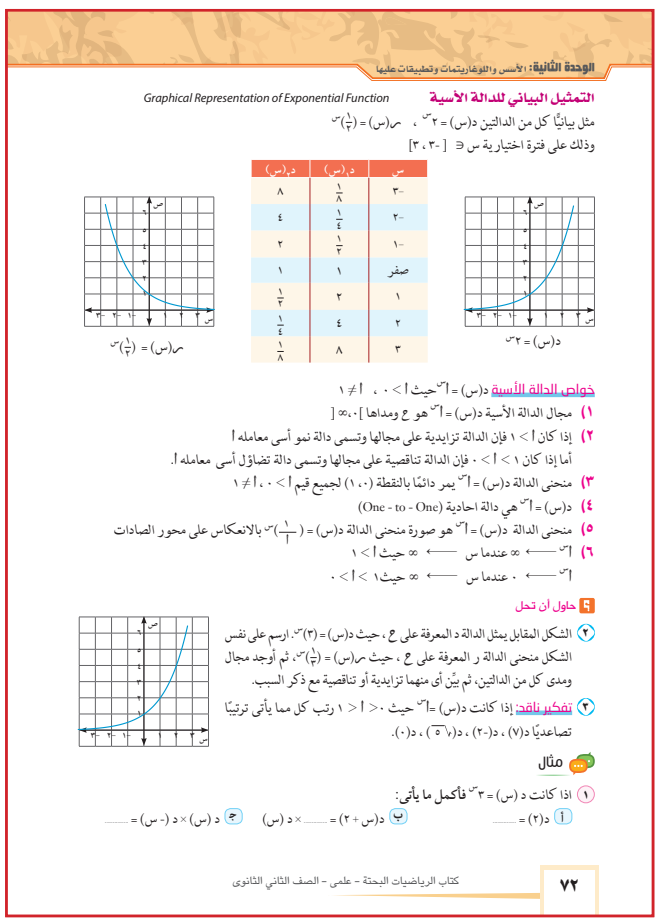
إرشادات للدراسة:

النمو الأسى والتضاؤل الأسى ص (٧٣)

- بين إلى الطلاب أن دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى تظهر فى كثير من التطبيقات الحياتية، ومن أشهرها التزايد السكانى وتكاثر بعض الكائنات بالانقسام كذلك فى الفائدة المركبة للبنوك.

إثبات قاعدة النمو الأسى

بفرض عدد السكان أ يتزايد بانتظام بمعدل ر سنويًّا (نسبة مئوية)



الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

التمثيل البياني للدالة الأسية Graphical Representation of Exponential Function

مثل بيانيًّا كل من الدالتين د(س) = ٢^س ، ر(س) = (١/٢)^س وذلك على فترة اختيارية س ∈ [-٣، ٣]

س	د (س)	د(-س)
-٣	١/٨	٨
-٢	١/٤	٤
-١	١/٢	٢
صفر	١	١
١	٢	١/٢
٢	٤	١/٤
٣	٨	١/٨

د(س) = ٢^س

ر(س) = (١/٢)^س

خواص الدالة الأسية د(س) = أ^س حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١

١) مجال الدالة الأسية د(س) = أ^س هو ع ومداها]٠، ∞[

٢) إذا كان أ > ١ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معامله أ

أما إذا كان ٠ < أ < ١ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ.

٣) منحنى الدالة د(س) = أ^س يمر دائمًا بالنقطة (٠، ١) لجميع قيم أ > ٠، أ ≠ ١

٤) د(س) = أ^س هي دالة احادية (One - to - One)

٥) منحنى الدالة د(س) = أ^س هو صورة منحنى الدالة د(س) = (١/أ)^س بالانعكاس على محور الصادات

٦) أ^س ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١

أ^س ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ٠ < أ < ١

حاول أن تحل

(٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث د(س) = (٣)^س. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث ر(س) = (١/٣)^س، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.

تفكير ناقد إذا كانت د(س) = أ^س حيث ٠ < أ < ١ رتب كل مما يأتى ترتيبًا تصاعديًا د(٧) ، د(-٢) ، د(√٥) ، د(٠).

مثال

(١) اذا كانت د (س) = ٣^س فأكمل ما يأتى:

أ د(٢) = ... ب د(س + ٢) = ... × د (س) ج د (س) × د (- س) = ...

الحل

أ د(٢) = ٣^٢ = ٩

ب د (س + ٢) = ٣^(س+٢) = ٣^س × ٣^٢ = ٩ د (س)

ج د(س) × د (-س) = ٣^س × ٣^(-س) = ٣^(س-س) = ٣^٠ = ١

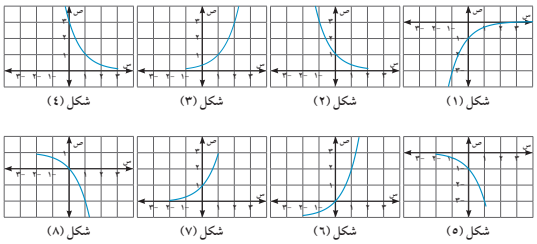
حاول أن تحل

(٤) فى كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البيانى المناسب حيث:

أ ص = ٣^س ب ص = ٣^-س ج ص = -٣^س

د ص = -٣^-س هـ ص = ٣^-س - ١ و ص = ٣^-س - ١٠

ز ص = ٣^-س - ١



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

شكل (٥) شكل (٦) شكل (٧) شكل (٨)

تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة أ^س = ب

النمو والتضاؤل: Growth and Decay

يوجد العديد من الظواهر فى الحياة اليومية يمكن أن تنمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الأضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة.

وفى مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

أولًا: النمو الأسى: Exponential growth

يمكن استخدام الدالة د، حيث د(ن) = أ (١ + ر)^ن لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

(ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

PDF Compressor Pro

∴ عدد السكان العام الأول = أ + ر أ = أ (١ + ر)

عدد السكان العام الثانى = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر)

= أ (١ + ر)^{٢} وهكذا.

∴ عدد السكان بعد ن عام = أ (١ + ر)^{ن}

نلاحظ أنه كلما زادت قيمة ر كلما زادت الدالة نماء.

أيضًا إذا كانت ر سالبة، فإن الدالة د (ن) = أ (١ - ر)^{ن} تمثل دالة تضاؤل.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند (حاول أن تحل) ، صـ٧٣، ٧٤ ومتابعة إجاباتهم.

إجابات

٤ أ ٧ ب ٢ جـ ٥ د ١

هـ ٦ و ٣ ز ٤ حـ ٨

٥ أ ع = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)^{ن}

حيث ن عدد الأسابيع ، ع عدد النحل.

ب بعد ٦ أسابيع، عدد النحل = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)^{٦} ≃ ٢٢٩

٦ أ ص = ٤٠ (١ - ٠,١)^{ن}

حيث ص الكمية المتبقية من العقار، ن عدد الساعات.

ب كمية العقار المتبقية بعد ٤ ساعات.

= ٤٠ (١ - ٠,١)^{٤} = ٢٦,٢٤٤ مليجرام.

تمارين إثرائية:

١ إذا كانت ر هى صورة الدالة د(س) = ٣^{س} بعد إزاحتها وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن قاعدة الدالة ر هى ..... [الجواب ر (س) = ٣$^{س-٢}$]

٢ إذا قطع المستقيم الرأسى س = ٣ منحنيا الدالتين د (س) = ٣^{س} ، ر (س) = ٣^{س} + ٢ فى نقطتين أ ، ب على الترتيب فإن طول $\overline{أب}$ يساوى ..... [الجواب: ٢ وحدة]

إجابات تمارين الدرس الثانى

١ أ ب ب ج

جـ ب د ب

هـ أ

٢ ب ٥، س

هـ $\frac{٢}{٣}$ ، س -١

مثال ٢ الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربح سنوى مركب ر (نسبة مئوية) لعدد ن من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوى إلى س فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

جـ = أ (١ + $\frac{ر}{س}$)$^{ن س}$

مثال

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ ٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية:

أ العائد السنوى ب العائد الربع سنوى جـ العائد الشهرى

الحل

باستخدام العلاقة جـ = أ (١ + $\frac{ر}{س}$)$^{ن س}$ حيث س التقسيم السنوى :

(أ) العائد السنوى ∴ س = ١

جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)$^{١٠ \times ١}$ = ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه

(ب) العائد ربع سنوى ∴ س = ٤

جـ = ٥٠٠٠ (١ + $\frac{٠,٠٨}{٤}$)$^{٤٠ \times ١}$ = ١١٠٤٠,٢ جنيه

(جـ) العائد الشهرى ∴ س = ١٢

جـ = ٥٠٠٠ (١ + $\frac{٠,٠٨}{١٢}$)$^{١٢٠ \times ١}$ = ١١٠٩٨,٢ جنيه .

حاول أن تحل

٥ يتكاثر النحل فى أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

ثانيًا: التضاؤل الأسى: Exponential decay

يمكن استخدام الدالة د حيث د(ن) = أ (١ - ر)^{ن} لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

الربط بالتجارة: اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ن سنة من شرائها.

ثانيًا: قدر لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

أ = ١٢٠٠٠٠ ، ر = $\frac{١٢}{١٠٠}$ = ٠,١٢ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى: د(ن) = أ(١ - ر)^{ن} وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:

أى أن: د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^{ن} د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (١ - ٠,١٢)^{ن}

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:

د(٥) = ١٢٠٠٠٠(٠,٨٨)^{٦} = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

حاول أن تحل

٦ الربط بالطب: يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبى، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

تمارين ٢ - ٢

١ أكمل ما يأتى:

أ تكون الدالة د حيث د(س) = أ^{س} دالة أسية إذا كانت أ ..... ، س .....

ب الدالة الاسية ر حيث ر(س) = ٣ $\times$ ١٠^{س} أساسها هو .....

جـ الدالة و حيث و(س) = (-$\frac{١}{٢}$)$^{س \times ١٠}$ ليست دالة أسية لأن .....

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = أ^{س} مع المستقيم س = ٠ هى النقطة (..... ، .....)

هـ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = ٣^{س}، ر(س) = ($\frac{١}{٣}$)^{س} هو .....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ < ٠ (ب) أ < ١ (جـ) أ > ٠ < ١ (د) أ = ١

ب تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت:

(أ) أ < ٠ (ب) أ > ٠ (جـ) أ > ٠ < ١ (د) -١ < أ < ٠

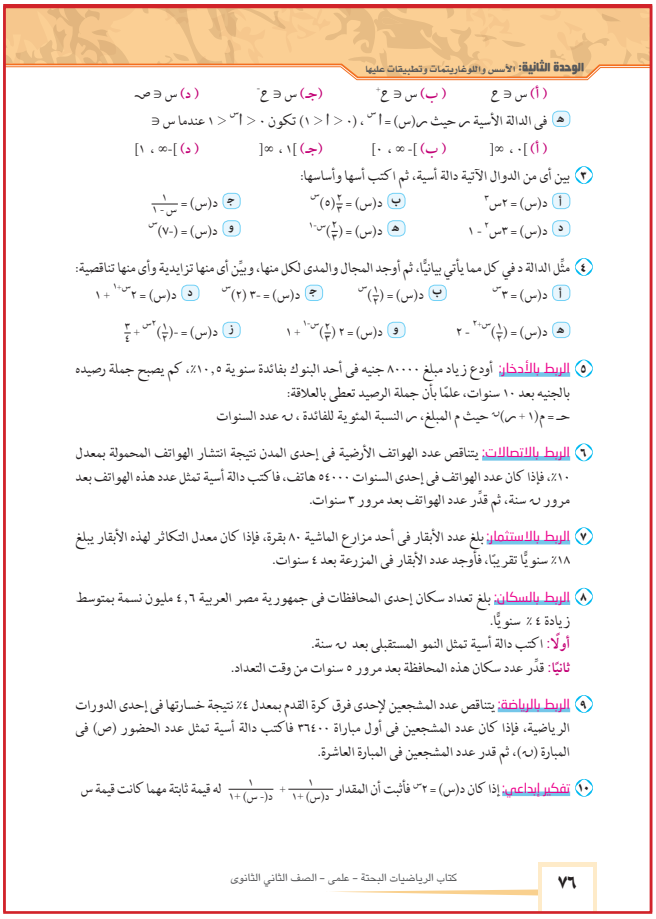
جـ الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^{س} ، أ < ١ يقترب خطها البيانى من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د فى الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^{س} ، أ < ١ تكون د(س) > ١ عندما:

PDF Compressor Pro



الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

(أ) س ∈ ع (ب) س ∈ ع+ (جـ) س ∈ ع- (د) س ∈ صـ

هـ) في الدالة الأسية ر حيث ر(س) = أ^س ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < أ^س < ١ عندما س ∈

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

٢) بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ) د(س) = ٢س^٣ ب) د(س) = (٣/٥)^س جـ) د(س) = ١/(١٠-س)

د) د(س) = ٣س^٢ - ١ هـ) د(س) = (٢/٣)^س^١٠ و) د(س) = (-٧)^س

٤) مثّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيّن أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

أ) د(س) = ٣^س ب) د(س) = (١/٣)^س جـ) د(س) = -٣ (٢)^س د) د(س) = ٢^س^١٠ + ١

هـ) د(س) = (١/٣)^س^٢ - ٢ و) د(س) = ٢ (٣/٢)^س^١٠ + ١ ز) د(س) = -(١/٣)^س^٣ + ٣/٤

٥) الربط بالادخار: أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه في أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:
حـ = م(١ + ر)^ن حيث م المبلغ، ر النسبة المئوية للفائدة، نـ عدد السنوات

٦) الربط بالاتصالات: يتناقص عدد الهواتف الأرضية في إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف في إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور نـ سنة، ثم قدّر عدد الهواتف بعد مرور ٣ سنوات.

٧) الربط بالاستثمار: بلغ عدد الأبقار في أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا، فأوجد عدد الأبقار في المزرعة بعد ٤ سنوات.

٨) الربط بالسكان: بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات في جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.
أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلي بعد نـ سنة.
ثانيًا: قدّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

٩) الربط بالرياضة: يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها في إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين في أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) في المباراة (نـ)، ثم قدر عدد المشجعين في المباراة العاشرة.

١٠) تفكير إبداعي: إذا كان د(س) = ٣^س فأثبت أن المقدار ١/(د(س) + ١) + ١/(د(-س) + ١) له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

التمارين من ٥ - ١٠ تتميز بربطها بالقضايا المتضمنة و المتعلقة بالبيئة.

٤) ٢١٧١٢٦ جنيهًا

٥) ص = ٥٤٠٠٠ (٠,٩)^ن ٥٤

٦) ١٥٥

٧) أ) ٤,٦ × ١٠^٦

ب) ٥,٤ × ١٠^٦

٨) ٣٦٤٠٠ (١,٠٤)^ن ، ٥٣٨٨١

٩) **تفكير إبداعي**

المقدار = ١/(٢^س + ١) + ١/(٢^-س + ١)

= ١/(٢^س + ١) + ٢^س/(٢^س + ١) = (٢^س + ١)/(٢^س + ١) = ١

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٣) أ) ع ،]٠ ، ∞[، تزايدية

ب) ع ،]٠ ، ∞[، تناقصية

جـ) ع ،]-∞ ، -٣[تزايدية

د) ع ،]٣ ، ∞[تزايدية

هـ) ع ،]-٧/٤ ، ∞[تزايدية

و) ع ،]٠ ، ∞[

ز) ع ،]-∞ ، ٣/٤[تناقصية

PDF Compressor Pro

٢ - ٣ المعادلات الأسية
Exponential equations

خلفية
سبق أن درس الطالب فى المرحلة الإعدادية الأسس والمعادلات الأسية، وتعلم أنه إذا تساوى طرفان أسيان، وكان أساسهما متساوٍ فإن الأس يكون متساويًا، وفى هذا الدرس يستكمل الطالب دراسة المعادلات الأسية لكن بأسس نسبية وأساسات جذرية تتطلب بعض المفاهيم والمهارات من الطالب.

مخرجات الدرس
فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يحل المعادلة الأسية جبريًا.
- يحل المعادلة الأسية بيانيًا.
- يحل تطبيقات حياتية على المعادلة الأسية.

مفردات أساسية:
معادلة أسية - حل جبرى - حل بياني.

المواد التعليمية المستخدمة:
السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية مثل (geogebra) ورق رسم بيانى.

طرق التدريس المقترحة:
- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات .
- مكان التدريس – الفصل الدراسى.

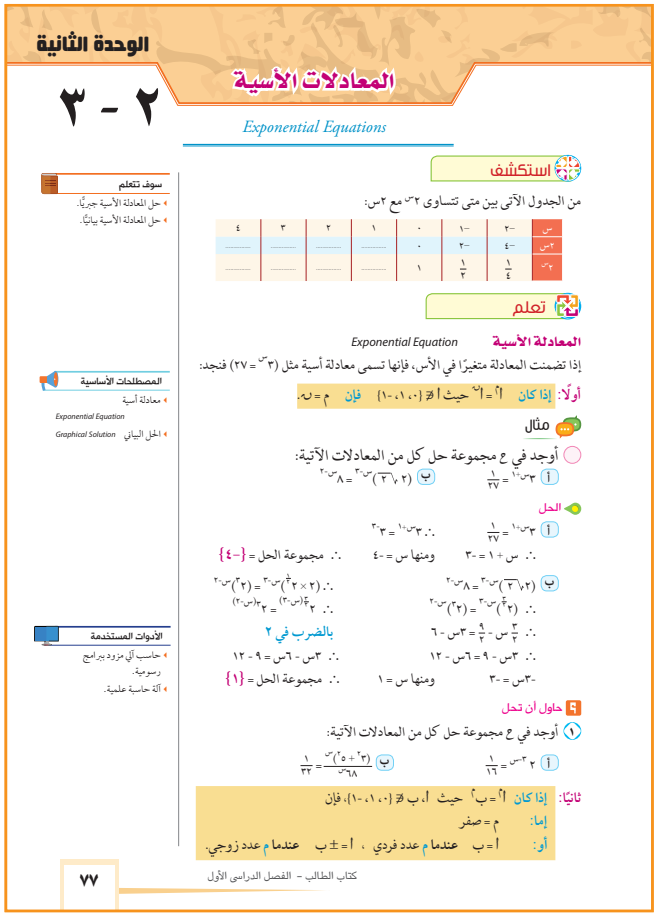
مصادر التعلم
الكتاب صـ٧٧ إلى صـ٨٠.

التهيئة
- استرجع مع طلابك ما ورد فى الدرس الأول والثانى .
- ناقش مع طلابك الجدول الموضح في بند استكشف وساعدهم في إكمال الخلايا الفارغة للجدول و الإجابة عن السؤال الموضح وفقًا للقيم التى تم الحصول عليها.
- ناقش مع طلابك مفهوم المعادلة الأسية فى البند (أولاً):

$أ^{س} = أ^{ب}$ حيث $أ \neq \{0، 1، -1\}$ حيث تكون س = ب وبين اليهم كيف تم استثناء الأعداد ٠ ، ١ ، -١ من القاعدة، ولماذا لا تحقق هذه القيم تلك القاعدة؟

إجراءات الدرس:
ناقش طلابك فى البند ثانيًا الذى ينص على أن:

$أ^{س} = ب^{س}$ حيث $أ، ب \neq \{0، 1، -1\}$ فإن م = صفرًا أو أ = ب عندما م عدد فردى أو $أ = |ب|$ عندما م عدد زوجى.



الوحدة الثانية

٢ - ٣ المعادلات الأسية

Exponential Equations

استكشف

من الجدول الآتى بين متى تتساوى $٢^{س}$ مع $٢^{س}$:

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
$٢^{س}$	٤	٢	١	٢	٤	٨	١٦
$٢^{س}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	.....	.....	.....	.....

تعلم

المعادلة الأسية Exponential Equation

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل $٣^{س} = ٢٧$ فنجد:

أولًا: إذا كان $أ^{س} = أ^{ص}$ حيث $أ \neq \{0، 1، -1\}$ فإن م = ن.

مثال

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\frac{١}{٢٧} = ٣^{س+١}$ ب $(٢)^{س+٣} = (٢٧)^{س}$

الحل

أ $\frac{١}{٢٧} = ٣^{س+١}$ ∴ $٣^{-٣} = ٣^{س+١}$

∴ س + ١ = -٣ ومنها س = -٤ ∴ مجموعة الحل = {-٤}

ب $(٢)^{س+٣} = (٢٧)^{س}$ ∴ $(٢)^{س+٣} = (٣^{٣})^{س}$

∴ $(٢)^{س+٣} = (٢)^{٣س}$ ∴ $٣ + س = ٣س$

∴ $٣ = ٢س$ بالضرب في $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ومنها س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

حاول أن تحل

أ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+٢} = \frac{١}{١٦}$ ب $(٣)^{س+٢} = \frac{(٥)^{س}}{٢٥}$

ثانيًا: إذا كان $أ^{ب} = ب^{ب}$ حيث $أ، ب \neq \{0، 1، -1\}$، فإن

إما: م = صفر

أو: أ = ب عندما م عدد فردي ، أ = ± ب عندما م عدد زوجي.

سوف تتعلم
- حل المعادلة الأسية جبريًا.
- حل المعادلة الأسية بيانيًا.

المصطلحات الأساسية
- معادلة أسية Exponential Equation
- الحل البياني Graphical Solution

الأدوات المستخدمة
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
- آلة حاسبة علمية.



مثال

٢ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+٣} = ٥^{س+٣}$ ب $٧^{س+١٠} = ٣^{س+٢٠}$

الحل

أ $٢^{س+٣} = ٥^{س+٣}$ ∴ س - ٣ = صفر ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

ب $٧^{س+١٠} = ٣^{س+٢٠}$ ∴ $٧^{س+١٠} = ٣^{٢(س+١٠)}$ ∴ $٧^{س+١٠} = ٩^{س+١٠}$

∴ س + ١ = صفر ومنها س = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

حاول أن تحل

٢ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات

أ $٣^{س+٥} = ٢^{س+٥}$ ب $٤^{س+٢} = ٣^{س+٤}$

تفكير ناقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $س^{س+٢} = ٤^{س+٢}$

مثال

٤ إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

أ أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س) ب إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

الحل

أ الطرف الأيمن = د(س + ٢) × د(س - ٢) = $٣^{س+٢} \times ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$ = $٣^{٢س}$ = د(٢س) = الطرف الأيسر

ب ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ ∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س-١}(٣^{٢} - ١) = ٧٢$

∴ $٣^{س-١} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ س - ١ = ٢ ∴ س = ٣

حاول أن تحل

٤ إذا كان د(س) = $٨^{س}$، د(ص) = $٤^{ص}$

أ أثبت أن $\frac{د(٢س+١) + د(٣س+٢)}{د(٢س-١) + د(٣س-٢)} = ١٢٨$ ب حل المعادلة د(٢س) + د(٣س - ١) = ٨٠

PDF Compressor Pro

ويجب التنبيه على الطلاب عند حل المعادلة الأسية بمراعاة الأس من حيث كونه زوجيًا أو فرديًا.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند (حاول أن تحل) صفحة ٧٧ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات (١) أ) س = ٧ ب) س = ٥

تمارين إثرائية

(١) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى

أ) $\frac{٦^{س} + ٦^{س+١}}{٤^{س} + ٤^{س+١}} = \frac{٤}{٩}$ [-٣]

ب) $(س - ٤)^{٢س+٨} = ١$ [-٤ ، ٥ ، ٣]

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

تابع مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص ٧٨ وتابع إجاباتهم.

إجابات (٢) أ) س = ٥ ب) س = -٢ (٣) ب)

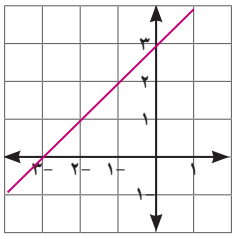
تفكير ناقد: وضح لطلابك كيفية إيجاد الحلول المختلفة لقيم س التى تحقق المعادلة.. (٢) س = ٢ أو س = ٤

حل المعادلات الأسية بيانيًا

أشر إلى الطلاب بأن حل المعادلة الأسية بيانيًا يعتمد على تساوى دالتين، ويعتبر هذا النوع من الحل هو الأهم فى المسائل التى تحتوى على متغير فى الأس والأساس معًا كما فى المثال ٥ ص(٧٩)

إجابات حاول أن تحل صـــ ٧٩

س	-١	٠	١	٢
٢ س + ١	١	٢	٤	٨
س + ٣	٢	٣	٤	٥



من الرسم مجموعة الحل = {٢،٥-، ١}

إجابة تمارين الدرس الثالث ص ٨٠

(١) أ) ب ب) ١ ج) جـ

(٢) أ) {١} ب) {-١} ج) {٢}

د) {-٣} هـ) {٢،-٢}

و) {٢} ز) {٠ ، ٢} ح) {٢، ٣} ط) {-٧}

(٣) أ) ٦ ب) صفر

(٤) ٢ (٥) ١ (٧) {(١،٢)}

(٨) أ) ٢٠٤٦ ب) ١٦

(٩) ٥ (١٠) {-٢، ١}.



مثال

(٥) إذا كانت د(س) = ٢^س

أوجد س التى تحقق المعادلة: د(س) + د(٥ - س) = ١٢:

الحل

بالتعويض فى المعادلة د(س) + د(٥ - س) = ١٢

٢^س + ٢^(٥-س) = ١٢

٢^س × ٢^٥ × ٢^-س + ٢^س = ١٢ وذلك بضرب الطرفين فى ٢^س

٣٢ × ٢^س + ٢^٥ - ١٢ × ٢^س = ٠ وبتحليل المقدار الثلاثى

(٢^س - ٤) (٢^س - ٨) = ٠

إما: ٢^س = ٢^٢ ومنها س = ٢

أو: ٢^س = ٢^٣ ومنها س = ٣

حاول أن تحل

(٤) فى المثال السابق أثبت أن: $\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٨}{٢٥}$

حل المعادلات الأسية بيانيًا *Solving Exponential Equastions Graphically*

نشاط

(٦) باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم فى شكل واحد منحنيى كل من الدالتين د(س) = ٢^س، د(س) = ٣ - س، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة ٢^س = ٣ - س

الحل

باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنيى الدالتين د١، د٢ ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هى (١، ٢)

نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين د١، د٢ هو (١، ٢) لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: ٢س = ٣ - س هو {١}.

حاول أن تحل

(٥) باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلًا من الدالتين:

د(س) = ٢^س، د(س) = س + ٢ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة ٢^س = س + ٢

تمارين ٢ - ٣

(١) اختر الإجابة الصحيحة:

أ) إذا كان ٢^(س-١) = ٨ ، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

ب) إذا كان ٥^(س-١) = ٤^(س-١)، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

جـ) $(\frac{١}{٢})^{أ+٢} = ١$ حيث أ ≠ صفر، فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) ٢^(س-١) = ٤ ب) ٣^(س-١) = $\frac{١}{٩}$ جـ) ٧^(٢-س) = ١

د) ٥^(س-٣) = ٤^(س-٣) هـ) $(٣٠,٣)^{أس} = ٢٧$ و) ٣^(س-٣) - ٣^(س-٣) = ١٦٢

ز) ٣^(س+٥) = ٢٥ × ٢٦ × ٥^س ح) ٢^س + ٢ = ٥^س ط) $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين:

٣^س × ٥^ص = ٧٥ ، ٣^ص × ٥^س = ٤٥

(٤) إذا كانت د(س) = ٣^س، د(س) = ٩^س فأوجد قيمة س التي تحقق د(٢س-١) + د(س+١) = ٧٥٦

(٥) إذا كانت د(س) = ٧^(س-١) فأوجد قيمة س التي تحقق د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠

(٦) أوجد بيانيًا مستخدمًا أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

أ) ٣^(س-٢) = ٣ - س ب) ٢^س = ٢س

(٧) تفكير إبداعى: إذا كان س^٣ = ص^٢ وكان س^(ن-١) = ص^(ن-٢) فما قيمة ن؟

(٨) الربط بالأعداد: إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + ٢^ن يُعطى بالعلاقة جـ^ن = ٢ (٢^ن - ١)

أ) أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى فى النمط

ب) أوجد عدد الحدود فى النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

(٩) حل كُلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $٣^{س^٢ - ٤س} = (\frac{١}{٣})^{س}$ ب) ٧^(س-٢) + ٧^-س = ٥٠

(١٠) تفكير إبداعى:

أوجد مجموعة حل المعادلة:

٩^(س-١) - ٣^(س-٣) + ٣ = ٠

PDF Compressor Pro

٢ - ٤ الدالة العكسية
The inverse function

خلفية

سبق أن درس الطالب الدالة الأحادية، وعرف أن الدالة تكون أحادية إذا كان لكل س ، ص ∋ المجال ، س ≠ ص فإن د (س) ≠ د(ص) وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب الدالة العكسية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف التمثيل البيانى فى الدالة د ودالتها العكسية د$^{-1}$
- إيجاد الدالة العكسية لدالة أحادية جبريًا وبيانيًا.
- تحديد المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية.

مفردات أساسية

- دالة – دالة عكسية – دالة أحادية – مجال – مدى – انعكاس.

المواد التعليمية المستخدمة

جهاز عرض - آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

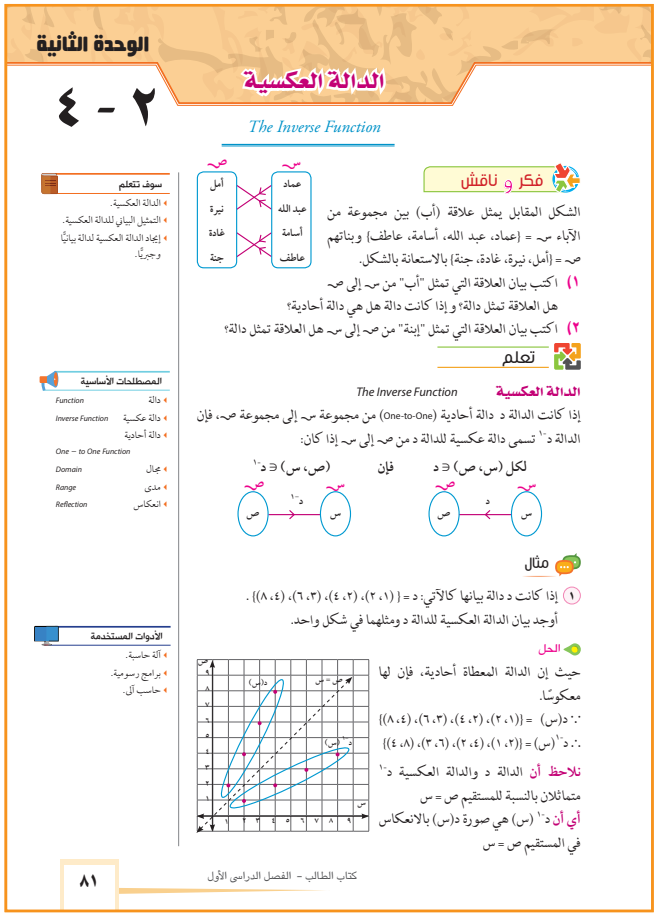
مصادر التعلم

- الكتاب من صـ٨١ إلى صـ٨٥

التهيئة

فى بند فكر وناقش:

- اطلب إلى طلابك كتابة بيان العلاقة (أ ب) وبين إليهم أنها تمثل دالة لأن كل عنصر فى س له صورة واحدة فقط فى ص، ثم بين لهم أن هذه الدالة هى دالة أحادية.
- اطلب إلى طلابك كتابة العلاقة (ابنة) ثم بين لهم أيضًا أنها تمثل دالة أحادية أيضًا.


الوحدة الثانية

٢ - ٤ الدالة العكسية

The Inverse Function

سوف تتعلم
- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.

المصطلحات الأساسية
- Function دالة
- Inverse Function دالة عكسية
- One – to One Function دالة أحادية
- Domain مجال
- Range مدى
- Reflection انعكاس

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلى.

فكر و ناقش

الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء ص = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من ص إلى ص هل العلاقة تمثل دالة؟ وإذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من ص إلى ص هل العلاقة تمثل دالة؟

تعلم

الدالة العكسية The Inverse Function

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة ص إلى مجموعة ص، فإن الدالة د$^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى ص إذا كان:

لكل (س، ص) ∋ د فإن (ص، س) ∋ د$^{-1}$

مثال

١ إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

الحل

حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∴ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

∴ د$^{-1}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د$^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

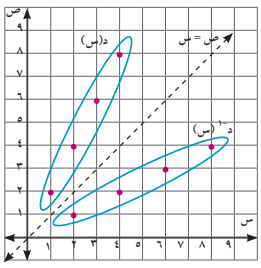
أي أن د$^{-1}$ (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

إجراءات الدرس:

- وجه السؤال الآتى إلى الطلاب: هل يوجد ارتباط بين الدالتين السابقتين واستقبل منهم الإجابات.
- فى بند تعلم ك ناقش مع طلابك تعريف الدالة العكسية وأكد أنه لكل (س، ص)∋ د توجد (ص، س)∋ د$^{-1}$ لكل دالة عكسية .

فى مثال (١)

- أكد إلى طلابك أنه فى الدالة العكسية فإنه يتم استبدال الزوج المرتب للدالة الأصلية، ويلاحظ ذلك من تماثل منحنى الدالة د$^{-1}$ حول المستقيم ص = س بالنسبة لمنحنى الدالة د. والشكل المرسوم يوضح ذلك.



التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

- اطلب إلى الطلاب حل ما ورد فى بند حاول أن تحل صـ ٨٢ وتابع إجاباتهم.

PDF Compressor Pro

إجابات حاول أن تحل صـــ٨٢

(١)

س	٧	٣	١	٠	$\frac{١}{٢}$
د$^{-١}$ (س)	٣-	٢-	١-	٠	١

أكد على طلابك أنه: إذا كانت الدالة ليست أحادية فإن معكوسها لايمثل دالة

في بند تفكير ناقد: د(س) = س^{٢} يكون لها معكوس دائمًا، ولكن معكوسها يمثل دالة إذا كان مجال د هو الأعداد الحقيقية غير السالبة أو الغير موجبة.

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ⩾ صفر

لإيجاد الدالة العكسية تقوم بتبديل المتغيرات ، ثم نوجد ص بدلالة س.

إيجاد المعكوس جبريًا

ناقش مع طلابك المثال الموجود بصفحة (٨٣) ثم بين أهمية تحديد مجال الدالة د ومداها قبل التحويل للدالة العكسية.

التقييم المستمر (الحوار و المناقشة)

إجابات حاول أن تحل صـــ٨٣

(٢) ص = س^{٣} حيث س ∋ ع ص ∋ ع

بتبديل المتغيرات ∴ ص^{٣} = س

بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين.

∴ ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ حيث س ∋ ع

إجابات بعض تمارين الدرس الرابع

(٣) ز ص = ٢ + $\sqrt[٣]{\text{س} - ٣}$

حيث س ⩾ ٣ ، ص ⩽ ٢ **بتبديل المتغيرات**

∴ ٢ + $\sqrt[٣]{\text{ص} - ٣}$ = س **حيث** ص ⩾ ٣ س ⩽ ٢

∴ $\sqrt[٣]{\text{ص} - ٣}$ = س - ٢ **بتربيع الطرفين**

∴ ص - ٣ = (س - ٢)^{٣}

أى ص = ٣ - (س - ٢)^{٣}

أى د$^{-١}$ (س) = ٣ - (س - ٢)^{٣} **حيث** س ⩽ ٢

ى د (س) = س^{٢} + ٨س + ٧ **حيث** س ⩽ ٤-

= (س + ٤)^{٢} - ٩ **حيث** س ⩽ ٤-

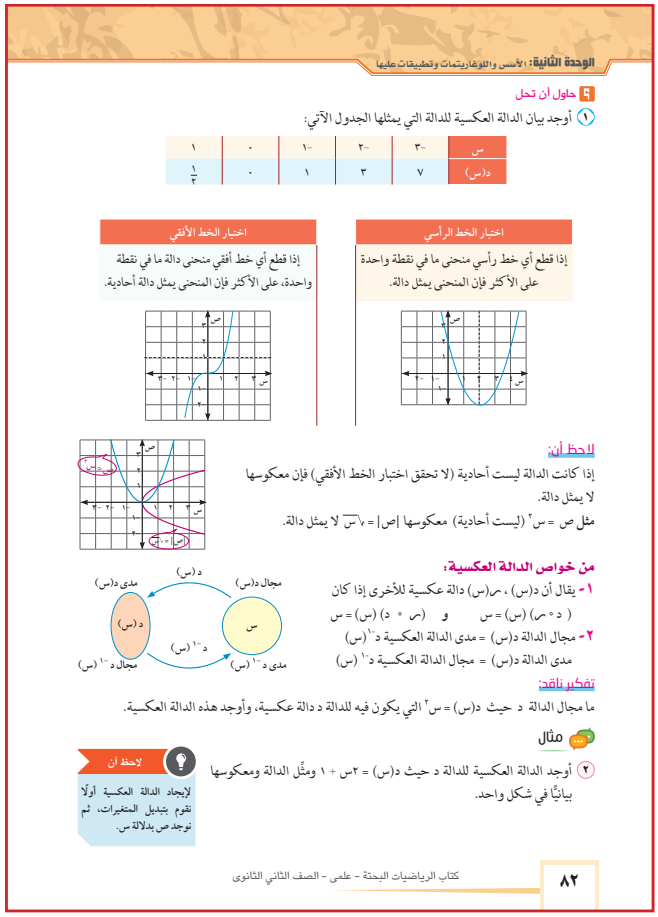
ص ⩽ ٩-

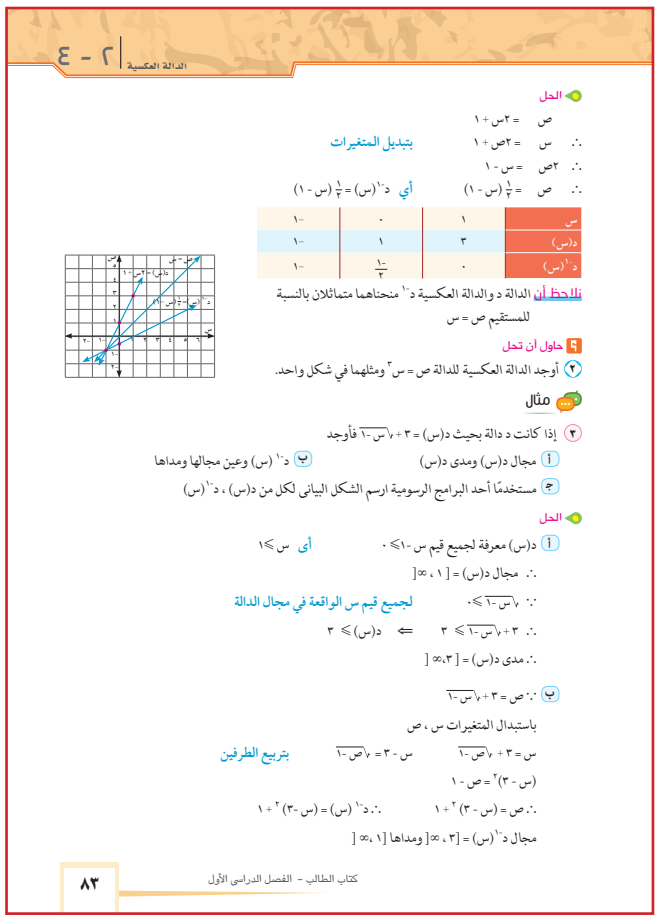
بتبديل المتغيرات

∴ (ص + ٤)^{٢} - ٩ = س **حيث** س ⩽ ٩- ص ⩽ ٤-

∴ ص + ٤ = $\sqrt{\text{س} + ٩}$ ∴ ص = $\sqrt{\text{س} + ٩}$ - ٤

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س} + ٩}$ - ٤ **حيث** س ⩽ ٩-

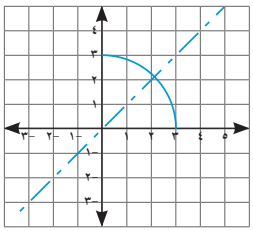




PDF Compressor Pro

ك) $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $-٣ \leqslant س \leqslant ٠$

$٠ \leqslant ص \leqslant ٣$



بتبديل المتغيرات

$\therefore$ $س = \sqrt{٩ - ص^{٢}}$

حيث $-٣ \leqslant ص \leqslant ٠$

$٠ \leqslant س \leqslant ٣$

بتربيع الطرفين

$\therefore ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$ حيث $-٣ < ص \leqslant ٠$

$٠ \leqslant س \leqslant ٣$

$\therefore ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

$\therefore د^{-١}(س) = -\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant ٣$

ل) $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant ٣$

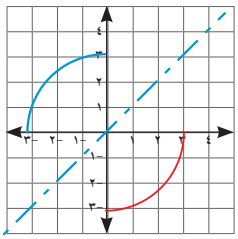
حيث $٠ \leqslant ص \leqslant ٣$

بتبديل المتغيرات

$\therefore س = \sqrt{٩ - ص^{٢}}$ حيث $-٣ \leqslant ص \leqslant ٠$

$٠ \leqslant س \leqslant ٣$

بتربيع الطرفين



$\therefore ٩ - ص^{٢} = س^{٢}$

حيث $-٣ \leqslant ص \leqslant ٠$

$٠ \leqslant س \leqslant ٣$

$\therefore ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

$\therefore ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $-٣ \leqslant ص \leqslant ٠$

$\therefore د^{-١}(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant ٣$

٧ سؤال مفتوح:

يمكن أن تكون الدالة د هى نفسها الدالة العكسية $د^{-١}$ وذلك إذا كانت الدالة د أصلًا متماثلة حول المستقيم ص = س مثل:

أ) جميع المستقيمات العمودية على المستقيم ص = س وتكون معادلتها س + ص = ك؛ أى أن عائلة الدوال د (س) = ك - س تكون دالتها العكسية هى نفسها.

ب) جميع الدوال الكسرية المتماثلة حول نقطة على المستقيم ص = س أى: $ص = \frac{١}{س - ك} + ك$

٨ جميع الدوال المعروضة مجالها ع

$\therefore$ نبحث وجود الدالة العكسية فى المجال ع

أ) د (س) = س٢ ليس لها دالة عكسية.

ب ، جـ) لها دوال عكسية على مجالتها ح

٩ حاول أن تحل

٢) إذا كانت د: ع$^{+}$ ⟵ ع بحيث د(س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$

أ) أوجد $د^{-١}$(س) وعين مجالها ومداها

ب) مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البيانى لكل د(س) ، $د^{-١}$(س)

تمـارين ٢ - ٤

١) أكمل:

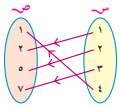
أ) إذا كانت الدالة د = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن $د^{-١}$ = ...

ب) الشكل المقابل يمثل دالة د: سـ ⟵ صـ فإن $د^{-١}$ (٢) = ...

جـ) صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة .....

د) إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن $د^{-١}$ (٦) = ...

هـ) إذا كان د: س ⟵ ٤س فإن $د^{-١}$: س ⟵ .....



٢) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ) مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (.....)

ب) الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (.....)

جـ) الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

د) الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

٣) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س + ٤

ب) د (س) = ٤س

جـ) د(س) = $\frac{٤}{س}$ + ٥

د) د (س) = $\frac{٣}{س}$

هـ) د(س) = ٨ س^{٣} - ١

و) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

ز) د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

ح) د (س) = س^{٣} حيث س ⩽ صفر

ط) د(س) = (س - ١)^{٢} + ٢ حيث س ⩽ ١

ى) د(س) = س^{٣} + ٨ س + ٧ حيث س ⩽ -٤

ك) د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث -٣ ⩽ س ⩽ ٠

ل) د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٣

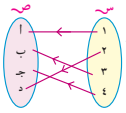
م) د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

ن)

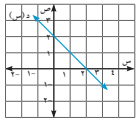
س	-٢	١	٢	٥
د(س)	٧	٤	١	-١

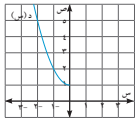
٤) أ) إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد $د^{-١}$(س) ومثلهما بيانيًا.

ب) الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ إلى صـ فأوجد قيمة $د^{-١}$ (ب) + ٢ $د^{-١}$(جـ).



٥) في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية $د^{-١}$(س)





٦) **اكتشف الخطأ:**

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{س - ٥}{س}$

حل وائل

$\because د(س) = \frac{س - ٥}{س}$

$\because د^{-١}(س) = \frac{١}{د(س)}$

$\therefore د^{-١}(س) = ١ \div \frac{س - ٥}{س}$

$= \frac{س}{س - ٥} \times ١$

$د^{-١}(س) = \frac{س}{س - ٥}$

حل رنا

$\because ص = \frac{س - ٥}{س}$

$\therefore س = \frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرات

$\therefore ص س = ص - ٥$ بالضرب التبادلي

$\therefore ص س - ص = -٥$

$\therefore ص (س - ١) = -٥$

$\therefore د^{-١}(س) = \frac{-٥}{س - ١}$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٧) **سؤال مفتوح:** هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية $د^{-١}$؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

٨) في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

أ) د(س) = س^{٣}

ب) د (س) = س^{٢}

جـ) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س

PDF Compressor Pro

٢ - ٥ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

Logorithmic function and its graph



خلفية

سبق أن درس الطالب كيفية إيجاد الدالة العكسية للدالة د بالطريقة الجبرية فمثلاً الدالة د حيث د (س) = ٥س + ١ دالتها العكسية هى د^-١ (س) = ١/٥ (س - ١).

ويعد ذلك مدخلًا هامًّا لدراسة الدالة اللوغاريتمية كدالة عكسية للدالة الأسية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف على مفهوم الدالة اللوغاريتمية.
- يحول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يمثل الدالة اللوغاريتمية بيانيًّا.
- يحل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

مفردات أساسية

- لوغاريتم – دالة عكسية – مجال – لوغاريتم معتاد.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - جهاز عرض فوق رأسى - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من صـ٨٦ إلى صـ٩١
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئة:

- راجع مع طلابك تمثيل الدالة الأسية والدالة العكسية من خلال بند استكشف

اجراءات الدرس

ذكر طلابك بالعلاقة بين منحنى الدالة د حيث د(س) = ٢^س أى ص = ٢^س ومنحنى الدالة العكسية لها س = ٢^ص، وأن كل منها صورة للأخرى بالانعكاس حول المستقيم ص = س

- أكد على الطلاب بأن أساس الدالة اللوغاريتمية.

ص = لو ا س يجب أن يكون موجبًا ولا يساوى ١ فمثلا

لو ٥ ، لو ٣ غير معرفة فى ع

- ناقش مع طلابك تعريف الدالة اللوغاريتمية؛ د حيث د(س) = لو ا س وبين أن: س > ٠، ا ∈ ع^+ - {١}
- وظف الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية لإيجاد مجال الدالة ومداها وتماثلها حول المستقيم ص = س للدالة الأسية المناظرة.

عمل تعاونى:

- اطلب من طلابك إجراء دراسة حول الدالة اللوغاريتمية والدالة العكسية المناظرة لها (الأسية) من حيث المجال والمدى ونقط التقاطع مع محاور الإحداثيات، وسجل نتائج هذه الدراسة.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما جاء فى بند حاول أن تحل ٨٧ و ٨٨ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

الإجابات

(١) أ) لو$_{٧}$ ٤٩ = ٢ ب) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٥١٢ = -١٠

ج) لو$_{\frac{٣}{٥}}$ $\frac{٨١}{٦٢٥}$ = ٤ د) لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = -٣

(٢) أ) $٣^{٥}$ = ١٢٥ ب) $٣^{-٥}$ = $\frac{١}{٢٤٣}$

ج) ١ = ٤ صفر د) $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠

(٣) أ) -٥ ب) -٧

(٤) أ) {٢٧} ب) {٠ ، ٥}

إرشادات للدراسة:

- أكد على طلابك أنه قبل تحويل المعادلة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية يجب دراسة مجال تعريف المعادلة حتى يتثنى تحديد مجموعة حلها.
- لامعنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من لو$_{٥}$ (-٣)، لو$_{٢}$ صفر، لو$_{٣}$ (-$\sqrt{٢}$) لامعنى لها.
- أساس اللوغاريتم (أ) يجب أن يكون عددًا موجبًا لايساوى الواحد الصحيح وعلى ذلك فإن، لو$_{-٣}$ ١٢، لو$_{١}$ ٧، لو$_{صفر}$ ٢٥ لامعنى لها.

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية

- ذكر طلابك بأن التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية هو صورة الدالة الأسية بالانعكاس س فى المستقيم ص = س
- ولرسم الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{٣}$ س وإنشاء جدول، ووضع قيم ص أعداد صحيحة من -٣ إلى ٣

س							
ص	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣

ثم حساب قيم س المناظرة من العلاقة س = $٣^{ص}$

س	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧
ص	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

(١) أ) $٢^{٤}$ = ١٦ تكافئ لو$_{٢}$ ١٦ = ٤ ب) $٥^{٢}$ = ٢٥ تكافئ لو$_{٥}$ ٢٥ = ٢

ج) $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = $\frac{١}{١٦}$ تكافئ لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{١٦}$ = ٤ د) $١٠^{-٢}$ = ٠,٠١ تكافئ لو$_{١٠}$ ٠,٠١ = -٢

حاول أن تحل

(١) حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

أ) $٧^{٢}$ = ٤٩ ب) $(\sqrt{٣})^{١٠}$ = ٥١٢ ج) $(\frac{٣}{٥})^{٤}$ = $\frac{٨١}{٦٢٥}$ د) $٥^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: لو ٧ تكتب لو٧ لو ١٢٧ تكتب لو١٢٧

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

أ) لو$_{٤}$ ٨١ = ٤ تكافئ $٣^{٤}$ = ٨١ ب) لو$_{٧}$ ١٢٨ = ٧ تكافئ $٢^{٧}$ = ١٢٨

ج) لو $\frac{١}{١٠٠}$ = -٢ تكافئ $١٠^{-٢}$ = $\frac{١}{١٠٠}$ د) لو$_{\frac{٣}{٤}}$ ٢٧ = $\frac{٨١}{٣}$ تكافئ $(\frac{٣}{٤})^{٣}$ = ٢٧

حاول أن تحل

(٢) حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

أ) لو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣ ب) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٤٣}$ = -٥ ج) لو$_{٤}$ ١ = ٠ د) لو ١٠٠٠ = ٣

حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم:

مثال

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) لو ٠,٠٠١ ب) لو$_{٣}$ $\sqrt{٣٧}$

الحل

أ) بوضع ص = لو ٠,٠٠١

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص}$ = ٠,٠٠١

$١٠^{ص}$ = $(\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص}$ = $(١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ٠,٠٠١ = -٣

ب) بوضع ص = لو$_{٣}$ $\sqrt{٣٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص}$ = $٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

ص = $\frac{٣}{٤}$

لذا فإن لو$_{٣}$ $\sqrt{٣٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد قيمة كل من: أ) لو ٠,٠٠٠٠١ ب) لو$_{٣}$ ١٢٨

مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) لو$_{٣}$ (٢س - ٥) = ١ ب) لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

الحل

أ) المعادلة معرفة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س > $\frac{٥}{٢}$ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $٣^{١}$ = ٢س - ٥ ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤ ∈ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل هي {٤}

ب) المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق { س + ٢ > صفر ، س > صفر ، س ≠ ١ } أي { س > -٢ ، س > صفر ، س ≠ ١ }

أي]صفر، ∞[- {١} (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $س^{٢}$ = س + ٢ ∴ $س^{٢}$ - س - ٢ = صفر

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

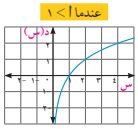
أ) لو$_{\frac{٣}{٤}}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ب) لو$_{س}$ ٥ = ٢

تعلم

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية: *Graphical Representation of the Logarithmic Function*

تمثل الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ∈]٠، ١[∪]١، ∞[بيانيًا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١



المجال: ع$^{+}$

المدى: ع

التقاطع مع محور س: (١، ٠)

التزايد والتناقص: تزايدية ع$^{+}$

PDF Compressor Pro

تمرين إثرائى

(١) أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة: لو$_{(س - ٢)}$ (س + ١٠) = ٢

الحل

المعادلة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

$$\left.\begin{array}{l} س + ١٠ > صفر \\ س - ٢ > صفر \\ س - ٢ \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى } \left\{\begin{array}{l} س > -١٠ \\ س > ٢ \\ س \neq ٣ \end{array}\right.$$

أى]٢ ، ∞ [- {٣} **مجال تعريف المعادلة**

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية

∴ (س - ٢)^{٢} = (س + ١٠)

∴ س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠

∴ (س - ٦) (س + ١) = ٠

∴ س = ٦ أو س = -١

وحيث إن س = -١ ∉ **مجال تعريف المعادلة**

∴ مجموعة الحل = {٦}

استخدام الآلة الحاسبة من الصفحة التالية

إجابات بعض تمارين الدرس الخامس

(١) أ) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = -٢ ب) لو$_{\frac{٢}{٥}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = ٤

ج) لو$_{٥}$ ١ = صفر د) لو$_{\sqrt{٢}}$ ٤ = ٤

(٢) أ) ١٠٠ = ١٠^{٢} ب) ٤ $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٢}^{٥}$(٢)

ج) ١ = ٧ صفر د) ١٢١ = $(\sqrt{١١})^{٤}$

(٤) أ) ٤ ب) ٢

ج) صفر د) $\frac{٣}{٢}$

(٥) أ) {١} ب) {٣}

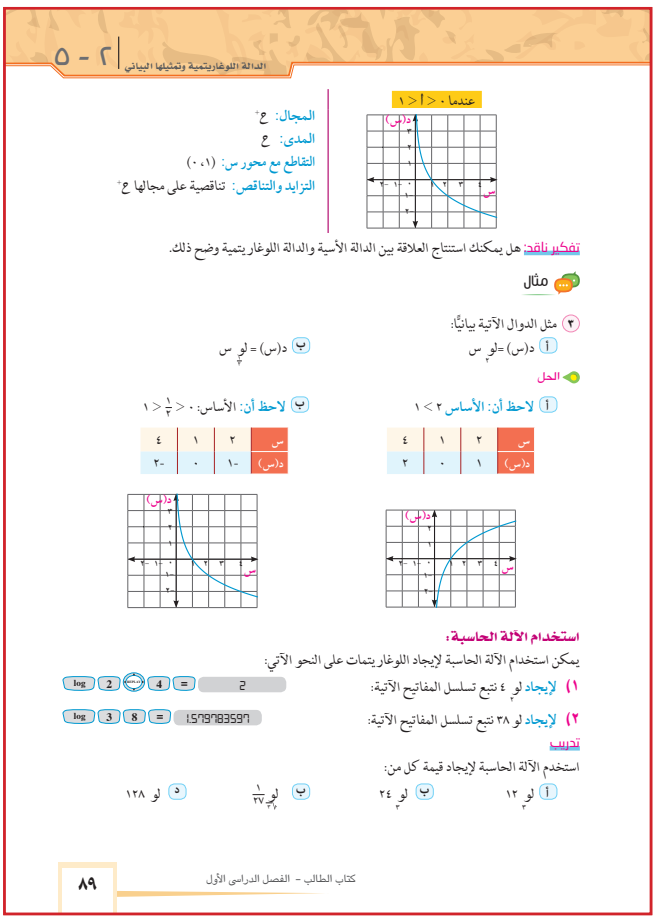
ج) {صفر} د) {٩}

هـ) {٩} و) {١}

(٦) ذكر طلابك أن التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية هى صورة الدالة الأسية بالانعكاس فى المستقيم ص = س.

(٨) أ (٩) ب

(١٠) ب



عندما ٠ < أ < ١

المجال: ع$^{+}$
المدى: ع
التقاطع مع محور س: (١، ٠)
التزايد والتناقص: تناقصية على مجالها ع$^{+}$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

مثال

(٢) مثل الدوال الآتية بيانيًا:

أ) د(س) = لو$_{٢}$ س ب) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

أ) لاحظ أن: الأساس ٢ > ١

س	١	٢	٤
د(س)	٠	١	٢

ب) لاحظ أن: الأساس: ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

س	١	٢	٤
د(س)	٠	-١	-٢

استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١) لإيجاد لو$_{٤}$ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log (2) (4) = 2

٢) لإيجاد لو ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log (3) (8) = 1.5790783557

تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ) لو$_{٣}$ ١٢ ب) لو$_{٢}$ ٢٤ ج) لو$_{\frac{١}{٣}}$ $\frac{١}{٢٧}$ د) لو ١٢٨

تمارين ٢ - ٥

(١) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ) ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ ب) $(\frac{٢}{٥})^{٤}$ = $\frac{١٦}{٦٢٥}$ ج) ٥^{صفر} = ١ د) $(\sqrt{٣})^{٤}$ = ٤

(٢) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ) لو ١٠٠ = ٢ ب) لو$_{٣}$ ٤ = $\frac{٢}{٣}$ ج) لو$_{م}$ ١ = صفر د) لو$_{٣\sqrt{٣}}$ ١٢١ = ٤

(٣) عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ) د(س) = لو$_{م}$ (٣س+١) ب) د(س) = ٢لوس ج) د(س) = لو$_{(س-٣)}$ (س-٣)

(٤) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ) لو$_{٢}$ ١٦ ب) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٥ ج) لو$_{٨}$ ١ د) لو$_{\sqrt{٣}}$ ٣

(٥) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) لو$_{٣}$ ٢٧ = س + ٢ ب) لو (٣س + ٣) = ٢ ج) لو (٢س + ١) = صفر

د) لو$_{م}$ (لو$_{٣}$ س) = ١ هـ) لو$_{٤}$ [١٣ + لو$_{٣}$ (س-١)] = ٢ و) لو$_{م}$ (٤^{س} - ٢) = س

(٦) مثل بيانيًا كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = لو$_{٣}$ س ب) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س+١)

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
د(س)					

س	٧	٣	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٧}{٨}$
د(س)						

(٧) ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث ر(س) = لو$_{٣}$ س، د(س) = ٦ - س، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة لو$_{٣}$ س = ٦-س.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٨) إذا كان لو$_{م}$ س = ٢ فإن س = ...

أ) ٩ ب) ٨ ج) ٣ د) ٥

(٩) إذا كان لو$_{م}$ ١٦ = ٤ فإن أ ∈ .....

أ) {١٦} ب) {٢} ج) {٢، -٢} د) {١}

(١٠) لو$_{٥}$ ١٢٥ = ...

أ) $\sqrt{٣}$ ب) ٣ ج) ٥ د) ١٢٥

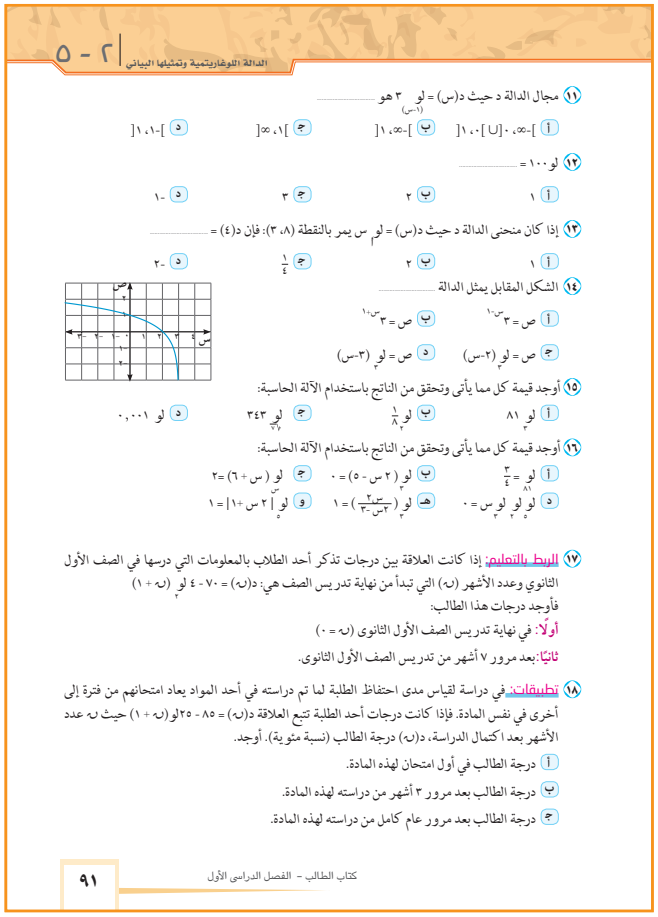
PDF Compressor Pro

(١١) ب
(١٢) أ
(١٣) ب
(١٤) د
(١٥) أ ٤ ، ب ٣ ، جـ ٦ ، د ٤ ، هـ ٣-
(١٦) أ ٢٧ ، ب ٣ ، جـ ٣ ، د ٩ ، هـ ٣ ، و ٢، ٣-
(١٧) ٥٨، ٧٠
(١٨) ٨٥

في الأسئلة (١٧) ، (١٨)تركز على بعض القضايا التضمنة، وكذلك بعض التطبيقات الحياتية فى المجتمع.

استخدام الآلة الحاسبة

- راجع مع طلابك الخطوات المتبعة أثناء استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات مستعينًا بالخطوات الموضحة، كتاب الطالب، و للتحقق من إتقان الطالب لمهارة استخدام الآلة الحاسبة.
- اطلب منهم تكرار تلك خطوات؛ لإيجاد حلول التمارين الموضحة، في التدريب في نهاية صـ٨٩.



الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني | ٢ - ٥

(١١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو .....
أ]-∞، ٠[∪]١، ٠[ب]-∞، ١[جـ]١، ∞[د]١-، ١[

(١٢) لو ١٠٠ = ...
أ ١ ب ٢ جـ ٣ د ١٠

(١٣) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ...
أ ١ ب ٢ جـ $\frac{١}{٤}$ د ٢-

(١٤) الشكل المقابل يمثل الدالة .....
أ ص = ٣$^{س-١}$ ب ص = ٣$^{س-١}$
جـ ص = لو$_{٢}$ (٢-س) د ص = لو$_{٣}$ (٣-س)

(١٥) أوجد قيمة كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:
أ لو$_{٣}$ ٨١ ب لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ جـ لو$_{\frac{٣}{٤}}$ ٣٤٣ د لو ٠,٠٠١

(١٦) أوجد قيمة كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:
أ لو$_{\frac{٣}{٤}}$ $\frac{٨١}{٢٥٦}$ ب لو$_{٣}$ (٢ س - ٥) = ٠ جـ لو (س + ٦) = ٢
د لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ لو$_{٥}$ س = ٠ هـ لو$_{٣}$ ($\frac{٢س-٣}{س-٣}$) = ١ و لو$_{٥}$ |٢ س + ١| = ١

(١٧) **الربط بالتعليم:** إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (ن) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(ن) = ٧٠ - ٤ لو$_{٢}$ (ن + ١) فأوجد درجات هذا الطالب:
أولًا: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوي (ن = ٠)
ثانيًا: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوي.

(١٨) **تطبيقات:** في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(ن) = ٨٥ - ٢٥ لو$_{٢}$ (ن + ١) حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.
أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.
ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.
جـ درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

PDF Compressor Pro

٦ - ٢ بعض خواص اللوغاريتمات

Some properties of logorithms


الوحدة الثانية

٦ - ٢ بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم
- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية
- معادلة لوغاريتمية. Logarithmic Equations
- مقياس ريختر. Richter Scale

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

١) (لو ٤ + لو ٨)، لو ٣٢ ٢) (لو ٤٠ + لو $\frac{٥}{٢}$)، لو ١٠٠

٣) (لو ٢٧ - لو ٩)، لو ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات Some Properties of Logarithms

إذا كان أ ∈ ح$^{+}$ - {١} ١) لو$_{أ}$ أ = ١ ٢) لو$_{أ}$ ١ = صفر

حاول إثبات كل من ١، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص حيث س، ص ∈ ع$^{+}$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع ب = لو$_{أ}$ س ، جـ = لو$_{أ}$ ص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

فتكون س ص = أ^{ب} × أ^{جـ} أي أن س ص = أ$^{ب+جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

مثال

١ أوجد قيمة لو$_{٢}$ ١٠ في أبسط صورة إذا كان لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

لو$_{٢}$ ١٠ = لو$_{٢}$ (٢ × ٥)

= لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ ٥ باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات

= ١ + ٢,٣٢١٩ ≃ ٣,٣٢١٩ باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩

كتاب الرياضيات البحتة - علمي - الصف الثاني الثانوي ٩٢

خلفية

سبق أن درس الطالب اللوغاريتمات وعرف كيفية التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية أو العكس، ويدرس في هذا الدرس بعض خواص اللوغاريتميات المنبثقة من خواص الأسس.

مخرجات الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم خواص اللوغاريتمات في تبسيط العبارات اللوغاريتمية.
- يحل المعادلات اللوغاريتمية.
- يحل المعادلة الأسية باستخدام اللوغاريتمات.
- يحل تطبيقات على اللوغاريتمات.

مفردات اساسية

- معادلة لوغاريتمية.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - جهاز عرض فوق رأسي - آلة حاسبة علمية - حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - التعلم التعاوني.

مكان التدريس

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صـ ٩٢ إلى صـ ٩٨

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة

- في بند استكشف درب الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة وذلك للتحقق من صحة بعض خواص اللوغاريتمات قبل الدخول في الدرس.

اجراءات الدرس

- تأكد من فهم الطلاب لبند تعلم ص ٩٢ من كتاب الطالب قبل حل التمارين.
- مناقشة الطلاب عن كيفية إثبات بخاصية الضرب في اللوغاريتمات باستخدام التعريف.
- تأكد من استخدام طلابك للآلة الحاسبة في إيجاد قيمة اللوغاريتم.
- ذكر الطلاب بمجال ومدى الدالة اللوغاريتمية، وأن الأساس أ ∈ ح$^{+}$ - {١}.
- بين إلى الطلاب أنه يمكن تعميم العلاقة:

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{ب}$ ص كالآتي:

لو$_{أ}$ (س ص ع ... م) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص + ... لو$_{أ}$ م

ولأي عدد من الدوال تتحقق هذه العلاقة.

PDF Compressor Pro

فى بند (٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات: اطلب إلى الطلاب استخدام نفس إثبات صحة خاصية الضرب؛ لإثبات صحة خاصية القسمة ، ويمكنك الربط بين هاتين العلاقتين كالآتي:

$$\text{لو}_{ا}\left(\frac{س}{ص}\right) = \text{لو}_{ا} س + \text{لو}_{ا} ص - \text{لو}_{ا} ع$$

حيث س، ص، ع ∈ $ع^{+}$، ا ∈ $ع^{+}$ - {١}.

الأخطاء الشائعة

أكد على الطلاب بتجنب الأخطاء الشائعة الآتية:

الخطأ	الصواب
$\text{لو}_{ا} س + \text{لو}_{ا} ص = \text{لو}_{ا}(س + ص)$	$\text{لو}_{ا} س + \text{لو}_{ا} ص = \text{لو}_{ا}(س ص)$
$\text{لو}_{ا} س - \text{لو}_{ا} ص = \text{لو}_{ا}(س-ص)$ $\text{لو}_{ا} س - \text{لو}_{ا} ص = \frac{\text{لو}_{ا} س}{\text{لو}_{ا} ص}$	$\text{لو}_{ا} س - \text{لو}_{ا} ص = \text{لو}_{ا}\left(\frac{س}{ص}\right)$
$(\text{لو}_{ا} س)^{ن} = ن \times \text{لو}_{ا} س$	$\text{لو}_{ا} س^{ن} = ن \times \text{لو}_{ا} س$
$\text{لو}_{ا} س^{٢} - \text{لو}_{ا} ص^{٢} =$ $(\text{لو}_{ا} س - \text{لو}_{ا} ص)(\text{لو}_{ا} س + \text{لو}_{ا} ص)$	$\text{لو}_{ا} س^{٢} - \text{لو}_{ا} ص^{٢} = \text{لو}_{ا}\left(\frac{س}{ص}\right)^{٢}$
$٢\,\text{لو}_{ا} س - ٢\,\text{لو}_{ا} ص = (\text{لو}_{ا} س - \text{لو}_{ا} ص)^{٢}$	$٢\,\text{لو}_{ا} س - ٢\,\text{لو}_{ا} ص = ٢\,\text{لو}_{ا}\left(\frac{س}{ص}\right)$

التقييم المستمر (المناقشة) والحوار:

تابع مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص ٩٣ ، ٩٤ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

(١) ٢,٤٥٦ (٢) ١ - لو $_{ا}$ ١٠ = ١ - لو $_{ا}$ ٢ = ٥ - لو $_{ا}$ ١٠ + لو $_{ا}$ ٢ = لو $_{ا}$ ٢

(٣) $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٣}{٤}$ (٤) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ (٥) صفر

(٦) الأيمن = $\frac{٣\,\text{لو}_{٩} - ٣\,\text{لو}_{٤}}{\text{لو}_{٩} - \text{لو}_{٤}} = \frac{٣(\text{لو}_{٩} - \text{لو}_{٤})}{\text{لو}_{٩} - \text{لو}_{٤}} =$ (٣)

(٧) $س^{٢} + ٢\,س\,ص + ص^{٢} = ٨\,س\,ص + ٢\,س\,ص$

$(س + ص)^{٢} = ١٠\,س\,ص$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

٢ لو (س + ص) = لو ١٠ + لو س + لو ص

٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

فى بند تفكير ناقد ص (٩٤)

الهدف هو استخدام بعض الصيغ الرياضية فى حل وتبسيط التمارين.

لذلك فإن: لو $_{٣}$ ٧ × لو $_{٧}$ ٣ = ١

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

log 2 (-) 1 0 = 3.321928095

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة لو $_{٢}$ ١٥ في أبسط صورة إذا كان لو $_{٢}$ ٥ ≃ ١,٤٦٥ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو $_{ا}\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو $_{ا}$ س - لو $_{ا}$ ص حيث س، ص ∈ $ع^{+}$ (حاول أن تثبت صحة العلاقة)

مثال

(٢) أوجد قيمة المقدار: لو ٣٠ - لو ٣.

الحل

لو ٣٠ - لو ٣ = لو $\frac{٣٠}{٣}$ = لو ١٠ = ١

حاول أن تحل

(٢) أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو ٢ = ١ - لو ٥

٥) خاصية لوغاريتم القوة:

لو $_{ا} س^{ب}$ = ب لو $_{ا}$ س حيث ب ∈ ع ، س > ٠ ، ا ∈ $ع^{+}$ ، ا ≠ ١

مثال

(٣) أوجد في أبسط صورة لو $_{٤}\sqrt{١٢٥}$

الحل

لو $_{٤}\sqrt{١٢٥}$ = لو $_{٤}(٥)^{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٣}{٤}$ لو $_{٤}$ ٥ = $\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

(٣) ضع في أبسط صورة

لو $_{٧}\sqrt{٢٤٣}$ ، لو $_{٧}\sqrt{٣٤٣}$

لاحظ أن: لو $_{ا}\left(\frac{١}{س}\right)$ = - لو $_{ا}$ س حيث س ∈ ع

٦) خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س ∈ ع ، ص ، ا ∈ $ع^{+}$ - {١} ، أثبت أن: لو $_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ا} س}{\text{لو}_{ا} ص}$

لاحظ أن: $\sqrt[٤]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٣^{٥}} = ٣^{\frac{٥}{٤}}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: ع = لو $_{ص}$ س

$ص^{ع} = س$ بالتحويل إلى الصورة الأسية

ع لو $_{ا}$ ص = لو $_{ا}$ س يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ا

فتكون ع = $\frac{\text{لو}_{ا} س}{\text{لو}_{ا} ص}$ أي أن: لو $_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ا} س}{\text{لو}_{ا} ص}$

حاول أن تحل

(٤) استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: (أ) لو $_{٤}$ ٨ (ب) لو $_{٩}$ ٢٤٣

٧- خاصية المعكوس الضربي: لو $_{ا}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب} ا}$

تفكير ناقد: إذا كانت ا، ب ∈ $ع^{+}$ - {١} فأثبت أن لو $_{ا}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب} ا}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: لو $_{٧}$ ٧ × لو $_{٣}$ ٣ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

(٤) اختصر لأبسط صورة:

(أ) ٢ لو $_{٢٥}$ + لو $_{٢}(\frac{١}{٥})$ + ٢ لو $_{٣}$ - لو $_{٣٠}$ (ب) لو $_{٤٩} \times$ لو $_{٥} \times$ لو $_{٨} \times$ لو $_{٩}$

الحل

(أ) المقدار = لو $_{٢٥}^{٢}$ + لو $_{\frac{٨}{١٥}}$ + لو $_{٣}^{٢}$ - لو $_{٣٠}$ خاصية ٥

= لو $_{٢}(٢٥^{٢} \times \frac{٨}{١٥} \times ٣^{٢} \times \frac{١}{٣٠})$ خاصية ٣، ٤

= لو $_{٢}$ ١٠٠ = ٢

(ب) المقدار = $\frac{\text{لو}_{٧} ٤٩}{\text{لو}_{٧} ٥} \times \frac{\text{لو}_{٧} ٥}{\text{لو}_{٧} ٨} \times \frac{\text{لو}_{٧} ٨}{\text{لو}_{٧} ٩} \times \frac{\text{لو}_{٧} ٩}{\text{لو}_{٧} ٧}$ خاصية ٦

= $\frac{\text{لو}_{٧} ٤٩}{\text{لو}_{٧} ٧} = \frac{٢\,\text{لو}_{٧} ٧}{\text{لو}_{٧} ٧} = ٢$

حاول أن تحل

(٥) اختصر: لو $_{٠,٠٠٩}$ - لو $_{\frac{٢٧}{١٦}}$ + لو $_{١٥\frac{٥}{٨}}$ - لو $_{\frac{١}{١٢}}$

(٦) أثبت أن: $\frac{\text{لو}_{٣} ٧٢٩ - \text{لو}_{٣} ٦٤}{\text{لو}_{٣} ٩ - \text{لو}_{٣} ٤} = ٣$

(٧) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٨\,س\,ص$، أثبت أن: ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

PDF Compressor Pro

التقويم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص ٩٥، ٩٩ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

(٨) أ ١ ب ٧

ج لو س - $\frac{\text{لو } ١٠٠}{\text{لو س}}$ = ١

(لوس)^{٢} - ٢ - لو س = صفر

(لوس -٢) (لوس +١) = ٠

ومنها لو س = ٢ أى س = ١٠٠

(٩) أ - ٢,٣١٨٨ ب س ≃ ١٤,٢٨

(١٠) أ ٣٧١٢٩٣ ب ٢٠٢٠

تمارين إثرائية

حل المعادلات الآتية:

(١) ٧ $^{٢س - ١}$ = ٢ $^{٣س + ١}$

(٢) ٢ $^{٢س + ١}$ + $^{٢س - ١}$ ٢ = ٧

(٣) ٥ $^{س + ١}$ + ٥ $^{س - ١}$ = ٧٨

(٤) ٩ ^{س} + ٣ $^{س + ١}$ - ١٠ = ٠

(٥) ٢ ^{س} - ٧ × ٢ $^{س - ١}$ = ٥

(٦) (١٦٩)^{س} - ١١ × (١٣)^{س} + ٢٤ = ٠

(٧) ٢٥ ^{س} - ٥ $^{س + ١}$ + ٦ = ٠

(٨) ٦ $^{٣ - س}$ × ٤ ^{س} = ٨ $^{٥ + س}$

تطبيقات على اللوغاريتمات

(٩) إذا كان حجم الكرة ح = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} فأوجد طول نصف قطر الكرة التى حجمها٥٦٣,٨سم^{٣} وذلك لأقرب رقمين عشريين.

(١٠) إذا كان حجم المخروط الدائرى القائم ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع فأوجد ارتفاع المخروط ع لأقرب سم إذا علم أن حجم المخروط ٢٦٤سم^{٣} وطول نصف قطر قاعدته ٦سم.

(١١) إذا كانت المساحة الجانبية للأسطوانة الدائرية القائمة م = ٢ ط نق ع فأوجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة نق إذا كان الارتفاع ع = ٩سم والمساحة الجانبية تساوى ٣٩٥,٦٤سم^{٢} وذلك لأقرب سم.



٦ - ٢ بعض خواص اللوغاريتمات

حل المعادلات اللوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

مثال

(٥) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨ ب لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ ٣ = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل س ∈ {س: س - ١ > صفر} ∩ {س: س + ١ > صفر}

أى س > ١ (مجال تعريف المعادلة)

لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ لو$_{٣}$ (س - ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨ خاصية ٣

∴ س^{٢} - ١ = ٨ ∴ س^{٢} = ٩ ومنها س = ±٣

وحيث إن س = -٣ لا تنتمى لمجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لكل س > صفر ، س ≠ ١

∴ لو$_{٣}$ س + $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\text{ س}}$ = ٢ خاصية ٧

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١ = ٢لو$_{٣}$ س بالضرب فى لو$_{٣}$ س

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} - ٢لو$_{٣}$ س + ١ = صفر ∴ (لو$_{٣}$ س - ١)^{٢} = صفر

∴ لو$_{٣}$ س = ١ ∴ س = ٣ ∈ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

حاول أن تحل

(٨) أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية فى ع:

أ لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ (س + ٢) = ١ ب لو(٨ - س) + ٢لو$_{٧}$ $\sqrt{س - ٦}$ = ٠ ج لوس - لو $\frac{١٠٠}{\text{س}}$ = ١

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving Exponential Equations Using Logarithms

مثال

استخدام الآلة الحاسبة فى حل المعادلات اللوغاريتمية

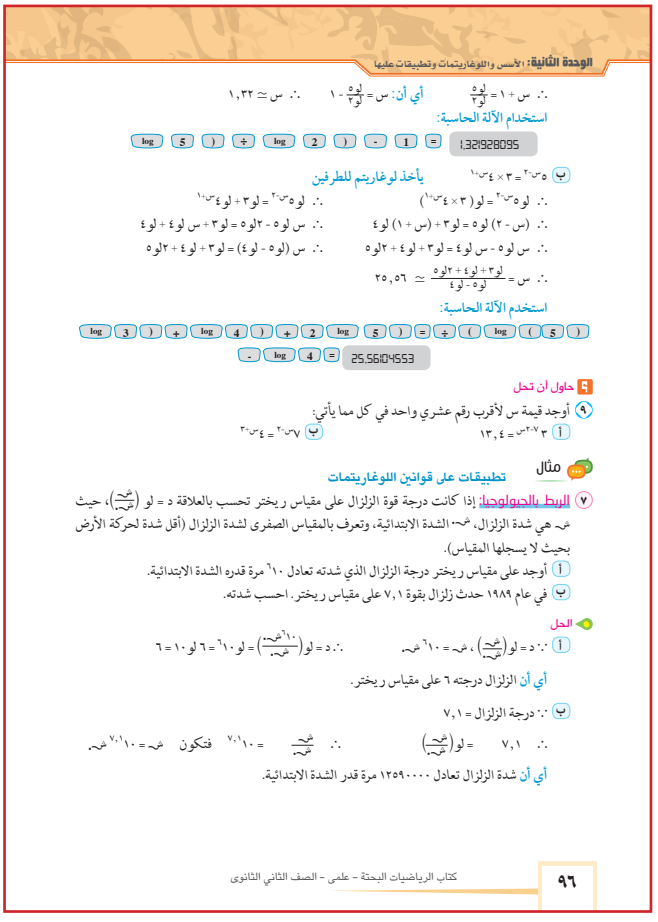
(٦) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ ٢ $^{٣س - ١}$ = ٥ ب ٥ $^{٢س + ٣}$ = ٤ $^{١ - ٣س}$

الحل

أ ٢ $^{٣س - ١}$ = ٥ يأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو٢ $^{٣س - ١}$ = لو٥ ∴ (س + ١) لو ٢ = لو ٥



الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

∴ س + ١ = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ أى أن: س = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ - ١ ∴ س ≃ ١,٣٢

استخدام الآلة الحاسبة:

log 5) ÷ log 2) - 1 = 1.321928095

ب ٥ $^{٣س - ٣}$ = ٣ × ٤ $^{س + ١}$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو٥ $^{٣س - ٣}$ = لو (٣ × ٤ $^{س + ١}$) ∴ لو٥ $^{٣س - ٣}$ = لو٣ + لو٤ $^{س + ١}$

∴ (س - ٣) لو٥ = لو٣ + (س + ١) لو٤ ∴ س لو٥ - ٣لو٥ = لو٣ + س لو٤ + لو٤

∴ س لو٥ - س لو٤ = لو٣ + لو٤ + ٣لو٥ ∴ س (لو٥ - لو٤) = لو٣ + لو٤ + ٣لو٥

∴ س = $\frac{\text{لو٣ + لو٤ + ٣لو٥}}{\text{لو٥ - لو٤}}$ ≃ ٢٥,٥٦

استخدم الآلة الحاسبة:

(log 5) ÷ (log 5) + log 2) + log 4) + log 3) = 25.56104553

حاول أن تحل

(٩) أوجد قيمة س لأقرب رقم عشرى واحد فى كل مما يأتى:

أ ٣ ^{٣٠٧س} = ١٣,٤ ب ٧ ^{٢٠س} = ٤ ^{٣٠س}

مثال

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

(٧) الربط بالجيولوجيا: إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو ($\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{٠}}$)، حيث ش هى شدة الزلزال، ش$_{٠}$ الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١٠^{٦} مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب فى عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ ∵ د = لو($\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{٠}}$) ، ش = ١٠^{٦} ش$_{٠}$ ∴ د = لو($\frac{١٠^{٦}\text{ ش}_{٠}}{\text{ش}_{٠}}$) = لو ١٠^{٦} = ٦ لو ١٠ = ٦

أى أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب ∵ درجة الزلزال = ٧,١

∴ ٧,١ = لو($\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{٠}}$) ∴ $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{٠}}$ = ١٠^{٧,١} فتكون ش = ١٠^{٧,١} ش$_{٠}$.

أى أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

PDF Compressor Pro

(١٢) إذا كان جـ = م(١ + ر)ن حيث (جـ) جملة مبلغ (م)، (ر) ربح الجنيه فى السنة ، (ن) عدد السنوات ، فأوجد (جـ) إذا كانت م = ٢٧٥٠ جنيهًا ، ر = ٠,٠٩٥ جنيه ، ن = ٢٠ سنة .

(١٣) إذا كان جـ = $\frac{\text{ا}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ وكانت ا = ٣٢,٩ ، ر = ١,٠٨ ، جـ = ٩١٠٠ أوجد قيمة ن لأقرب عدد صحيح .

إجابات تمارين الدرس السادس

(١) أ ٣ ب ٥ جـ ٢
د ٢ هـ -٣ و $\frac{١}{٣}$

(٢) أ ١ ب ١ جـ ٢
د ١ هـ ٠ و ٠

(٣) أ ✗ ب ✗ جـ ✓
د ✗ هـ ✓ و ✓ ز ✗

(٤) س + ص ، $\frac{٢س + ص}{س + ٢ص}$

(٥) أ ٠,٩٤٣٦ ب ٤,٨٩٠٢
جـ ٠,٠٧٣١ د ٠,١ أو ١٠٠

(٦) أ ٤ ب ٢ جـ ٢
د $\frac{١}{١٠}$ أو ١٠٠٠ هـ ٠,٠٠١ أو ١ أو ١٠٠٠
و ٢ ز ٣ ح {٢} ط {٣}

(٧) أ ٠,٤٩٨٣ ب ٢
جـ ١,١٣٧٤ د ١,٢٢٣٧

(٨) ٢٧ رقم (٩) أ ٣ ب $١٠^{-٩}$

(١٠) ص = س (١,٠٧)ن وبعد عام ص = ١,٧ س
٢ × ١,٠٧س = س (١,٠٧)ن ومنها ن =

(١١) لو ١٠ = ١

(١٢) **اكتشف الخطأ:**
حل إسراء: الخطأ: لو س ص^{٢} (لو س + لوص)
الصواب = لو س ص^{٢} = لو س + ٢ لو ص

بعض إجابات التمارين العامة ص١٠١، ١٠٢

(١) أ ب ب د جـ أ د أ هـ ب و ب
ز ب ط أ

(٢) أ (-١) ب (٤) جـ (٢)
د (٨، -٨) هـ (١٠، ٠,١) و (١٦)
ز $(\frac{١}{٢})$ ط $(\frac{-١٧}{٨})$

(٣) أ ٢٥ ب ع ، ع$^{+}$ جـ ع$^{+}$ ، ع
د ١ هـ (٢، ٠) و ٦٤

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة ع = ١٠^{٥} (١,٣)$^{ن - ٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة
ا احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥
ب فى أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.

تمـارين ٢ - ٦

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة
ا لو ١٠٠٠ ب لو ٣٢ جـ لو ١٦ د لو ٤٩
هـ لو ٠,٠٠١ و لو ٢ ز لو ١ ح لو $\frac{\text{ص}^{٧}}{\text{ص}}$

(٢) اختصر لأبسط صورة
ا لو ٢ + لو ٥ ب لو ١٥ - لو ٣ جـ $\frac{\text{لو}^{٢٥}}{\text{لو}^{٥}}$
د لو ٨ + لو ٢ هـ لو ٥٤ - ٣ لو ٢ و ١ + لو ٣ - لو ٢ - لو ١٥
ز لو ا + لو ب + لو جـ ح $\frac{١}{\text{لو}^{١٢}}$ + $\frac{١}{\text{لو}^{٨}}$ + $\frac{١}{\text{لو}^{١٣}}$

(٣) علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∈ ع$^{+}$ ، ا، ب ∈ ع$^{+}$ - {١}:
ا لو (س + ص) = لو س + لو ص ( )
ب لو (س + ص) = لو س × لو ص ( )
جـ لو (س ص) = لو س + لو ص ( )
د لو ٢س^{٥} = ٥ لو ٢س ( )
هـ لو $(\frac{\text{س}}{\text{ص}})^{١٠}$ = لو س + لو ص^{١٠} ( )
و لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$ ( )
ز إذا كان س < صفر فإن لو س^{٤} = ٤ لو س ( )

(٤) إذا كان لو ٢ = س^{٨}، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كل من: لو ٦ ، لو ١٢

(٥) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.
ا ٧ ^{٣٠س} = ٥ ب ٧ ^{١٠س} = ٣ ^{٢٠س} جـ $\frac{٥}{٧}$ ^{س} = $\frac{٥}{١٠}$ ^{س} د س لو س = ١٠٠ س

(٦) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:
ا لو س = ١ - لو (س - ٣) ب لو (س + ٦) = ٢ لو س جـ لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١
د (لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣ هـ (لو س)^{٣} = لو س^{٩} و ٣ لو س = ٢ لو ٣^{٣}
ز لو س = لو ٣ ح لو س + لو ٢ = ٢ ط لو (٢ س - ٤) + س - ٥ = صفر

(٧) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:
ا لو ٣,١٥ ب لو ٢٥ جـ ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧ د $\frac{٣ \times ١٥٠}{٢٥٠ \times ٧}$

(٨) استخدم الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد ٤^{٤٧}

(٩) **الربط بالكيمياء:** يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين فى المحلول (H^{+}) أى أن: $PH = - \log (H^{+})$
ا احسب الرقم الهيدروجينى لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10^{-3}
ب احسب تركيز الهيدروجين فى محلول رقمه الهيدروجينى 9

(١٠) **الربط بالسكان:** إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪
ا أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.
ب بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

(١١) إذا كان س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة لو $(\frac{١}{\text{س}} + \text{س})$

(١٢) **اكتشف الخطأ:** قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر: لو س^{٣} + لو ص^{٤} - لو س ص^{٢}

حل أميرة
المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص
= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)
= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص
= لو س + ٢ لو ص

حل إسراء
المقدار = لو $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = لو س^{٢} ص^{٢}
= لو (س ص)^{٢} = ٢ لو س ص

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

(١٣) **تفكير ابداعى:** بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:
لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°)

PDF Compressor Pro

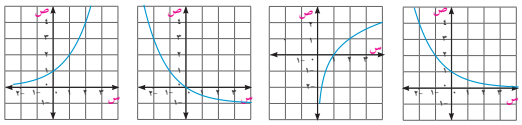
تمارين عامة

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) إذا كان ٣^س = ٥ فإن س =

(أ) ٢ (ب) لو٣ ٥ (جـ) لو٥ ٣ (د) ٥/٣

(ب) الدالة د حيث د (س) = ٢^س يمثلها الشكل البيانى



(أ) (ب) (جـ) (د)

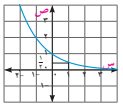
(جـ) لو٣ ٨١ =

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) -٤ (د) ٣٢/٣

(د) |س^٢ + |س + ١| + |س| / |س^٢ + |س + ١| + |س - ١| =

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) |س| (د) ١

(هـ) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث



(أ) د(س) = ٢^(س+١) (ب) د (س) = ٢^(-س)

(جـ) د (س) = ٣^(-س) (د) د (س) = ٢^س

(و) أى مما يأتى يكافئ لو٧ ٢ / لو٧ ٦ ؟

(أ) لو٧ ٦ (ب) لو٤٩ / لو٤٣ (جـ) ٢/لو٦ ٧ (د) لو٧ ٦

(ز) إذا كان لو٣ (س - ٤) = ٤ فإن س =

(أ) ٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(ح) لو ٠,٠١ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) -٢

(ط) إذا كان منحنى ص = لو٤ (١ - |س|) يمر بالنقطة (١/٢ ، -١/٢) فإن |ا =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

اختبار تراكمى

(١) أوجد قيمة كل من:

(أ) (-٣٢)^(٤/٥) (ب) ∜١٦ (جـ) لو٠,٠٩ (٠,٣)^٢٠

(٢) اختصر لأبسط صورة:

(أ) ٥س^٣ × ٤س^٢ / ١٠س^٥ (ب) ٥ × ٣^(٥٠) - ٤ × ٣^(٥٠) / ٢ × ٣^(٥٠) - ٣^(٥٠) (جـ) لو٤ ٤ + ٢ لو٣ ٣

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة:

(أ) ٢^س = ١٠ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى.

(ب) لو٣ س + لو٣ ٣ = ٢

(جـ) ٢^س - ٢^(س+١) + ٢^(س-١) = -١

(د) س^(٤/٣) - ٣٣س^(٢/٣) + ٣٢ = صفر

(٤) اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) العدد ٢^٢٤ + ٢^٢٣ + ٢^٢٢ يقبل القسمة على .....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(ب) إذا كان لو(س + ١١) = ٢ فإن س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

(جـ) مجموع جذور المعادلة س^٤ = ١٦ يساوى .....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

(د) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، π/٣[

(أ) ا (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

(٥) إذا كان لو(س ÷ ص) = ١/٢ (لو س + لو ص) + لو ٢ أثبت أن س = ص.

(٦) الربط بالفيزياء: يعطى الزمن الدورى للبندول بالعلاقة ن = ٢π √(ل/ع)، حيث ن الزمن بالثوانى، ل طول البندول بالسم، ع عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^٢

(أ) أوجد الزمن لبندول كبير طوله ٧٣سم.

(ب) يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من ١٠ ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

(٧) الربط بالجيولوجيا: تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس رختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة: م = لوس، حيث س سعة الموجة التى تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت ١٠ درجات على مقياس رختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت ٧ درجات على نفس المقياس.

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلات

(أ) ٥ س^(-٢) = ١/١٢٥ (ب) لو٣ (٣√٧) س^(-٤) = ١ (جـ) ٧ س^(-٢) = ٥ س^(-٢)

(د) س^(٢/٣) = ٤ (هـ) س لوس ١٠ = ١٠ (و) √(لو٣ س) = لو٧ √س

(ز) لو٣ س + لو٤ س = -٣/٢ (ح) لو (س + ٣) - لو (س + ٢) = ١

(٣) أكمل ما يأتى:

(أ) إذا كان ٢^س = ٥ فإن ٤^س = ...

(ب) مجال الدالة د حيث د (س) = ٣^س هو ..... ومداها هو .....

(جـ) مجال الدالة د حيث د (س) = لو٣ س هو ..... ومداها هو .....

(د) لو٣ ٥ × لو٥ ٣ = ...

(هـ) منحنى الدالة ص = لو٣ (٣ - س) يقطع محور السينات فى النقطة .....

(و) إذا كان لو٣ س = ٤ فإن س = ...

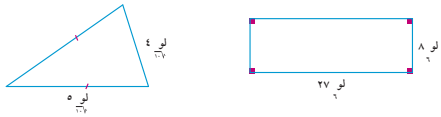
(٤) أكمل الجدول التالى مستخدمًا الحقيقة ص = لو_ب س تكافئ ب^ص = س

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
٢^٥ = ٣٢	.....
.....	لو٣ ٨١ = ٤
س = ص^٤	.....
.....	لو١٠ ١٠ = ١
١٦^(١/٤) = ٢	.....
.....	لو٣ ١/٢٥ = -٢

(٥) مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال

(أ) د (س) = (٣/٢)^س (ب) د (س) = لو٢ (س + ١)

(٦) أوجد محيط كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة:



اختبار تراكمى

(١) أ -٨ ب ١/٨ جـ -١

(٢) أ ١٠ ب (١١/١٥) جـ ٢

(٣) أ (٣، ٣٢) ب (٢٥/٣) جـ (١)

(٤) أ ٧ ب ٨٩ جـ صفر

(٥) لو(س + ص) = ١/٢ (لو س + لو ص) + لو ٢ بالضرب فى ٢

∴ ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + لو ٤

∴ لو (س + ص)^٢ = لو ٤س ص

∴ (س + ص)^٢ = ٤س ص

∴ س^٢ - ٢س ص + ص^٢ = ٠

(س - ص)^٢ = صفرًا ← س = ص

(٦) أ ١٧,١٥

(٧) نفرض سعة الموجة للزلزال الأول هى س١ وسعة الموجة للزلزال الثانى هى س٢

∴ ١٠ = لو س١ ← س١ = ١٠^١٠

أيضًا ٧ = لو س٢ ← س٢ = ١٠^٧

∴ س١/س٢ = ١٠^٣ ∴ س١ = ١٠٠٠ س٢

أى أن سعة موجة الزلزال الأول تعادل ١٠٠٠ مرة قدر سعة موجة الزلزال الثانى.

PDF Compressor Pro



الوحدة
الثالثة

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدمًا في ذلك طرقًا كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل. وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شُغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبنيز Leibnitz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان Calculus هو أحد فروع الرياضيات التي تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيرًا ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ ما فيها من أنشطة يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعينة:
  $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$ ، ...
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:
  بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-1}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية في صورة نشاط.
- يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.
- يتعرف مفهوم اتصال الدالة:
  اتصال دالة عند نقطة – اتصال دالة على فترة – إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

اطلب إلى طلابك قراءة مقدمة الوحدة ومناقشة ما يتضمنه من معلومات عن علماء الرياضيات ومجال التفاضل والتكامل أو الحساب، وكلفهم بالرجوع إلى الشبكة الدولة للمعلومات (الإنترنت) للحصول على مزيد من المعلومات عن هؤلاء العلماء بشكل عام وأيضًا مزيد من المعلومات عن موضوعات علم التفاضل والتكامل.

سبق للطالب دراسة الدوال وبعض خواصها، وسوف يدرس الطالب مفهومًا جديدًا هو نهاية الدالة وكيفية إيجاد نهاية الدالة بيانيًّا وجبريًّا من خلال دراسة الشكل البيانى للدالة والنظريات التى يمكن بها إيجاد نهاية الدالة جبريًّا، وذلك من خلال ستة دروس وهى:

الدرس الأول: مقدمة فى النهايات.

الدرس الثانى: إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.

الدرس الثالث: نهاية الدالة عند اللانهاية.

الدرس الرابع: نهاية الدوال المثلثية.

الدرس الخامس: بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

الدرس السادس: الاتصال.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعينة مثل ÷ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب فى المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون.

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-1}$$

- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$$

- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.

PDF Compressor Pro

الزمن المناسب لتدريس الوحدة

١٤ حصة.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة

التفكير المنطقى - حل المشكلات - التفكير الإبداعى.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - أقلام السبورة الملونة - آلة حاسبة بيانية - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة - المناقشة - العصف الذهنى - التعلم التعاونى - الطريقة الاستقرائية - الطريقة الاستنباطية.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الدرس والأسئلة المتضمنة فى بند حاول أن تحل كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة فى بند تحقق من فهمك فى نهاية كل درس والأسئلة المتضمنة في كل من التمارين العامة للوحدة والاختبار التراكمى.

المخطط التنظيمى للوحدة

وضح لطلابك المخطط التنظيمى للوحدة مؤكدًا على الربط بين المفاهيم الجديدة والمفاهيم السابقة، وبين لهم أن هذا المخطط سيتم استيعابه بشكل كامل بعد الانتهاء من دراسة وتعلم موضوعات الوحدة.

وضح للطلاب أن الصف الأخير من المخطط التنظيمى يوضح الخطوات العلمية الصحية التى يجب القيام بها لإيجاد نهاية دالة أن لابد أن يبدأ الطالب بالتعويض المباشر وفى حالة الحصول على كمية غير معينة يتم دراسة الدالة وتحديد أى الطرق الموضحة يمكن استخدامها لإيجاد النهاية للدالة.

المصطلحات الأساسية

اطلب إلى طلابك الاطلاع على الجزء الخاص بالمصطلحات وتوضيح المصطلحات التى سبق تعلمها فى صفوف سابقة وكذلك تحديد المصطلحات الجديدة بالنسبة لهم ومؤكدًا أن تلك المصطلحات الجديدة سيتم استيعابها وفهمها من خلال دروس وأنشطة الوحدة.



المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	Unspecified Quantity
غير معرف	Undefined
نهاية يمنى	Right Limit
نهاية يسرى	Left Limit
نهاية دالة	Limit of a Function
تعويض مباشر	Direct Substitution
دالة كثيرة الحدود	Polynomial Function
نهاية الدالة عند اللانهاية	Limit of a Function at Infinity
دالة مثلثية	Trigonometric Function
نهاية دالة مثلثية	Limit of a Trigonometric Function
اتصال دالة	Continuity of a Function

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): مقدمة فى النهايات.
الدرس (٣ - ٢): إيجاد نهاية الدالة جبريًا.
الدرس (٣ - ٣): نهاية الدالة عند اللا نهاية.
الدرس (٣ - ٤): نهايات الدوال المثلثية.
الدرس (٣ - ٥): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.
الدرس (٣ - ٦): الاتصال.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

مخطط تنظيمى للوحدة

١٠٥ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

PDF Compressor Pro

٣ - ١ مقدمة فى النهايات
Introduction to Limits of Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب العمليات الحسابية البسيطة ومجموعة الأعداد الحقيقية وخواص بعض الدوال والتمثيل البيانى لها كالدالة الخطية والتربيعية، وفى هذا الدرس سوف يدرك أن هناك بعض الكميات غير المعنية و يتعرف معنى نهاية الدالة.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذ أنشطته يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف الكميات غير المعينة ويتعرف نهاية دالة عند نقطة.
- يتعرف إيجاد نهاية دالة عند نقطة بيانيًا وجبريًا.
- استخدام الآلة الحاسبة البيانية أو البرامج الرسومية.

مفردات أساسية

- كمية غير معنية – كمية غير معرفة – نهاية الدالة – قيمة الدالة عند نقطة – نهاية يمنى – نهاية يسرى.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - أقلام السبورة الملونة - آلة حاسبة بيانية - حاسب آلى - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

- المحاضرة (العرض المباشر) – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

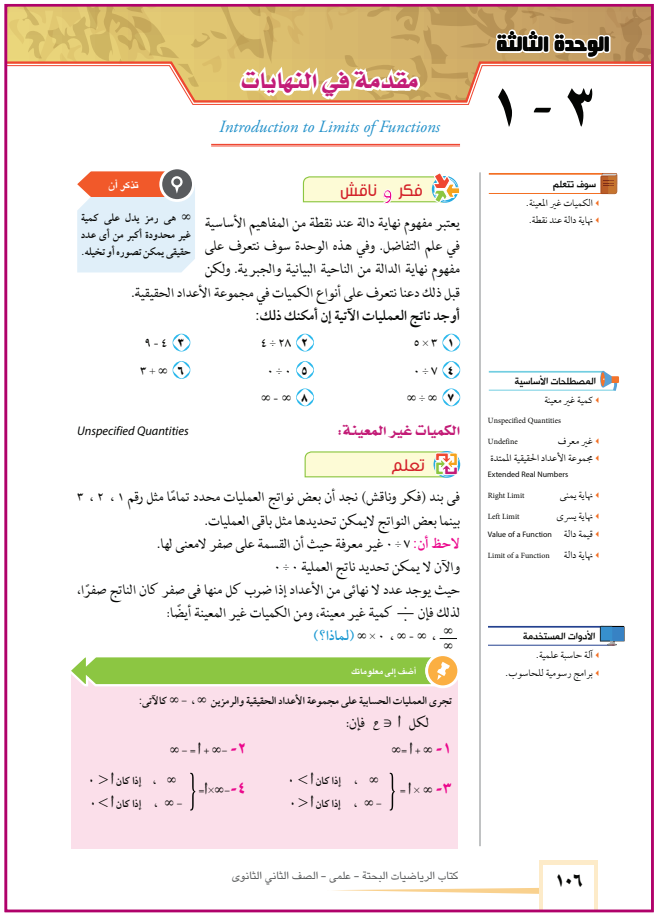
مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٠٦ إلى صفحة ١١٢

إجراءات الدرس

- فى هذا البند يتعرف الطالب الكميات غير المعينة وهى الكمية التى لايمكن تحديد قيمة وحيدة لها مثال ناتج عملية القسمة.

صفر ÷ صفر حيث أن هناك عددًا لانهائى من القيم إذا ضرب فى صفر كان الناتج صفرًا لذلك فإن الكمية صفر ÷ صفر هى كمية غير معنية ويتعرف أيضًا بعض الكميات غير المعينة الأخرى مثل $\frac{\infty}{\infty}$ ، أو $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$

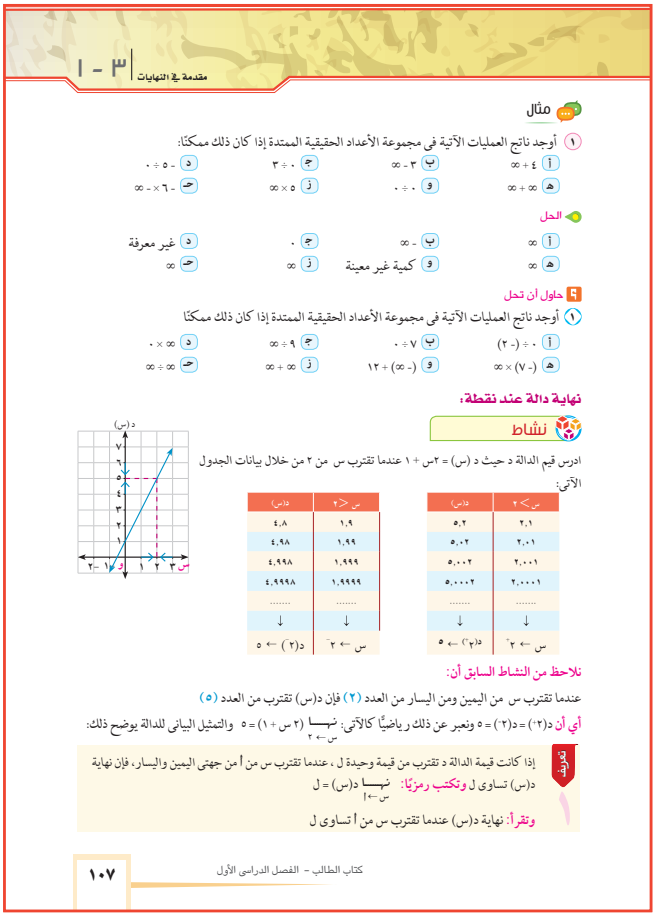


- بينما الكمية غير المعرفة هى ناتج قسمة أى عدد حقيقى ≠ ٠ على الصفر.

التمهيد فكر وناقش:

- اعرض على الطلاب العمليات المتضمنة صـ١٠٦ واطلب منهم تحديد ناتج إجراء العملية ومن خلال تلقى الإستجابات من الطلاب وضح لهم عددًا من المفاهيم والمصطلحات مثل القسمة على $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، عدد × ∞
- أكد على ما التوصل إليه من خلال المناقشات مع ما هو مذكور فى بند تعلم تحت عنوان الكميات غير المعينة.
- قسمة عدد صفر على صفر هى عملية غير منطقية (ليست لها معنى).
- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية لها معنى وتعد غير معينة ، ويمكن تعينها باستخدام النهايات.
- صفر صفر ، ∞ – ∞، $\frac{\infty}{\infty}$ ، صفر × ∞، ∞ صفر ،....

PDF Compressor Pro



أضف إلى معلوماتك

مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة ع

- أشر إلى الطالب على أن ∞ ، - ∞ ليست أعداد حقيقية و إنما هى رموز تدل على كمية (قيمة) أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره و إضافتها إلى مجموعة الأعداد الحقيقية هى إضافة لفهم سلوك الدالة ، وتحليل الدوال والكميات وأن ع ليست مجموعة تحقق خواص مجموعات الأعداد من حيث الانغلاق والإبدال...
- ناقش مع طلابك الفرق بين كمية غير معينة وكمية غير معرفة.
- وضح لطلابك الخصائص المترتبة على إضافة ∞، - ∞ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بعد التأكيد على استيعاب الطلاب لتعريف ∞ ووضح لهم الخصائص الموضحة فى نهاية ص ١٠٦ والتى توضح نتائج إضافة عدد حقيقى (أ) إلى ∞ أو - ∞ أو قسمتة على ∞ أو - ∞ وكذلك حاصل ضرب عدد حقيقى فى ∞ أو - ∞

التقييم المستمر:

أثناء عرض الدرس اطلب إلى طلابك إيجاد ناتج بعض العمليات البسيطة الموضحة ص١٠٧، وتحقق من قدرة الطلاب على إيجاد الناتج أو توضيح كونه كمية غير معرفة أو كمية غير معينة.

إجابات حاول أن تحل ص ١٠٧

أ	٠	ب	غير معرف
جـ	٠	د	كمية معينة
هـ	∞-	و	∞-
ز	∞	حـ	كمية غير معينة

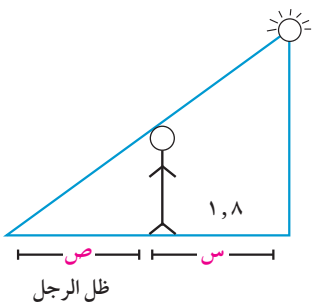
نشاط جماعى:

دراسة قيم الدالة عندما تقترب س من قيمة محددة من جهتيها (من اليمين ومن اليسار)

- ناقش مع الطلاب مضمون النشاط للتأكد من استيعابهم للنهاية عندما تقترب س من ٢ واطلب منهم إعطاء أمثلة حتى يصلوا بأنفسهم إلى مفهوم اليمين (س < ٢) واليسار (س > ٢)
- قسم الفصل إلى مجموعات بعضهم يقوم بتمثيل الدالة د(س) = ٢س + ١ على الحاسب مستخدمًا البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية فى حال توافرها والبعض الآخر يدرس قيم الدالة عندما تقترب س من ٢ من اليمين (س < ٢) أو من اليسار (س > ٢) موضحًا اليمين واليسار على خط الأعداد.
- وضح لهم أن دراسة قيم الدالة يستلزم عمل الجداول مستخدمًا الحاسب الآلى أو حتى يدويًا وبين لهم ومن خلال فى الجداول والتمثيل البيانى أن يمكن استنباط تعريف نهاية الدالة.

نشاط إضافى:

- للوصول لمفهوم النهاية افرض أن رجل طوله ١,٨متر يسير في اتجاه عمود إناره، وبفرض س تمثل بُعد الرجل عن العمود، ص تمثل طول ظل الرجل.
- اطلب إلى تلاميذك دراسة العلاقة بين س، ص وماذا يحدث لقيم ص عندما يقترب الرجل من العمود ؟ نلاحظ أنه كلما اقترب الرجل من العمود كلما قل طول ظله أى كلما اقترب س من الصفر (س ← صفر) فإن ص تقترب من الصفر (ص ← صفر)



PDF Compressor Pro

- بعد مناقشة المثال (٢) الموضح بالكتاب والتأكد من قدرة الطلاب على إيجاد نهاية الدالة بشكل بيانى أو جبرى.
- يقوم المعلم بعرض أمثلة تطابق المثال رقم (٢) ص ١٠٨ لتقدير نهاية دالة سواء بالطريقة البيانية أو الجبرية مثل:
- د(س) = س^{٢} عندما س ⟵ صفر
- د(س) = ٣س عندما س ⟵ صفر

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل (٢) ص ١٠٨

أ) -٥ ب) -٢

تمارين اثرائية على تقدير النهاية جبريًا أو بيانيًا

قدر كلًا من النهايات الآتية عندما س ⟵ ٢

(١)

س	١,٩	١,٩٩	٠٠٠	٢	٠٠٠	٢,٠١	٢,١
د(س)	٤,٨	٤,٩٨	٠٠٠	؟	٠٠٠	٥,٠٢	٥,٢

الجواب: نهـا$_{س\to٢}$ د(س) = ٥

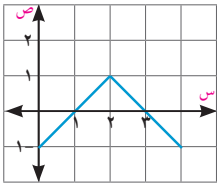
(٢)

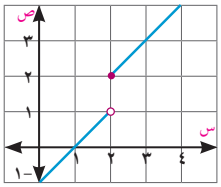
س	١,٩	١,٩٩	٠٠٠	٢	٠٠٠	٢,٠١	٢,١
د(س)	١,٧	١,٩٧	٠٠٠	؟	٠٠٠	٤,٠١	٤,١

الجواب: نهـا$_{س\to٢}$ د(س) غير موجودة حيث د(٢$^{+}$) = ٢ ، د(٢$^{-}$) = ٤

(٣) **الجواب:** نهـا$_{س\to٢}$ د(س) = ١

(٤) **الجواب:** نهـا$_{س\to٢}$ د(س) غير موجودة





نشاط جماعى:

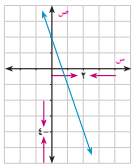
- استخدام التكنولوجيا فى إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)
- وجه الطلاب إلى كيفية استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية تمثيل الدوال الثلاث فى ص١٠٩ بيانيًا وتقدير نهاية الدالة عند النقطة البينة، ويمكن للطلاب العمل بشكل فردى أو مجموعات صغيرة (اثنان من الطلاب) لتنفيذ الخطوات الموضحة بالكتاب المدرسى، وعليك متابعة الأداء ومساعدتهم فى استخدام البرنامج الرسومى، والتأكد من إدخال الدالة بشكل صحيح والحصول على الشكل البيانى الصحيح للدوال ومن خلال المناقشات يمكن للطلاب استنتاج أن وجود نهاية الدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

مثال تقدير النهاية (النهاية تساوى قيمة الدالة)

(٢) قدر نهـا$_{س\to٢}$ (٢ - ٣س) بيانيًا وعدديًا

الحل

جبريًا: تمثل الدالة الخطية: ص = ٢ - ٣س بيانيًا كما بالشكل المقابل:



ومن الرسم نلاحظ أن:

عندما س ⟵ ٢ فإن د(س) ⟵ -٤

أى أن: نهـا$_{س\to٢}$ (٢ - ٣ س) = -٤

عدديًا: نكون جدولاً لقيم د(س) وذلك باختيار قيم س تكون قريبة من العدد ٢ من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتى:

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟵	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٤,٣-	٤,٠٣-	٤,٠٠٣-	⟵	٤-	⟵	٣,٩٩٧-	٣,٩٧-	٣,٧-

يبين الجدول أنه كلما س اقترب من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد -٤

حاول أن تحل

(٢) قدر نهاية كل مماياتى بيانيًا وعدديًا.

أ) نهـا$_{س\to٢}$ (١ - ٣س) ب) نهـا$_{س\to٠}$ (س^{٢} -٢)

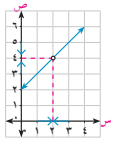
مثال تقدير النهاية (النهاية لاتساوى قيمة الدالة)

(٢) قدر نهـا$_{س\to٢}$ $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ بيانيًا وجبريًا.

الحل

بيانيًا: يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة د حيث: د(س) = $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$

حيث س ≠ ٢.



ونلاحظ من الشكل أنه عندما س ⟵ ٢ فإن قيمة د(س) ⟵ ٤

لذلك فإن: نهـا$_{س\to٢}$ $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ = ٤

جبريًا: نكون جدولاً لقيم د(س) ، وذلك باختيار قيم س القريبة من العدد ٢

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟵	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	⟵	٤	⟵	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

يبين الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد ٤.

لاحظ من هذا المثال أن:

١) الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين عندما س = ٢

٢) وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢ حيث إن س ∈ ع - {٢}

وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهما فى النهايات.

حاول أن تحل

(٢) قدر نهاية كل مماياتى بيانيًا وعدديًا:

أ) نهـا$_{س\to٢}$ $\frac{س^{٢}-١}{س+١}$ ب) نهـا$_{س\to٣}$ $\frac{س^{٢}-٢س-٣}{س-٣}$ ج) نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{١}{س}$

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)

نشاط

استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:

١) د(س) = س^{٣} عند س ⟵ صفر

٢) د(س) = $\left(\frac{س^{٢}-١}{س-١}\right)$ - ٢ عند س ⟵ ١

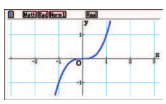
٣) د(س) = $\frac{جا س}{س}$ عند س ⟵ صفر

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (Geogebra)

في الحاسب الآلى أو فى التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتى:

١) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالةد حيث: د(س) = س^{٣}

من الرسم نهـا$_{س\to٠}$ د(س) = صفر

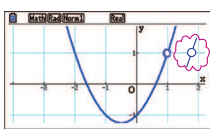


٢) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

د(س) = $\left(\frac{س^{٢}-١}{س-١}\right)$ - ٢

من الرسم نهـا$_{س\to١}$ د(س) = ١

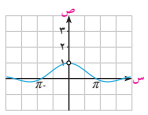
(لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١))



٣) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\frac{جا س}{س}$

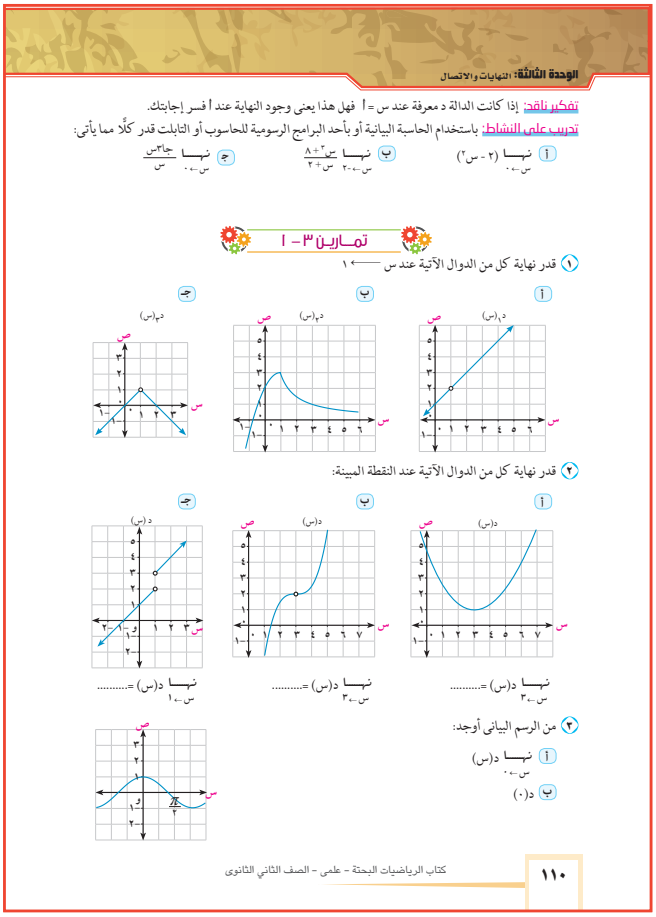
من الرسم نجد أن نهـا$_{س\to٠}$ $\frac{جا س}{س}$ = ١



نستنتج من النشاط السابق أن:

إن وجود نهاية الدالة عندما س ⟵ أ لا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

PDF Compressor Pro



تجنب الخطأ:

- قد يخلط بعض الطلاب بين إيجاد د(١)، $\lim_{س \to ١}$ د(س) فى الدالة د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ حيث تكون د(١) = $\frac{٠}{٠}$ (كمية غير معينة) $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ (من الرسم أو بالجدول).
- وضح للطلاب كيفية استنتاج وجود نهاية للدالة من الشكل البيانى وأكد على العلاقة بين النهاية اليمنى واليسرى وظهور الفجوة وبالتالى عدم وجود النهاية.

التقييم المستمر:

إجابة حاول أن تحل ص ١٠٩

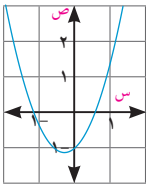
أ ١ ب ٤

استخدام التكنولوجيا فى إيجاد نهاية دالة عند نقطة

من أهم البرامج المتخصصة فى رسم الدوال وحل المعادلات هو برنامج (*Geogebra*)وفيمايلى نعرض لك أخى المعلم كيفية تمثيل الدوال بالبرنامج.

لتمثيل الدالة د(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ - ٢

- نفتح البرنامج وفى شريط الأوامر (input)نكتب الدالة كمايلى: (x^3 - 1) / (x - 1) - 2
- ثم نضغط inter فنحصل على الرسم الآتى:



لتمثيل الدالة د(س) = { س+٢ ، س ⩽ ١ ; - س ، س > ١ }

وهذا يتطلب رسم دالة بمجال جزئى من ع

من شريط الأوامر نكتب function

ثم نكتب الدالة بين القوسين وبجوارها نقطة البداية ونقطة النهاية هكذا *function [x + 2, 1, 100]*

ثم نكتب الدالة الثانية function *[-x, -100, 1]*

مع مراعاة تعريف الدالة عند النقطة

نلاحظ من الرسم أن $\lim_{س \to ١}$ غير موجودة

حيث د(١+) = ٣ ، د(١-) = -١

التقييم المستمر:

تفكير ناقد ص ١١٠

تأكيد استيعاب الطلاب المفهوم تعريف الدالة ونهاية الدالة، وهذا الاستيعاب يتطلب قدرة الطالب على المعرفة فى استخدام المفردات ويميز بين الدالة المعرفة عند نقطة أو الدالة التى لها نهاية عند نقطة وبتوظيف مهارات التفكير الناقد يصل الطلاب إلى أنه يهدف إلى إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لايعنى أن تكون الدالة لها نهاية عند س = أ

نشاط ص (١١٠):

الهدف من النشاط هو تدريب الطالب على استخدام أحد البرامج الرسومية مثل (Geogebra) لرسم المنحنيات؛ وذلك لإيجاد نهاية دالة عند نقطة (إن وجدت) من الرسم ونقوم بهذا الإجراء وذلك بتقسيم الطلاب إلى ثلاث مجموعات تعطى لكل مجموعة احدى مسائل التدريب.

إجابات أسئلة النشاط:

أ $\lim_{س \to ٠}$ (٢ - س^٢) = ٢ ب $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}$ = ١٢

ج $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا ٣س}{س}$ = ٣

PDF Compressor Pro

سلم تقييم النشاط:

التقدير	اداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يرسم الطالب منحنى الدالة بيانيًّا، ويوجد نهايتها من الرسم بدقة
جيد جدًّا ٨ درجات	يرسم الطالب منحنى الدالة بيانيًّا، ويخطأ فى إيجاد نهايتها بدقة من الرسم
جيد ٧ درجات	يحتاج الطالب إلى مساعدة طفيفة فى رسم منحنى الدالة بيانيًّا وإيجاد نهايتها من الرسم.
مقبول ٥ درجات	يحتاج الطالب إلى مساعدة كبيرة فى رسم منحنى الدالة بيانيًّا وإيجاد نهايتها .
ضعيف أقل من ٥ درجات	لايستطيع الطالب رسم منحنى الدالة، وإيجاد نهايتها ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه.

إجابات تمارين الدرس الأول ص ٩٨

١ أ $\lim_{س\to١} د(س) = ٢$ ب $\lim_{س\to١} د(س) = ٣$

ج $\lim_{س\to١} د(س) = ١$

٢ أ $\lim_{س\to١} د(س) = ١$ ب $\lim_{س\to٣} د(س) = ٢$

ج $\lim_{س\to١} د(س)$ غير موجودة

٣ أ $\lim_{س\to٠} د(س) = ١$ ب د (٠) = ١

تابع إجابات تمارين الدرس الأول:

٤ أ $\lim_{س\to٣} د(س)$ ليس لها وجود ب د (٣) = ١

٥ أ $\lim_{س\to-٢} د(س) = ٠$ ب د (-٢) = ٣

ج $\lim_{س\to٠} د(س) = ٢$ د د (٠) = ٢

٦ أ $\lim_{س\to٠} د(٢ - س^٢) = ٢$ ب د (٠) = ٢

٧ أ $\lim_{س\to-٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = -٤$ ب د(-٢) غير معرفة

٨ أ د (٠) = ١ ب ليس لها وجود

ج د (٢) غير معرفة د ٣

٩ $\lim_{س\to٢} (٥س + ٤) = ١٤$ ١٠ $\lim_{س\to-١} (٣س + ١) = -٢$

١١ $\lim_{س\to-١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = -٢$ ١٢ $\lim_{س\to٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤} = \frac{١}{٤}$

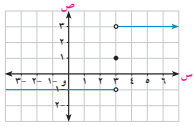
١٣ أ ٢ ب -٣ ج ٣

د صفر هـ صفر و صفر

٤ من الرسم البيانى المقابل أوجد

أ $\lim_{س\to٣} د(س)$

ب د(٣)



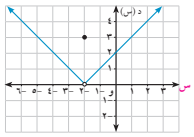
٥ من الرسم البيانى المقابل أوجد:

أ $\lim_{س\to-٢} د(س)$

ب د(-٢)

ج $\lim_{س\to٠} د(س)$

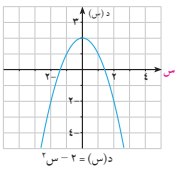
د د(٠)



٦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\lim_{س\to٠} (٢ - س^٢)$

ب د(٠)

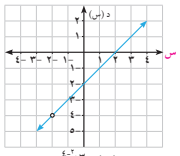


د(س) = ٢ − س^٢

٧ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\lim_{س\to-٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

ب د(-٢)

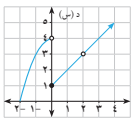


د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

٨ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ د(٠) ب $\lim_{س\to٠} د(س)$

ج د(٢) د $\lim_{س\to٢} د(س)$



٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س\to٢} د(س)$ حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س\to-١} (٣ س + ١)$

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	←	-١	→	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)					؟				

١١ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س\to-١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	←	-١	→	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)					؟				

١٢ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س\to٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

١٣ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل ممايأتى ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الارشادية.

أ $\lim_{س\to٣} (٣س - ٤)$ ب $\lim_{س\to١} (س^٢ - ٤)$

ج $\lim_{س\to-١} \frac{س^٢ + ١}{س + ١}$ د $\lim_{س\to٢} \frac{س^٢ + ٨}{س^٢ - ٣}$

هـ $\lim_{س\to٠} (س + جا س)$ و $\lim_{س\to٠} \frac{جا س - س}{س}$

ز $\lim_{س\to٠} \frac{١}{س}$ ح $\lim_{س\to٠} \frac{١}{|س|}$

PDF Compressor Pro

٢ - ٣ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the Limit of a Function Algebraically


الوحدة الثالثة

٢ - ٣ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the Limit of a Function Algebraically

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند س = أ بيانيًّا أو جبريًا عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من س = أ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

د١(س) = (س٢ - س - ٢)/(س - ٢) ، د٢(س) = س + ١

ماذا تلاحظ؟

أوجد: نهـا د١(س) ، نهـا د٢(س)
س←٢ س←٢

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

نظرية

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع

فإن: نهـا د(س) = د(أ)
س←أ

مثال التعويض المباشر

أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ نهـا (س٢ - ٣س + ٥)
س←٢

ب نهـا (-٤)
س←٣

الحل

أ نهـا (س٢ - ٣س + ٥) = ٤ - ٦ + ٥ = ٣ (بالتعويض المباشر)
س←٢

ب نهـا (-٤) = -٤ لاحظ أن د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع
س←٣

تذكر أن

نسمى الدالة د كثيرة حدود إذا كانت على الصورة

د(س) = حـ٠ + حـ١ س + حـ٢ س٢ ..... + حـن سن

حيث: ن ∈ ط ، حـن ≠ صفر، حـ٠ ، حـ١ ، ... حـن ∈ ع

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية نهـا (س^ن - أ^ن)/(س - أ) = ن أ^(ن-١)
س←أ

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

١١٣

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

خلفية

تعلم الطالب فى الدرس السابق مفهوم نهاية الدالة عند نقطة وتعرف كيف يمكن استنتاج كيفية إيجاد نهاية الدالة جبريًّا من خلال الجداول أو بيانيًّا من خلال الشكل البيانى للدالة.

وفى هذا الدرس سوف نقوم بإيجاد نهاية الدالة جبريًّا باستخدام النظريات والقواعد الأساسية التى تستخدم فى إيجاد نهايات الدوال.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.
- يستخدم التعويض والتحليل والقسمة والضرب فى المرافق لتعيين نهاية الدالة.
- يستخدم النظرية نهـا (س^ن - أ^ن)/(س - أ) = ن أ^(ن-١) فى إيجاد نهايات بعض الدوال.
س←أ

مفردات أساسية

- نهاية الدالة- دالة كثيرة حدود - تحليل - قسمة مطولة - المرافق.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - حاسبة بيانية - حاسب آلى - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١١٣ إلى صفحة ١٢٠ - الإنترنت.

إجراءات الدرس

تعلم «نهاية الدالة كثيرة الحدود»

- ناقش مع الطلاب الدالة كثيرة الحدود وضح لهم الشروط الموضحة فى «تذكر أن».
- اطلب إلى طلابك تذكر نوع الدالة الموضحة فى «ب» فى المثال الموضح ص١١٣ وذكرهم بأنها تسمى الدالة الثابتة.
- وضح لهم أن الدوال كثيرة الحدود يتم إيجاد نهايتها باستخدام التعويض المباشر.

نشاط جماعى

- قسم الطلاب إلى مجموعات صغيرة لكل حاسب آلى، وذلك لرسم الشكل البيانى لكل من الدالتين د١ (س) = (س٢ - س - ٢)/(س - ٢) ، د٢ (س) = س + ١ (وفى حالة عدم توافر الحاسب الآلى يمكن للمعلم أن يرسم شكلًا بيانيًّا للدالتين على السبورة) توجد كل مجموعة من مجموعات النشاط قيم كلًّا من الدالتين عندما س ← ٢ وتستنتج نهاية كل من الدالتين و إيجاد العلاقة بينهما.
- يمكن للمعلم استخدام نتائج النشاط فى مقدمة الدرس فى توضيح النظرية (٣) حيث أن د١ (س) = د٢ (س) لجميع قيم س ∈ ع - {٢} حيث د١ (٢) غير معينة بينما د٢ (٢) = ٣ وطبقًا للنظرية فإن نهـا د١ (س) = ٣ و يدعم ذلك نتائج النشاط.
س←٢

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر:

إجابة حاول أن تحل(١):

أ ١ ب ٦ جـ ٧

يعرض المعلم للطلاب نظرية (٢) التى تعين نهاية الدالة عند نقطة، وعليه أن يستخدم النظريات فى إيجاد نهاية الدالة كما هو موضح بالأمثلة و يتابع الطلبة فى استخدام النظرية فى حل التدريبات.

«نظرية ٢» (٦ حالات)

ناقش مع الطلاب الحالات الموضحة ص١١٤، وتأكد من قدرة الطلاب على التعبير اللفظى عن الجمل الرياضية الستة الموضحة للنظرية بمعنى أن تتأكد من استيعاب الطالب من إيجاد نهاية دالة إذا ضربت فى مقدار ثابت أو نهاية مجموع أو الفرق بين دالتين وكذلك حاصل ضرب أو خارج قسمة دالتين وهكذا

من الأمور الضرورة توضيح شروط تطبيق النظرية، ومنها أن س ← ا فى الدالتين وأن المقدار الثابت ∈ ع وهكذا

أمثلة إثرائية تعطى للطالب:

أوجد: $\lim_{س\to-١}$ $\frac{س-٣}{س^{٢}+١}$، $\lim_{س\to٣}$ $\frac{س+٢}{س-٣}$، $\lim_{س\to٣}$ $\frac{س^{٢}-س-٦}{س-٣}$

امثلة اثرائية للطلاب المتميزين

(١) $\lim_{س\to-١}$ $\frac{س-\sqrt{س+٨}-٢}{س-٤}$ (٢) $\lim_{س\to٢}$ $\frac{(س-٢)^{٢}}{س^{٢}-٤}$

(٣) $\lim_{س\to\frac{\pi}{٣}}$ $\frac{٤-٥\ \text{حتا}\ س-٢\ \text{حا}^{٢}س}{٣-٣\ \text{حتا}\ س-٢\ \text{حا}س}$ (الإجابة: $\frac{٣}{٤}$ ، صفر ، ٣)

إجابة حاول أن تحل(٢):

أ $\frac{١}{٥}$ ب ٣

إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

وضح إلى طلابك أن استخدام التعويض المباشر فى الدوال كثيرة الحدود فى البسط و المقام قد ينتج عنها حالة من حالات عدم التعيين ÷ كما هو موضح فى المثال صـ١١٤، وذلك يستلزم وجود آلية أخرى لإيجاد نهاية مثل هذه الدوال، وذلك باستخدام قواعد تحليل المقادير الجبرية التى سبق دراستها فى المرحلة الإعدادية.

وضح لطلابك نظرية (٣) الموضحة ص١١٥ والتى تعتمد على إيجاد صورة جديدة للدالة المعطاة باستخدام التحليل لدالة البسط ودالة المقام مع التأكيد على مراعاة أن تكون

س ∈ ع - {ا} لتحديد العوامل المتشابهة غير الصفرية.

وضح مع الطلاب إرشادات الحل الموضحة والخاصة بإيجاد خارج قسمة مقدار جبرى على مقدار جبرى آخر، وأكد على الطلاب أننا نلجأ إلى القسمة فى حال تعذر إجراء عملية التحليل.





PDF Compressor Pro

٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًا

طريقتا القسمة التركيبية و المطولة

يمكنك شرح القسمة المطولة للطالب من خلال مثال لحاصل ضرب كثيرة حدود مثل: (١) (س - ٢) (س^{٢} + س - ٢) ثم القيام بقسمة ناتج الضرب على عامل الدرجة الأولى؛ لتوضيح خارج القسمة (أو بأى طريقة أخرى تراها).

⌑ وضح لطلابك المثال الموضح ص١١٦ لتطبيق القسمة التركيبية، وأكد على ضرورة التعبير عن معاملات الحدود الجبرية مرتبة تنازليًا ووضح أن الصفر يرجع إلى عدم وجود الحد الذى رتبه الواحد فى المقدار الجبرى.

س^{٣} - ٢س^{٢} + ١ وللتأكد من قدرة الطلاب على إجراء عملية القسمة يمكن الاستعانة بالأمثلة الإضافية التالية:

أمثلة إضافية:

أوجد (١) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + س - ٦}$ (٢) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س^{٢} - ٩}$

(٣) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٢س}{س}$ (٤) $\text{نهـا}_{س \to -١} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٣} + س + ٢}$

(٥) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٧س - ١٥}{س^{٢} - ٣س}$

التقييم المستمر:

ناقش مع طلابك ما جاء في بند حاول أن تحل (٢) وتوصل مع طلابك على الإجابات الصحيحة.

إجابات

أ ١٢ ب $\frac{٢}{٧}$ جـ ٣ د $\frac{-١٧}{٤}$

تمهيد لاستخدام المرافق $(\sqrt[٧]{س} - ٢)(\sqrt[٧]{س} + ٢) = س - ٤$،

$(٣ - \sqrt[٧]{س - ١})(٣ + \sqrt[٧]{س - ١}) = ٩ - (س - ١) = ١٠ - س$

نستخدم المرافق فى حل مسائل النهايات، وذلك لتسهيل اختصار العامل غير الصفرى و إيجاد نهاية الدالة.

مسائل إضافية:

(١) $\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣ - \sqrt[٧]{س + ٢}}{س - ٧}$ (٢) $\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{س٢ + ٢س}{١ - \sqrt[٧]{س + ٣}}$

حلول المسائل الإضافية

(١) $\frac{١}{٦}$ (٢) ٤-

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل ٤:

أ $\frac{١}{٤}$ ب ٤

إرشادات للدراسة:

⌑ وضح للطلاب بأن النظرية الآتية:



الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم فى هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلى:

خطوة ١: نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازليًا وتساوى المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

المعاملات | ١ | ٠ | -٢ | ١ | قيمة س

خطوة ٢: اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثانى ثم اجمع.

خطوة ٣: كرر عمليتى الضرب والجمع.

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١، -١، -١ على الترتيب لذلك، فإن خارج القسمة هو س^{٢} - س - ١

أى أن: س^{٣} - ٣س^{٢} + ١ = (س - ١) (س^{٢} - س - ١)

لذلك فإن: $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٢} - س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)} = \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٢} - س - ١}{س + ٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد:

أ $\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}$ ب $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٢س - ٨}{س^{٢} - ١٢س + ٣٢}$

جـ $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$ د $\text{نهـا}_{س \to -٣} \frac{س^{٣} - ١٠س - ٣}{س^{٣} + ٣س + ٣}$

مثال استخدام المرافق Conjugate

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٧]{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ ب $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٧]{س + ٤} - ٣}$

الحل

أ لاحظ أن: د (س) = $\frac{\sqrt[٧]{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٧]{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt[٧]{س - ٣} + ١}{\sqrt[٧]{س - ٣} + ١} = \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt[٧]{س - ٣} + ١)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt[٧]{س - ٣} + ١)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt[٧]{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ١١٦



٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًا

ب $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٧]{س + ٤} - ٣} = \text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٧]{س + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt[٧]{س + ٤} + ٣}{\sqrt[٧]{س + ٤} + ٣}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt[٧]{س + ٤} + ٣)}{(س - ٥)} = \text{نهـا}_{س \to ٥} س(\sqrt[٧]{س + ٤} + ٣)$

$= \text{نهـا}_{س \to ٥} س(\sqrt[٧]{س + ٤} + ٣) = ٥(٣ + ٣) = ٣٠$

حاول أن تحل

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٧]{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ ب $\text{نهـا}_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt[٧]{س + ٥} - ٢}$

نظرية: إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ فإن $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$

نشاط

استعن بمعلمك للبحث فى الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).

مثال إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)

(٥) أوجد $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

الحل

$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣} = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨$

نتائج على النظرية:

١- $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن أ^{ن - ١}$ ٢- $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن - م}$

مثال

(٦) أوجد:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$ ب $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

جـ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$ د $\text{نهـا}_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س} - ٢}{\sqrt[٧]{س} - ٢}$

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول ١١٧

PDF Compressor Pro

$\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا}$ = ن $ا^{ن-1}$ هى حالة خاصة لبعض الدوال التى تكون على هذه الصورة حيث تم التخلص من العامل (س - ا) فى كل من البسط والمقام وإيجاد ناتج النهاية مباشرة بهذه الصورة المختصرة؛ ولكن هناك الكثير من الدوال ليست على هذه الصورة القياسية، لذلك ينبغى أن تدرب طلابك على الطرق الجبرية المختلفة لوضع الدالة التى ليست على الصورة القياسية السابقة؛ حتى يتثنى للطالب تطبيق النظرية و إيجاد نهاية الدالة مباشرة.

و إليك بعض الأمثلة التى يمكنك الاستعانة بها في توضيح ذلك.

أمثلة إثرائية يمكن أن تعطى للطالب:

① $\lim_{س \to ا} \frac{٢س^ن - ب}{س - ا}$ بأخذ ٢ عامل مشترك من البسط ثم تحويل الشكل الناتج إلى القانون.

② $\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ب س}{س - ا}$ بأخذ س عامل مشترك من البسط ثم تحويل الناتج إلى القانون.

نشاط جماعى:

لمساعدة الطلاب على الوصول إلى برهان لنظرية (٤) يمكن الاستعانة بالدوال التالية د(س) = $\frac{س^٣ + ا^٣}{س + ا}$ حيث

$س^٣ - ا^٣ = (س - ا)(س^٢ + اس + ا^٢)$ وهكذا

نتائج على النظرية:

بعد التحقق من قدرة الطلاب على تطبيق نظرية ٤ ساعدهم على استيعاب الصورة العامة لهذه النظرية والموضحة فى النتائج الموضحة ص١١٧

مسائل إضافية للطلاب الفائقين:

① $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٥٠} + س^{٣٠} - ٢}{س - ١}$

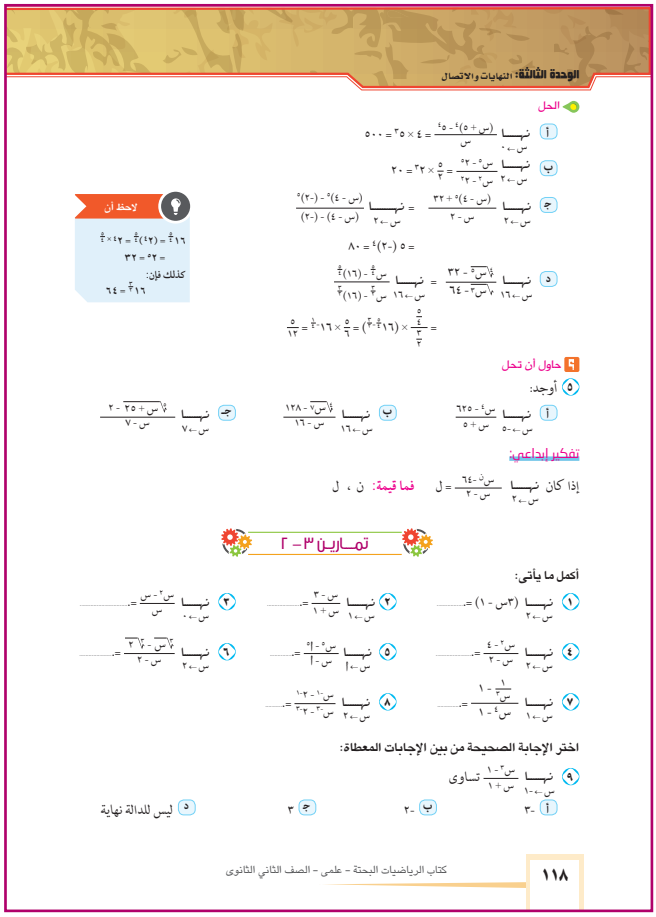
② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٩ + س^٨ - ٧٦٨}{س - ٢}$

③ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ + \sqrt[٣]{٨س + ٦} - ٦٤}{س - ٢}$ (**الإجابة:** ٨٠، ٣٣٢٨، ١٦٠)

- بين إلى طلابك بأنه عند إجراء عملية تقسيم البسط على المقام للحصول على دالتين وتوزيع النهاية على كل دالة حسب نظريات النهايات فإنه بالتعويض المباشر عن قيمة س =٢ فى كل دالة يكون ناتج التعويض $\frac{صفر}{صفر}$ لكل منهما.

$$= \lim_{س \to ٢} س^٥ \times \frac{(س + ٦)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٦) - ٨} + ٢ \lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٥^٢}{س - ٢}$$

$$= ٣٢ \times \frac{١}{٣} \times ٨^{-\frac{٢}{٣}} + ٢ \times ٥ \times ٤^٢ = \frac{٤٨٨}{٣}$$



تجنب الخطأ:

نبه طلابك قبل حل التمارين على النظرية السابقة مراعاة مايأتى:

- يجب التعويض المباشر فى الدالة عن قيمة س = ا لتعطى $\frac{صفر}{صفر}$ حالة عدم التعيين.
- أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{س^ن - ا^ن}{س - ا}$
- أن يكون المطلوب هو إيجاد النهاية عند س ← ا

الطلاب ضعاف المستوى

لاتحرم الطلاب ضعاف المستوى من المشاركة فى حل التمارين ويمكنك إعطاء بعض التمارين البسيطة، والتى تتناسب مع مستواهم المعرفى.

PDF Compressor Pro



(١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}س}{س}$ تساوى
أ ١ ب $\frac{\pi}{2}$ ج $\frac{2}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

(١١) $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١٦}$ تساوى:
أ صفر ب $\frac{1}{2}$ ج ١ د ليس للدالة نهاية

(١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}س}{س}$ تساوى
أ ٠ ب ١ ج $\frac{4}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

(١٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س^٣ - ٢٧}$ تساوى
أ ٠ ب $\frac{5}{2}$ ج ١٥ د ٩

(١٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ لها وجود فإن ا تساوى:
أ ١- ب ١ ج ٢ د ٤

(١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥}{(س-٢)^٢}$ تساوى:
أ $-\frac{5}{2}$ ب صفر ج ٥ د ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

(١٦) $\lim_{س \to ٣} (س^٢ - ٣س + ٢)$
(١٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$
(١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} (٢س - \text{جا}س)$
(١٩) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جتا}٢س}{س}$
(٢٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{س^٣ + ١}$
(٢١) $\lim_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{س^٢ - ٨١}$
(٢٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٣س}$
(٢٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٦س + ٥}{س^٢ - ٣س - ٤}$
(٢٤) $\lim_{س \to ٩} \frac{س + ٧\sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$
(٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{س + ٣}}{س}$
(٢٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢}{س^٤ - ١٦}$
(٢٧) $\lim_{س \to ١} (\frac{٢}{س} + \frac{س - ٣}{س - ١})$
(٢٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ١٢س + ٤}{س^٣ - ٤س}$
(٢٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س^٢ - س + ٤}{س^٣ - ٧س - ٤}$
(٣٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٢س^٢ + ٢س - ١٥}$
(٣١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س - ٢}$
(٣٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٨ - (١٦)^٢}{س - ٢}$
(٣٣) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١}$
(٣٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٩ - \frac{1}{٨١٢}}{س - ٢}$
(٣٥) $\lim_{س \to ٣٢} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt[٥]{٧}}{س^٤ - ٢٥\sqrt[٥]{٧}}$
(٣٦) $\lim_{س \to ٨١} \frac{\sqrt[٤]{س} - ٣}{س - ٨١}$

١١٩
كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

أمثلة:

أوجد النهايات الآتية:

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ...)(س + ...)}{(س - ٢)}$

(٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ...)(س + ...)}{(س - ٣)}$

(٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - ١^٧}{س - ١} = ...$

التقييم المستمر:

ناقش مع طلابك ما جاء بفقرة حاول أن تحل، وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات حاول أن تحل (٥)

أ ٥٠٠ - ب ١٤ ج $\frac{1}{80}$

تفكير إبداعى ص ١١٨

يتطلب هذا النوع من التفكير مدى إمكانية الطالب المتفوق من إيجاد قيم مجهولة فى النهاية عندما تكون نهاية الدالة معلومة، و يتطلب هذا التفكير بأن يضع دالة البسط= ٠، دالة المقام = ٠ طالما أن الدالة = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عند التعويض المباشر عندما س = ٢. وترتب خطوات الحل على النحو التالى:

∵ س = ٢ تجعل المقام = صفرًا
∵ النهاية موجودة (ل)
∴ س = ٢ تجعل البسط = صفرًا
∴ ٢^ن - ٦٤ = ٠
∴ ٢^ن = ٦٤ # ن = ٦
∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٢}{س - ٢} = ٦(٢)^٥ = ١٩٢$
∴ ل = ١٩٢

إجابات تمارين الدرس الثانى

(١) ٥	(٢) ١-	(٣) ١-
(٤) ٤	(٥) ٤√٥	(٦) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
(٧) $\frac{3-}{4}$	(٨) $\frac{4}{3}$	(٩) ٣
(١٠) $\frac{2}{\pi}$	(١١) ليس للدالة نهاية	(١٢) $\frac{4}{\pi}$
(١٣) ١٥	(١٤) ١	(١٥) ليس للدالة نهاية
(١٦) ٢	(١٧) ١-	(١٨) π
(١٩) $\frac{1}{\pi}$	(٢٠) $\frac{1}{3}$	(٢١) $\frac{1-}{18}$
(٢٢) $\frac{4-}{5}$	(٢٣) $\frac{4-}{5}$	(٢٤) $\frac{7}{6}$
(٢٥) $\frac{1-}{4}$	(٢٦) $\frac{1-}{32}$	(٢٧) ٣
(٢٨) $\frac{3}{2}$	(٢٩) $\frac{5}{3}$	(٣٠) $\frac{6}{17}$
(٣١) ٨٠	(٣٢) $\frac{1-}{64}$	(٣٣) $\frac{1}{7}$
(٣٤) $\frac{9-}{1024}$	(٣٥) $\frac{\sqrt[5]{135}}{3}$	(٣٦) $\frac{1}{108}$

PDF Compressor Pro

(٣٧) $\frac{٢٨}{٥}$ (٣٨) $-\frac{٤}{١٥}$ (٣٩) $\frac{١}{٨٠}$

(٤٠) ٦ (٤١) $س^{١٦}\frac{-٢}{٣}$ (٤٢) $-\frac{٤}{١٥}$

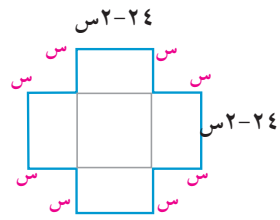
(٤٣) ١٠٨ (٤٤) $-\frac{١}{٣}$ (٤٥) $\frac{١}{٤}$

(٤٦) $\frac{٣}{٢}$ (٤٧) -٣ (٤٨) $-\frac{٤}{٥}$

(٤٩) ١ (٥٠) $-\frac{١}{٥}$ (٥١) $\frac{١}{٣}$

إجابة النشاط (٥٢)

أولاً:



ثانيًا: حجم العلبة = الطول × العرض × الارتفاع

$= (٢٤ - ٢س)(٢٤ - ٢س) \times س$

$= س (٢٤ - ٢س)^{٢}$

ثالثًا:

س	٣	٣,٥	٣,٩	....	٤
ح	٩٧٢	١٠١١,٥	١٠٢٣,٥١٦	....	١٠٢٤

س	....	٤,١	٤,٥	٥
ح	....	١٠٢٣,٥٥٤	١٠١٢,٥	٩٨٠

رابعًا: برسم الدالة باستخدام برنامج *Geogebra*

نجد أن القيمة العظمى للحجم = ١٠٢٤

تفكير إبداعي:

- يهدف التأكيد على مفهوم انه طالما يوجد نهاية للدالة فإن:
- دالة البسط= صفر ، دالة المقام = صفر وبمعلومية قيمة النهاية المعطاة يمكن إيجاد قيمة الدالة د(س)

تمرين إثرائى للطلاب الفائقين:

إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٢} + أ س + ب}{س - ١} = ٥$

أوجد قيمة كل من أ ، ب

الإجابة: أ = ٣ ، ب = -٤



الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

(٣٧) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$ (٣٨) $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ (٣٩) $\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{س + ٣٥} - ٢}{س - ٧}$

(٤٠) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$ (٤١) $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(س + ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$ (٤٢) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{٢٤٣ + س^{٥}}$

(٤٣) $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$ (٤٤) $\text{نهـا}_{س \to ١٠} \frac{\sqrt[٧]{س^{٣} + ٨} - ٣}{س + ١٠}$ (٤٥) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٧]{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

(٤٦) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٧]{س + ١} - ٢}{\sqrt[٧]{س + ٦} - ٣}$ (٤٧) $\text{نهـا}_{س \to ١٠} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$ (٤٨) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

(٤٩) $\text{نهـا}_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$ (٥٠) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٢} + س^{٣} - ٨س - ١٢}$ (٥١) $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٢س + ١٦} - ٣}{س - ٤}$

نشاط

(٥٢) **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

أولًا: ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة. **ثانيًا:** أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة ع = س(٢٤ - ٢س)^{٢}

ثالثًا: أوجد حجم العلبة عندما س = ٤ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما س ← ٤ مستخدمًا الجدول التالى:

س	٣	٣,٥	٣,٩	←	٤	→	٤,١	٤,٥	٥
ع	.....	.....	.....	←	.....	→	.....	.....	.....

رابعًا: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند س = ٤

تفكير إبداعي:

(٥٣) إذا كان $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ فأوجد: $\text{نهـا}_{س \to ٢}$ د(س)

(٥٤) إذا كان $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$ فأوجد:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٠}$ د(س) ب $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$

(٥٥) **الربط بالتجارة:** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د(س) = ٠,٢ س^{٢} + ٤٠ س + ١٥٠. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

(٥٣) ∵ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ ∴ $\text{نهـا}_{س \to ٢}$ (س - ٢) = صفر

∴ $\text{نهـا}_{س \to ٢}$ د(س) - ٥ = صفر

$\text{نهـا}_{س \to ٢}$ د(س) = ٥

(٥٤) أ ∵ $\text{نهـا}_{س \to ٠}$ س^{٢} = ٠ ∴ $\text{نهـا}_{س \to ٠}$ د(س) = ٠

ب $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س} \times \frac{س}{س}$ = صفر × ٥ = صفر

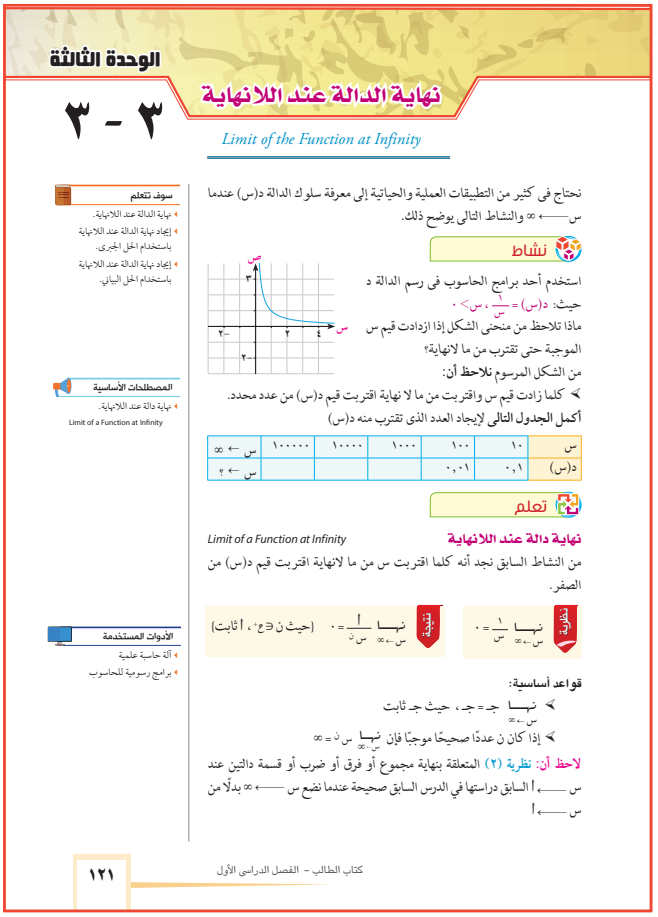
(٥٥) $\text{نهـا}_{س \to ١٠٠}$ د(س) = $\text{نهـا}_{س \to ١٠٠}$ (٠,٢ س^{٢} + ٤٠ س + ١٥٠)

= ٦١٥٠ جنيهًا

PDF Compressor Pro

٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية

Limit of the function at Infinity



خلفية

سبق للطالب أن درس نهاية الدالة عند نقطة وتعلم معنى نهاية الدالة وسوف يدرس الآن نهاية الدالة عند اللانهاية.

مخرجات الدرس

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف نهاية الدالة عند اللانهاية جبريًّا وبيانيًّا
- يوجد نهاية الدالة عند اللانهاية.

مفردات أساسية

- نهاية الدالة عند اللانهاية.

الوسائل التعليمية المستخدمة

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية – السبورة التعليمية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهني – التعلم التعاوني – المحاضرة – الطريقة الاستنباطية – الطريقة الاستقرائية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي من صفحة ١٢١ إلى صفحة ١٢٦ – الشبكة الدولية للمعلومات.

إجراءات الدرس

نشاط:

- يتم تقسيم الطلاب إلى مجموعات صغيرة، كما هو متبع في إجراء أي نشاط وتقوم كل مجموعة باستخدام البرامج الرسومية بالحاسب مثل برنامج geogebra أو أي برنامج آخر لرسم الشكل البياني للدالة وتدوين ملاحظات الطلبة عند منحنى الدالة ودراسة قيم الدالة عندما تقترب س من اللانهاية.
- يعرض المعلم على طلابه النظريات الخاصة بإيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية والاستعانة بالشكل البياني للدالة كلما أمكن ذلك.

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	ينفذ خطوات النشاط بدقة، ويحصل على نتائج دقيقة.
جيد جدًّا ٨ درجات	ينفذ خطوات النشاط بدقة، ويحتاج لمساعدة بسيطة من المعلم للحصول على نتائج دقيقة.
جيد ٧ درجات	ينفذ خطوات النشاط، ولكنه يحصل على بعض النتائج الخطأ.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب بمساعدة المعلم تنفيذ خطوات النشاط ويحصل على بعض النتائج.
ضعيف أقل من ٥	لايستطيع تنفيذ خطوات النشاط، ويحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

تعلم «نهاية دالة عند اللانهاية»:

- في ضوء نتائج النشاط السابق يمكن توضيح نظرية ١ـ الخاصة بإيجاد نهاية الدالة $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س}$ والنتيجة المترتبة عليها.
- راجع مع طلابك نظرية (٢) الواردة ص١١٤ واطلب منهم كتابة العلاقات الموضحة بها في حالة س $\to \infty$ بدلًا من س $\to$ ا

PDF Compressor Pro

كذلك يجب التركيز على عدم التسرع فى إجراء خطوة التعويض المباشر س = ∞ مثل $\lim_{س \to \infty}$ (س^{٢} - ٣س)

فالإجابة بالتعويض المباشر تعطى ∞ - ∞ وهذه كمية غير معينة لذلك نستخدم طريقة أخذ عامل مشترك بأكبر اس فيكون

$$\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣س) = \lim_{س \to \infty} س^{٢} (١ - \frac{٣}{س})$$

$$= \infty (١ - \text{صفر}) = \infty$$

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل (١)

أ ٢ ب ٥

- يبين المعلم للطلاب الفرق فى نتائج التمارين الثلاثة فى مثال صفحة ١٢٢ مع مطابقة النتائج على الشكل البيانى المصاحب لكل دالة و يبين لطلابه أن $\lim_{س \to \infty}$ د (س) تعطى إحدى ثلاث حالات (صفر، ∞ ، عدد حقيقى لايساوى صفرًا)، حسب درجة كل من البسط والمقام.

ناقش:

- ناقش مع طلابك الأمثلة الموضحة ص١٢٣ وأكد على عدد من النقاط منها:
- إعادة صياغة الدالة بقسمة البسط والمقام على أعلى قوة للمتغير س فى المقام.
- يتم تطبيق النظرية على كثيرات الحدود فى كل من البسط والمقام.
- وضح لهم قيمة النهاية فى حالة درجة كل من البسط والمقام والموضحة بكتاب الطالب.

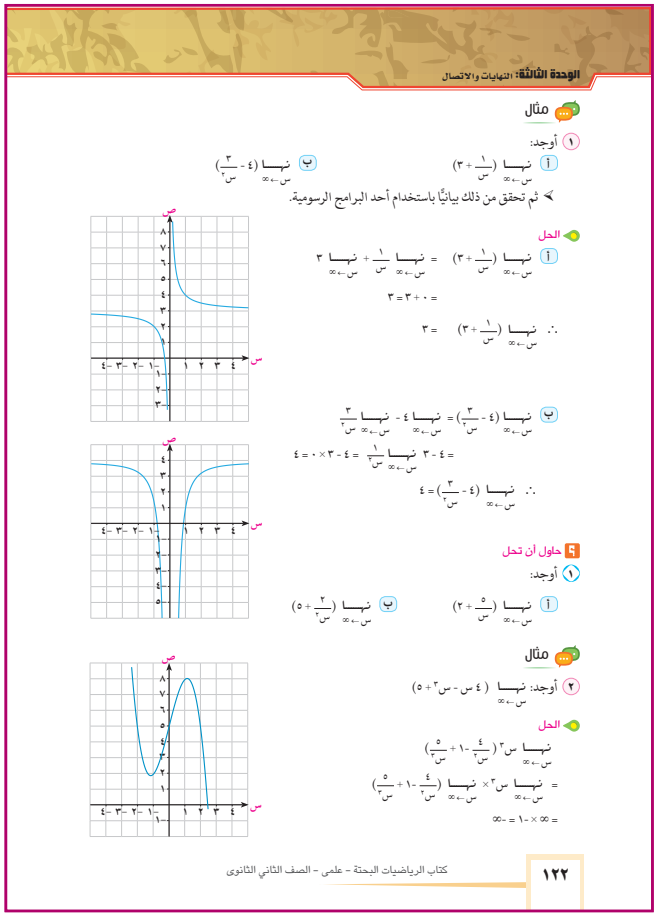
التقييم المستمر: حاول أن تحل

١ أ ∞ ب -∞

٢ أ ∞ ب صفر جـ -٢

ذكر طلابك:

- راجع مع طلابك بعض المهارات الرياضية السابقة لدى الطلاب فى التعامل مع دالة المقياس، وكذلك المرافق لتبسيط الدوال، و إمكانية إيجاد النهاية للدوال الموضحة بالمثال ص١٢٤



مثال

١ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣)$ ب $\lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}})$

ثم تحقق من ذلك بيانيًا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣) = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to \infty} ٣$

$= ٣ = ٣ + ٠$

$\therefore \lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٣) = ٣$

ب $\lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}}) = \lim_{س \to \infty} ٤ - \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$

$= ٤ - ٣ \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

$\therefore \lim_{س \to \infty} (٤ - \frac{٣}{س^{٢}}) = ٤$

حاول أن تحل

١ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} (٢ + \frac{٥}{س})$ ب $\lim_{س \to \infty} (٥ + \frac{٢}{س^{٢}})$

مثال

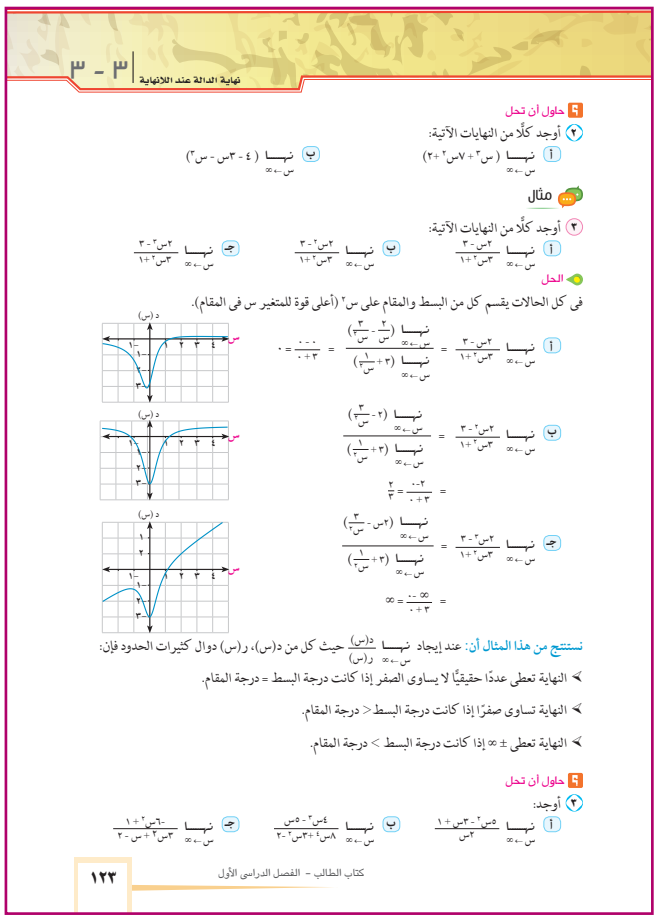
٢ أوجد: $\lim_{س \to \infty} (٤ س - س^{٣} + ٥)$

الحل

$\lim_{س \to \infty} س^{٣} (\frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}})$

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \times \lim_{س \to \infty} (\frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}})$

$= \infty \times -١ = -\infty$



حاول أن تحل

٢ أوجد كلًا من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢)$ ب $\lim_{س \to \infty} (٤ - ٣س - س^{٢})$

مثال

٢ أوجد كلًا من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$ ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٣} + ١}$ جـ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

الحل

فى كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على س^{٢} (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٣}{س^{٢}})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٢}})} = \frac{٣ - ٠}{٣ + ٠} = ١$

ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٣} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (٠ - \frac{٣}{س})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٣}})} = \frac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$

جـ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٣}{س^{٢}})}{\lim_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^{٢}})} = \frac{٣ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٣}{٣} = ١$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
- النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

حاول أن تحل

٢ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ١}{س^{٣}}$ ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} - ٥س}{٨س^{٤} + ٣س^{٢} - ٢}$ جـ $\lim_{س \to \infty} \frac{-٦س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + س - ٢}$

PDF Compressor Pro

مثال

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^2 - ٢}{|س| + ١}$ ب $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^2 + ٤})$

الحل

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^2 - ٢}{|س| + ١}$

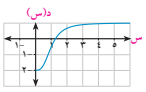
∵ $س \to -\infty$

∴ $س < ٠$ أي أن $|س| = -س$

$\lim_{س \to -\infty} \frac{س^2 - ٢}{-س + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$= \frac{\lim_{س \to -\infty} (١ - \frac{٢}{س^2})}{\lim_{س \to -\infty} (\frac{١}{س} + ١)} = \frac{١ - ٠}{٠ + ١} = ١$



$د(س) = \frac{س^2 - ٢}{|س| + ١}$

ب $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^2 + ٤})$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س - \sqrt{س^2 + ٤})}{١} \times \frac{(س + \sqrt{س^2 + ٤})}{(س + \sqrt{س^2 + ٤})}$

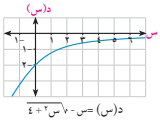
$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 - س^2 - ٤}{س + \sqrt{س^2 + ٤}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٤}{س + \sqrt{س^2 + ٤}}$

∵ $س \to \infty$

∴ $س > ٠$ أي أن: $\sqrt{س^2} = |س| = س$ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^2} = س$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{-٤}{س + \sqrt{س^2 + ٤}} = \frac{\lim_{س \to \infty} \frac{-٤}{س}}{\lim_{س \to \infty} (١ + \sqrt{١ + \frac{٤}{س^2}})} = \frac{٠}{١ + ١} = ٠$



$د(س) = س - \sqrt{س^2 + ٤}$

حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{س - ٣}{\sqrt{٧س^2 + ٢٥}}$ ب $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٧س^2 + ٥س} - ٣\sqrt{٧}\, س)$

تمـارين الدرس ٣ - ٣

أكمل ما يأتي:

١ $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٣}{س}) =$ .....

٢ $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س^2} - ٢) =$ .....

٣ $\lim_{س \to \infty} (-٧) =$ .....

٤ $\lim_{س \to \infty} (س^2 - ٣) =$ .....

٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^3 + ١}{س} =$ .....

٦ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2 - ٥}{١ + س^2} =$ .....

٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^3 + ٣}{س^2 - ٥} =$ .....

٨ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{٧س^2 - ١}} =$ .....

٩ $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^2}) =$ .....

١٠ $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٧س^2 + ١} - س) =$ .....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١١ $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س}{٣س^2 + ٣}$ تساوي

أ صفر ب ٢ جـ ٣ د ∞

١٢ $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٤}{س^2} + ١}$

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ∞

١٣ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + ٣}{س^2 - ٢س}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ د ∞

١٤ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + ١}{٢س - ١٠}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١ د ∞

١٥ $\lim_{س \to \infty} \sqrt[٣]{\frac{١ + س}{٤س - ١٠}}$

أ -١٠ ب $\frac{١}{٤}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د ١

أوجد:

١٦ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^2}$ ١٧ $\lim_{س \to \infty} (س^3 + ٥س^2 + ١)$ ١٨ $\lim_{س \to \infty} \frac{-٧س^2 + ٢}{٣س + ٢س^2}$

١٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2}{س + ٣}$ ٢٠ $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^3}{س^2 + ٣}$ ٢١ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^2}{٤ + ٢س + س^2}$

٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية

تمارين إثرائية تعطى للطلاب:

١ إذا كانت د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة فأكمل باختيار الإجابة الصحيحة.

أ $\lim_{س \to -\infty} \frac{د(س)}{ر(س)} =$ .....

($\pm \infty$ ، ٠، عدد حقيقي لايساوي صفرًا، ليس لها وجود).

ب $\lim_{س \to -\infty} \frac{ر(س)}{س^2 د(س)} =$ .....

($\pm \infty$ ، ٠، عدد حقيقي لايساوي صفرًا، ليس لها وجود)

الجواب: أ صفر ب عدد حقيقي لايساوي الصفر

٢ أكمل

أ إذا كان $\lim_{س \to \infty} \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} = ٣$

فإن درجة $د_١(س)$... درجة $د_٢(س)$

ب كان $\lim_{س \to \infty} \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} = ٠$

فإن درجة $د_١(س)$... درجة $د_٢(س)$

جـ إذا كان $\lim_{س \to \infty} \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} = -\infty$

فإن درجة $د_١(س)$... درجة $د_٢(س)$

الجواب: أ تساوي ب أصغر جـ أكبر

التقييم المستمر:

ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل (٤) ص١٢٤ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٣\sqrt{٥}}{٦}$

إجابات تمارين الدرس الثالث

١ ١	٢ -٢	٣ -٧
٤ ∞	٥ ٢	٦ ∞
٧ ∞	٨ ٣	٩ ٣
١٠ ٠	١١ ٣	١٢ ١
١٣ ٠	١٤ ∞	١٥ $\frac{١}{٢}$
١٦ ٠	١٧ ∞	١٨ $\frac{-٧}{٣}$
١٩ ∞	٢٠ ٤	٢١ $\frac{-٣}{٢}$

PDF Compressor Pro

(٢٢) صفر (٢٣) ∞ (٢٤) ٠
(٢٥) ٢ (٢٦) ٩ (٢٧) -٥
(٢٨) $\frac{٧}{٢}$ (٢٩) -١ (٣٠) $\frac{١}{٨}$
(٣١) $\frac{-١}{٢}$ (٣٢) $\frac{٣}{١٠}$ (٣٣) $\frac{-٢}{٣}$
(٣٤) $\frac{١}{٨}$ (٣٥) -٣ (٣٦) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٧) أ = ٤، ب = ٤ (٣٨) ٥ (٣٩) ٢

(٣٦) $\text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{(س+٢)^{٣}(٣-٢س^{٢})}{٣س(س^{٢}+٧)^{٢}}$

بقسمة كل من البسط والمقام على س٥

$$\text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{\frac{(س+٢)^{٣}}{س^{٣}} \times \frac{(٣-٢س^{٢})}{س^{٢}}}{\frac{(٣س)}{س} \times \frac{(س^{٢}-٧)^{٢}}{(س^{٢})^{٢}}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{(١+\frac{٢}{س})^{٣}(٢-\frac{٣}{س^{٢}})}{٣(١-\frac{٧}{س^{٢}})^{٢}} = \frac{١\times-٢}{٣\times١} = \frac{-٢}{٣}$$

(٣٧) بالضرب فى المرافق

$$\therefore \text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{(أ س^{٢}+٣ب س+٥)-٤س^{٢}}{\sqrt{أ س^{٢}+٣ب س+٥}+٢س} = ٣$$

∵ النهاية موجودة.
∴ درجة البسط = درجة المقام.
∴ معامل س^{٢} فى البسط = صفر
∴ أ - ٤ = ٠ أى أ = ٤

$$\therefore \text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{٣ب س+٥}{\sqrt{٤س^{٢}+٣ب س+٥}+٢} = ٣$$

بقسمة البسط والمقام على س

$$\therefore \text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{٣ب+\frac{٥}{س}}{\sqrt{أ+\frac{٣ب}{س}+\frac{٥}{س^{٢}}}+٢} = ٣$$

$\frac{٣ب}{٢+٢} = ٣$ ← ب = ٤



تفكير إبداعى (الربط بالديناميكا):

يهدف هذا النوع من التفكير الإبداعى ربط قانون نيوتن للجذب العام مع نهاية الدالة عند اللا نهائية حيث تكون المسافة (ف) بين الجسم ومركز الأرض كبيرة جدًّا؛ لذلك توضع على الصورة ف ⟵ ∞ ويكمل الحل كمايلى:

عندما تكون المسافة كبيرة جدًّا

$$\therefore ق = \text{نهـا}_{ف\to\infty} \frac{ك_{١}ك_{٢}}{ف^{٢}} \times ث = \text{صفر}$$

تمرين إثرائى للطلاب الفائقين:

يتحرك جسيم على خط مستقيم طبقًا للعلاقة:

$$ف(ن) = \frac{ن^{٤}+٦ن^{٣}+٩ن^{٢}+٤ن+٧}{ن}\ ،\ ن \neq ٠$$

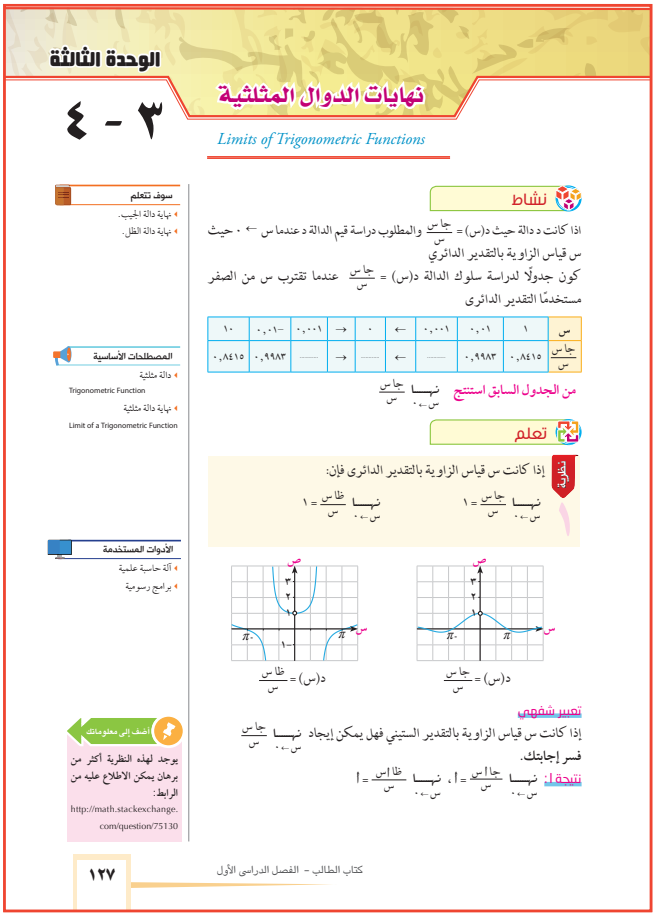
أوجد المسافة التى يقطعها الجسم عندما ن ⟵ ∞

الإجابة: المسافة غير معرفة ، النهاية غير موجودة

PDF Compressor Pro

٤ - ٣ نهاية الدوال المثلثية

Limits of Trigonometric Functions



خلفية

سبق للطالب التعرف على خواص الدوال المثلثية من خلال التمثيل البيانى للدوال د (س) = حا س، ر (س) = حتا س وسوف يتعرف الآن على نهايات بعض الدوال المثلثية مثل:

$\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{س}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{ظا\ س}{س}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{١ - حتا\ س}{س}$

حيث س بالتقدير الدائرى.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه يتوقع من الطالب أن:

- يوجد نهاية بعض الدوال المثلثية.

مفردات أساسية

- نهاية الدوال المثلثية.

الوسائل التعليمية المستخدمة

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية – السبورة التعليمية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى – المحاضرة – الطريقة الاستنباطية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٧ إلى صفحة ١٣١ – الشبكة الدولية للمعلومات.

نشاط جماعى:

اطلب إلى طلابك تنفيذ النشاط الموضح وذكرهم بإيجاد النهاية اليمنى واليسرى حتى يمكن تقدير قيمة النهاية.

تعلم:

فى ضوء مناقشات النشاط السابق، وضح للطلاب نظرية (١) الخاصة بنهاية دالة الجيب ودالة الظل وكذلك النتيجة (١)

إجابة تعبير شفهى

$\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{س}$ حيث س بالتقدير الستينى

$\lim_{س \to 0} \frac{حا \frac{\pi س}{١٨٠}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

ذكر طلابك بأن:

العلاقة بين التقدير الستينى والتقدير الدائرى هى $\frac{س^\circ}{١٨٠} = \frac{هـ^c}{\pi}$

أى أن: $هـ^c = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠}$

أضف إلى معلوماتك:

الفت انتباه الطلاب إلى الموقع الأكثر فى الموضح الخاص بطرق برهان النظرية، واطلب منهم التحقق من هذا الموقع واستعراض بعض هذه الطرق فى الحصة التالية.

PDF Compressor Pro

يناقش المعلم امثلة متعددة على النظرية مثل:

(١) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}٣س \text{ طا}٤س}{س^٢}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}٣س}{س} \times \frac{\text{طا}٤س}{س} = ٣ \times ٤ = ١٢$

(٢) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}^٢٣س \text{ حتا}٣س}{س \text{ طا}٥س}$

$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}^٢٣س}{س \text{ طا}٥س} \times \text{حتا}٣س$

$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\frac{\text{حا}^٢٣س}{س^٢}}{\frac{س \text{ طا}٥س}{س^٢}} \times \text{حتا}٣س$

$\frac{٤}{٥} = ١ \times \frac{٤}{٥}$

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل ص١٢٨

(١) أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{٤}{٥}$

ج صفر

(٢) أ $\text{نهـا}_{س\to 0} ٦س^٢ \text{ قتا}٢س \text{ ظتا}س$

$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{٦س^٢}{\text{حا}٢س \text{ ظا}س} = ٦ \text{ نهـا}_{س\to 0} \left(\frac{س}{\text{حا}٢س} \times \frac{س}{\text{طا}س}\right)$

$= ٦ \text{ نهـا}_{س\to 0} \frac{س}{\text{حا}٢س} \times \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س}{\text{طا}س} = ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١ = ٣$

ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{حتا}س}{\text{حا}٢س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{حتا}س}{س} \times \frac{س}{\text{حا}٢س}$

$= \text{صفر} \times \frac{١}{٢} = \text{صفر}$

(٣) أ $\frac{-٣}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{٣}{٥}$

تمارين اثرائية:

(١) $\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{ط}(س-١)}{س - ١}$ **الجواب: ١**

(٢) $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{حا}س}{\pi - ٢س}$ **الجواب: صفر**

(٣) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}(\pi \text{ حتا}س)}{س}$ **الجواب: صفر**

مثال

(١) أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{س} = ٣$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}٢س}{٧س} = \frac{١}{٧} \text{ نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}٢س}{س} = \frac{٢}{٧}$

ج $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٥س \text{ جتا}٢س}{س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٥س}{س} \times \text{نهـا}_{س\to 0} \text{جتا}٢س = ٥ \times ١ = ٥$

حاول أن تحل

(١) أوجد:

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{٣س}$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{ظا}٤س}{٥س}$ ج $\text{نهـا}_{س\to \pi} \frac{\text{جا}س}{\pi - س}$

نتيجة ٢

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} = \text{صفر}$

استعن بمدرسك فى برهان نتيجة (٢)



مثال

(٢) أوجد:

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{\text{ظا}س}$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢}$

الحل

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{\text{ظا}س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} \times \frac{س}{\text{ظا}س}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} \times \frac{س}{\text{ظا}س} = ١ \times ٠ = ٠$

ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}^٢س}{س^٢(١ + \text{جتا}س)} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}^٢س}{س^٢(١ + \text{جتا}س)}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}^٢س}{س^٢} \times \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١}{١ + \text{جتا}س} = (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تذكر أن

$\text{جا}^٢س + \text{جتا}^٢س = ١$

حاول أن تحل

(٢) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} ٦س^٢ \text{ قتا}٢س \text{ ظتا}س$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{\text{جا}٢س}$

مثال

(٣) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س^٢ - س + \text{جا}س}{س}$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س^٢ + س \text{ جتا}س}{\text{جا}س \text{ جتا}س}$

ج $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}س)}{١ - \text{جتا}س}$ د $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{٥س^٢}$

الحل

أ $\frac{١}{٢} \text{ نهـا}_{س\to 0} \left(\frac{س^٢}{س} - \frac{س}{س} + \frac{\text{جا}س}{س}\right)$

$= \frac{١}{٢} \text{ نهـا}_{س\to 0} (س - ١ + \frac{\text{جا}س}{س})$

$= \frac{١}{٢} (٠ - ١ + ١) = ٠$

ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س^٢ + س \text{ جتا}س}{\text{جا}س \text{ جتا}س}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س + \text{جتا}س}{\text{جا}س \text{ جتا}س}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{١ + \text{جتا}س}{\text{جا}س \text{ جتا}س}$

$= \frac{١ + \text{جتا}٠}{١ \times \text{جتا}٠} = \frac{١ + ١}{١} = ٢$

ج $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}س)}{١ - \text{جتا}س}$

اعتبر ١ - جتا س = ص

عندما س ← ٠ نجد أن ص ← ٠

$\text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{جا}ص}{ص} = ١$

$\therefore \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}س)}{١ - \text{جتا}س} = ١$

د $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{٥س^٢}$

$= \frac{١}{٥} (\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{س})^٢$

$= \frac{١}{٥} \times (٣)^٢$

$= \frac{٩}{٥}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}٣س}{٥س^٢ - ٤س}$ ب $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}(س-١)}{س^٢ + س - ٢}$

ج $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جا}^٢س}{٣س}$ د $\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{س \text{ جا}٢س + \text{حا}^٢٢س}{\text{ط}^٢٣س + س^٢}$

PDF Compressor Pro

إجابات تمارين الدرس الرابع

١ ١	٢ ٠	٣ ٠	٤ ٧
٥ $\frac{٣}{٤}$	٦ $\frac{١}{٣}$	٧ $\frac{\pi}{٢}$	٨ ١
٩ ٣	١٠ ٠	١١ $\frac{٢}{٣}$	١٢ $\frac{٣}{٢}$
١٣ $\frac{٤}{٣}$	١٤ $\frac{٤}{٣}$	١٥ ٣	١٦ $\frac{٤}{٥}$
١٧ ١	١٨ $\frac{٤}{٣}$	١٩ $\frac{٢}{٣}$	٢٠ $\frac{\pi}{١٨٠}$
٢١ $\frac{١}{٥}$	٢٢ ١	٢٣ ٢	٢٤ ٠
٢٥ ٠	٢٦ ١	٢٧ ٠	٢٨ غير موجودة
٢٩ ١	٣٠ ٠	٣١ ٠	٣٢ ١-
٣٣ $\frac{٢}{٣}$	٣٤ ٣-	٣٥ ١	٣٦ ٢٨
٣٧ ٦٥	٣٨ $\frac{١}{١٦}$	٣٩ $\frac{٥}{٢}$	٤٠ ١-
٤١ ١٧	٤٢ $\frac{١}{٥}$	٤٣ $\frac{٩-}{٨}$	٤٤ ٠
٤٥ ٢٨	٤٦ $\frac{١}{٤}$	٤٧ $\frac{٩}{٥٠}$-	٤٨ $\frac{١}{٥}$
٤٩ ١			

إجابات بعض التمارين (إجابات كاملة)

٢٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا س}}{س}$ حيث س بالتقدير الستيني

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا} \frac{\pi س}{١٨٠}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$$

٤٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س} + \text{حا س}}{١ - \text{حتا س} - \text{حا س}}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١ - \text{حتا س}}{س} + \frac{\text{حا س}}{س}}{\frac{١ - \text{حتا س}}{س} - \frac{\text{حا س}}{س}} = \frac{١ + ٠}{١ - ٠} = ١-$$

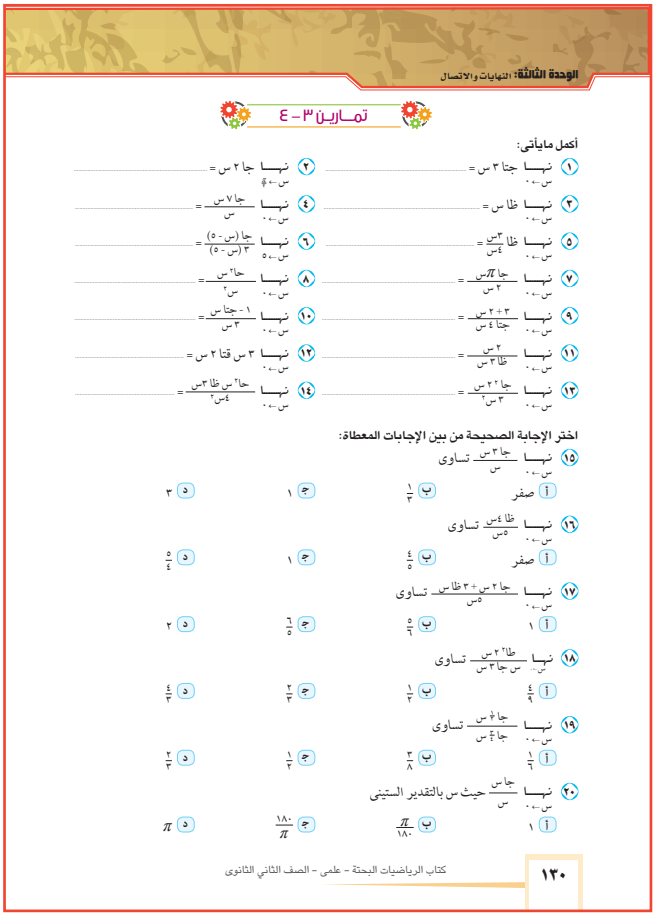
٤٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - \text{حا}٣س - \text{حا}٤س}{س}$

$$= \lim_{س \to ٠} \left(\frac{١ - \text{حا}٣س}{س} + \frac{١ - \text{حتا}٤س}{س} \right) = ٠$$

٤٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س}}{س^٢ (١ + \text{حتا س})}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{حتا}^٢ س}{س^٢ (١ + \text{حتا س})} \left(\frac{\text{حا}^٢ س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{حتا س}} \right)$$

$$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$



الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

تمارين ٣ - ٤

أكمل ما يأتي:

١ $\lim_{س \to ٠}$ جتا ٣ س = ...
٢ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}}$ جا ٢ س = ...
٣ $\lim_{س \to ٠}$ ظا س = ...
٤ $\lim_{س \to ٠}$ جا ٧ س / س = ...
٥ $\lim_{س \to ٠}$ ظا ٣س / ٤س = ...
٦ $\lim_{س \to ٥}$ جا (س - ٥) / ٣ (س - ٥) = ...
٧ $\lim_{س \to ٠}$ جا πس / ٢ س = ...
٨ $\lim_{س \to ٠}$ حا ٢س / س = ...
٩ $\lim_{س \to ٠}$ ٣ + ٢ س / جتا ٤ س = ...
١٠ $\lim_{س \to ٠}$ ١ - جتا س / ٣ س = ...
١١ $\lim_{س \to ٠}$ ٢ س / ظا ٣ س = ...
١٢ $\lim_{س \to ٠}$ ٣ س قتا ٢ س = ...
١٣ $\lim_{س \to ٠}$ جا ٢ س / ٣ س = ...
١٤ $\lim_{س \to ٠}$ حا ٢س ظا ٣س / ٤س = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٥ $\lim_{س \to ٠}$ جا ٣ س / س تساوي
أ صفر ب $\frac{١}{٣}$ ج ١ د ٣

١٦ $\lim_{س \to ٠}$ ظا ٤س / ٥س تساوي
أ صفر ب $\frac{٤}{٥}$ ج ١ د $\frac{٥}{٤}$

١٧ $\lim_{س \to ٠}$ جا ٢ س + ٣ ظا س / ٥س تساوي
أ ١ ب $\frac{٥}{٦}$ ج $\frac{٦}{٥}$ د ٢

١٨ $\lim_{س \to ٠}$ ظا ٢ س / س جا ٣ س تساوي
أ $\frac{٤}{٩}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٢}{٣}$ د $\frac{٤}{٣}$

١٩ $\lim_{س \to ٠}$ جا $\frac{١}{٢}$ س / جا $\frac{١}{٣}$ س تساوي
أ $\frac{١}{٩}$ ب $\frac{٣}{٨}$ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٢}{٣}$

٢٠ $\lim_{س \to ٠}$ جا س / س حيث س بالتقدير الستيني
أ ١ ب $\frac{\pi}{١٨٠}$ ج $\frac{١٨٠}{\pi}$ د π



أوجد:

٢١ $\lim_{س \to ٠}$ جا س / ٥س
٢٢ $\lim_{س \to ٠}$ ظا ٢س / س
٢٣ $\lim_{س \to ٠}$ جا س (١ - جتا س) / س٢
٢٤ $\lim_{س \to ٠}$ جا٢ س / س
٢٥ $\lim_{س \to ٠}$ (١ - جتا٢ س) / س٢
٢٦ $\lim_{س \to ٠}$ س - س جتا س / جا٣س
٢٧ $\lim_{س \to ٠}$ س جتا (٢س+١) / س٢ + ٢س
٢٨ $\lim_{س \to ٠}$ (١ + جتا س) × (١ - جتا س) / س٢
٢٩ $\lim_{س \to ٠}$ جا٥س٢ + جا٢س٥س / س٢
٣٠ $\lim_{س \to ٠}$ ٣س٢ + س جا٥س / س٢ - ظا٣س٢
٣١ $\lim_{س \to ٠}$ ظا٢س + ٥ جا٣س / ٢ جا٣س - ظا٥س
٣٢ $\lim_{س \to ٠}$ ١ - جتا٣س / حتا٢س - ١
٣٣ $\lim_{س \to ٠}$ ظا٣س + ٥ جا٣س / س٢
٣٤ $\lim_{س \to ٠}$ جا س / ظا س
٣٥ $\lim_{س \to ٠}$ ٣(١ - جتا س) / س
٣٦ $\lim_{س \to ٠}$ جتا س ظا س / س
٣٧ $\lim_{س \to ٠}$ ظا س / س٢
٣٨ $\lim_{س \to ٠}$ جتا س - ١ / جا س
٣٩ $\lim_{س \to ٠}$ ١ - ظا س / جا س - جتا س
٤٠ $\lim_{س \to ٠}$ س٢ - ٣ جا س / س
٤١ $\lim_{س \to ٠}$ ظا٢س + ٥ جا٣س / ٢ جا٣س - ظا٥س
٤٢ $\lim_{س \to ٠}$ ١ - جتا٣س / حتا٢س - ١
٤٣ $\lim_{س \to ٠}$ ظا٣س٢ + جا٥س٢ / س٢
٤٤ $\lim_{س \to ٠}$ ٢ - جتا٣س - جتا٤س / س
٤٥ $\lim_{س \to ٠}$ ١ - جتا٣س / جتا٥٢ س - ١
٤٦ $\lim_{س \to ٠}$ جا (جا س) / ٥ جا س
٤٧ $\lim_{س \to ٠}$ س / جتا (π/٢ - س)
٤٨ $\lim_{س \to ٠}$ س (قتا ٢ س - ظتا ٣ س)

PDF Compressor Pro

٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

Existence of Limit of a Function at Point

خلفية

سبق للطالب التعرف على كيفية إيجاد نهاية للدالة عند نقطة، وسوف يتعرف الآن على النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة شروط وجود نهاية للدالة عند نقطة.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس، وتنفيذ أنشطته يتوقع من الطالب أن:

- يوجد النهاية اليسرى للدالة والنهاية اليمنى للدالة عند نقطة.

مفردات أساسية

- النهاية اليمنى للدالة.
- النهاية اليسرى للدالة.

الوسائل التعليمية المستخدمة

- آلة حاسبة علمية – حاسب آلى – برامج رسومية – السبورة التعليمية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى – المحاضرة – الطريقة الاستنباطية – الطريقة الاستقرائية.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

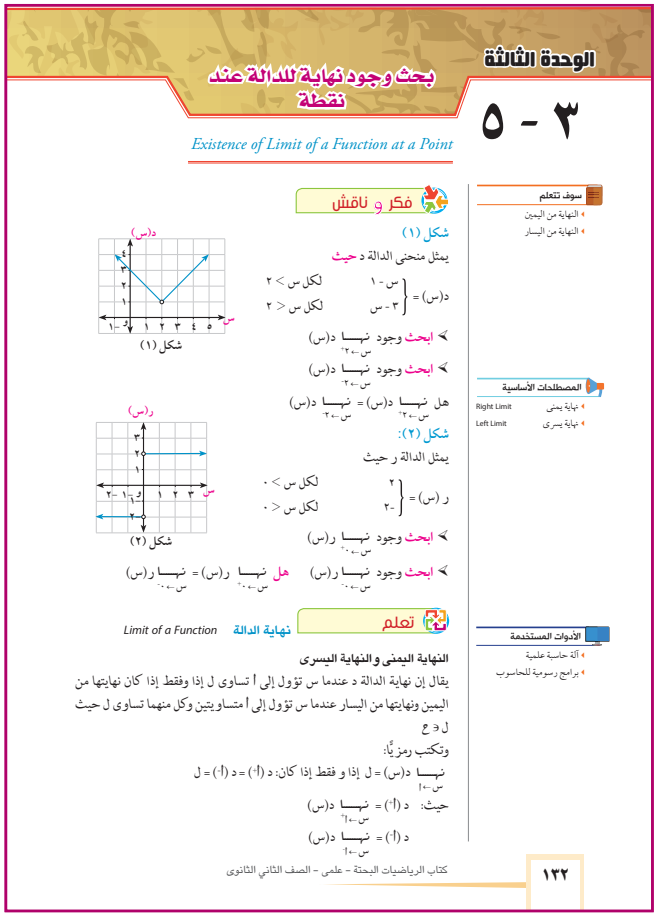
مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٣٢ إلى صفحة ١٣٦ – الشبكة الدولية للمعلومات.

إجراءات الدرس

التمهيد

- استعن بالأشكال البيانية ص (١٣٢) والتى تتناول الأشكال البيانية لبعض الدوال فى بند فكر وناقش؛ لكى توضح لطلابك مفهوم النهاية اليمنى والنهاية اليسرى لها والتى سبق له أن تعرف عليها فى الدرس الأول من النهايات.
- فى حالة وجود صعوبة لدى بعض الطلاب فى إيجاد النهاية اليمنى أو اليسرى ذكرهم بكيفية إيجاد هاتين النهايتين جبريًّا كما هو موضح فى الأمثلة التى سبق عرضها فى الدرس الأول من الوحدة، واطلب منهم استخدام الجداول


الوحدة الثالثة

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

٣ - ٥

Existence of Limit of a Function at a Point

سوف تتعلم
- النهاية من اليمين
- النهاية من اليسار

المصطلحات الأساسية
- نهاية يمنى Right Limit
- نهاية يسرى Left Limit

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د حيث

د(س) = { س - ١ لكل س < ٢ ; ٣ - س لكل س > ٢ }

ابحث وجود نهـا د(س) س→٢

ابحث وجود نهـا د(س) س→٢

هل نهـا د(س) = نهـا د(س) س→٢ س→٢

شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

ر(س) = { ٢ لكل س < ٠ ; -٢ لكل س > ٠ }

ابحث وجود نهـا ر(س) س→٠

ابحث وجود نهـا ر(س) هل نهـا ر(س) = نهـا ر(س) س→٠ س→٠ س→٠

تعلم نهاية الدالة *Limit of a Function*

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل ∈ ح

وتكتب رمزيًّا:

نهـا د(س) = ل إذا و فقط إذا كان: د(أ-) = د(أ+) = ل
س→أ

حيث: د(أ+) = نهـا د(س)
س→أ+

د(أ-) = نهـا د(س)
س→أ-

كتاب الرياضيات البحتة – علمى – الصف الثانى الثانوى ١٣٢

لتقدير قيمة النهاية اليمنى واليسرى.

فى بند تعلم

- أكد إلى طلابك على وجود كل من النهاية اليسرى والنهاية اليمنى للدالة عند نقطة وتساويهما كشرط لوجود نهاية للدالة عند هذه النقطة.
- أكد على المقصود بمفردة «إذا وفقط إذا كشرط لوجود نهاية دالة واطلب منهم قراءة التعريف الموضح ص١٣٢ للتأكد من قدرتهم على القراءة الصحيحة وبالتالى التدريب على خطوات إيجاد نهاية دالة.

مثال إضافى:

(١) ابحث وجود نهاية للدالة الآتية:

د (س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$ عند س ← ١، س ← -١

(٢) ابحث وجود نهاية للدالة الآتية:

د (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ عندما س ← -٢، عندما س ← ٢

(٣) ابحث وجود نهاية للدالة

د (س) = { ٢س + ٣ ; ١ > س ≥ -١ ; $٤س^٢ + ١$; س < ١ ; عندما س = ١ }

PDF Compressor Pro

٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

التقييم المستمر:

تابع مع طلابك ما جاء فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

(١) ص (١٣٣)

شكل (١) أ ٢ ب ١

جـ ليس لها وجود

شكل(٢) أ ٢ ب ٢

جـ ٢ يوجد للدالة نهاية

شكل(٣) أ ١ ب ١

جـ ١ يوجد للدالة نهاية

راجع مع طلابك المقصود بإعادة تعريف الدالة فى المثال الموضح ص١٣٣، ص١٣٤ واطلب منهم شرح كيفية إعادة تعريف دالة المقياس.

(٢) ص (١٣٤)

إعادة تعريف الدالة هو:

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س & س > ٣ \\ ٢ & س = ٣ \\ س - ٣ & س < ٣ \end{cases}$$

∵ د(٣⁻) = د(٣⁺) = ٠ ∴ $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) = ٠

(٣) ص (١٣٤)

د(π⁻) = - ١

د(π⁺) = - ١ أى أن د(π⁻) = د(π⁺)

$\lim_{س \to π}$ د(س) = - ١

رقم (٤) ص (١٣٤)

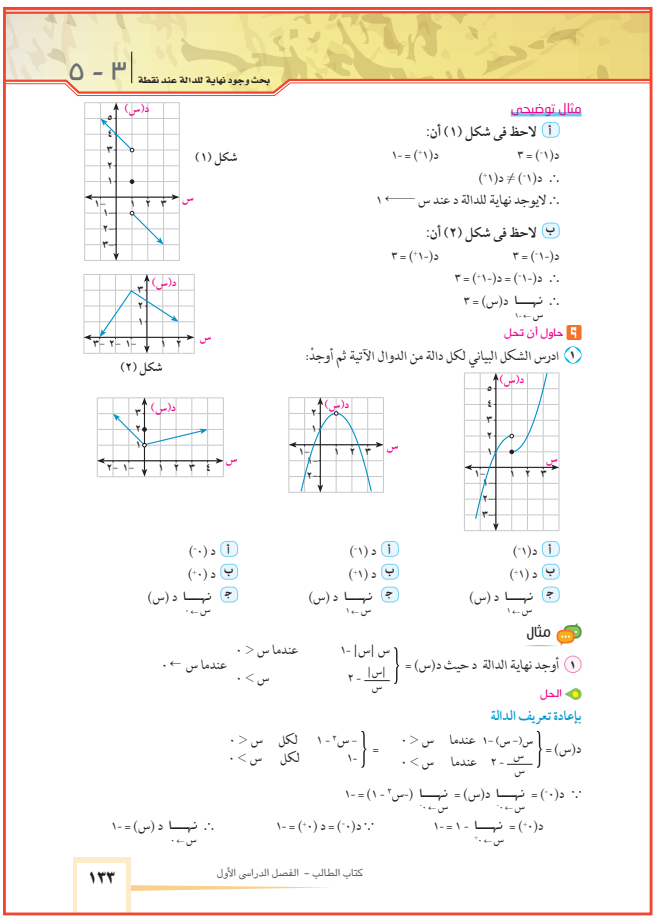
مجال تعريف الدالة هو]-∞ ، ٣]

د(٣⁻) = ٠

د(٣⁺) ليس لها وجود

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ليس لها وجود







PDF Compressor Pro

إجابات تمارين الدرس الخامس

(١) أ ١ ب ١

(٢) أ ∞ ب ∞

(٣) أ -٢ ب -٣ جـ $\frac{-٣}{٢}$ د ليس لها وجود هـ ليس لها وجود

(٤) أ ٢ ب ٢

(٥) أ ٣ ب ٠

(٦) أ ٠ ب -∞

(٧) ٤ (٨) -١٠ (٩) ليس لها وجود

(١٠) -١ (١١) ٢ (١٢) ليس لها وجود

(١٣) م = ١، ك = -٣ (١٤) ٢

(١٥) ١

(١٦) أ $\frac{٣\pi}{٣}$ ب ليس لها وجود جـ ٣

(١٧) أ ٠ ب ٠

(١٨) ليس لها وجود

إجابات بعض التمارين (إجابات كاملة)

(١١) بإعادة تعريف الدالة

$$د(س) = \begin{cases} |س - ١| & س > ١ \\ ٦س - ٣م & س < ١ \end{cases}$$

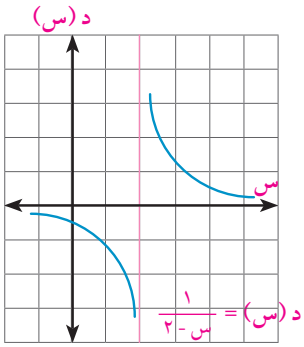
د(-١) = ٠ ، د(+١) = ٦ - ٣م

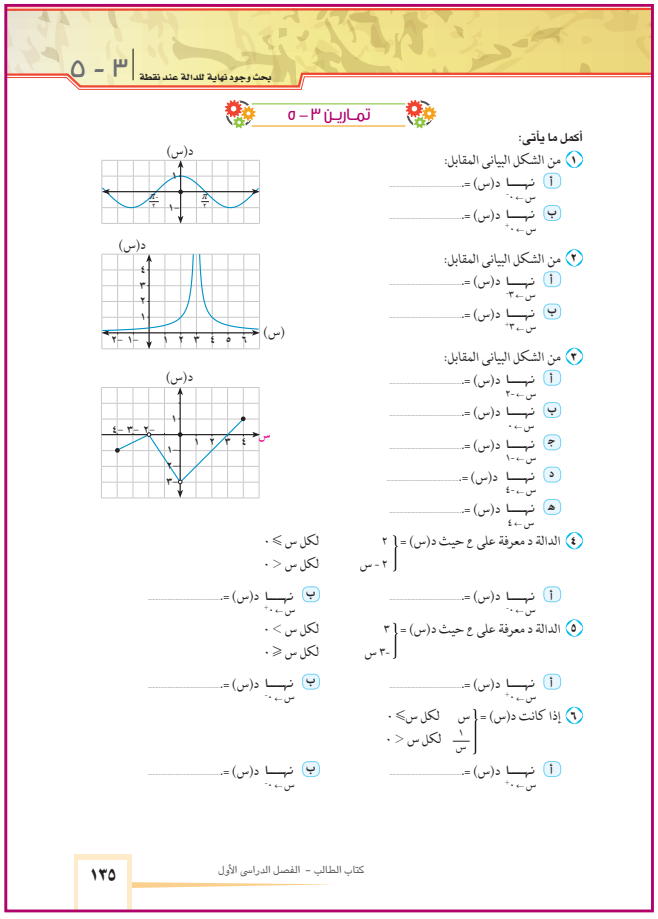
∴ ٦ - ٣م = ٠ ⟸ م = ٢

(١٨) د(+٢) = $\lim_{س \to -٢} \frac{١}{س - ٢}$ = -∞

د(+٢) = $\lim_{س \to +٢} \frac{١}{س - ٢}$ = ∞

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ليس لها وجود





٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

تمارين ٣ - ٥

أكمل ما يأتي:

(١) من الشكل البياني المقابل:
أ $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = ...
ب $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = ...

(٢) من الشكل البياني المقابل:
أ $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) = ...
ب $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) = ...

(٣) من الشكل البياني المقابل:
أ $\lim_{س \to -٢}$ د(س) = ...
ب $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ...
جـ $\lim_{س \to -١}$ د(س) = ...
د $\lim_{س \to ٤^-}$ د(س) = ...
هـ $\lim_{س \to ٤^+}$ د(س) = ...

(٤) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٢ لكل س ≤ ٠ ، ٢ - س لكل س > ٠ }
أ $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = ... ب $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = ...

(٥) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٣ لكل س < ٠ ، ٣ - س لكل س ≥ ٠ }
أ $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = ... ب $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = ...

(٦) إذا كانت د(س) = { س لكل س ≤ ٠ ، $\frac{١}{س}$ لكل س > ٠ }
أ $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = ... ب $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = ...

ابحث نهاية الدوال الآتية « إن وجدت »:

(٧) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) حيث د(س) = { ٢ س لكل س > ٢ ، $س^٢$ لكل س ≤ ٢ }

(٨) $\lim_{س \to ٣}$ د(س) حيث د(س) = { $س^٢ + ١$ لكل س > -٣ ، ٣ س + ١ لكل س ≤ -٣ }

(٩) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) حيث د(س) = { $س^٢ + ٢$ لكل س > ٠ ، ٣س + ١ لكل س ≤ ٠ }

(١٠) $\lim_{س \to -١}$ د(س) حيث د(س) = { ٢ س + ١ لكل س > -١ ، -١ لكل س < -١ }

(١١) أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية حيث عندما س ⟵ ١ د(س) = { $\frac{(س-١)^٢}{|س-١|}$ لكل س > ١ ، ٦س - ٣ م لكل س < ١ }

(١٢) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث عندما س ⟵ π د(س) = { $\frac{٢ جا س}{\pi - س}$ لكل س > π ، ١ + جتا س لكل س < π }

(١٣) أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ ، د(س) = { $س^٢ + ٣م$ لكل س > ٢ ، ٥س + ك لكل س < ٢ }

(١٤) أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ⟵ -١ حيث، د(س) = { $س^٢ + ك$ لكل س > -١ ، س + ٤ لكل س < -١ }

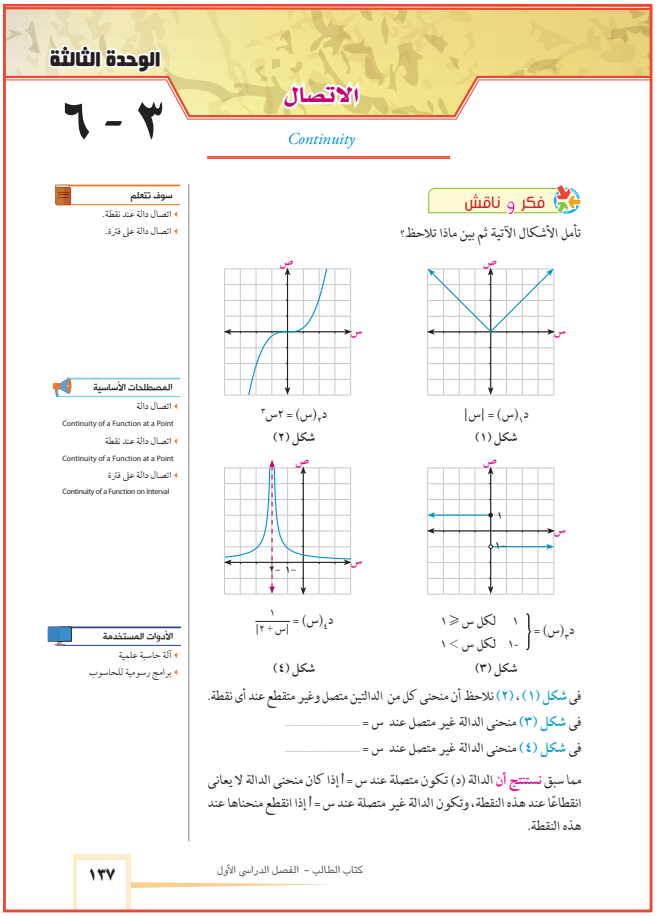
(١٥) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث، د(س) = { $\frac{٥س + ظا ٢س}{٦س + جا س}$ لكل س < ٠ ، جتا س لكل س > ٠ }

(١٦) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = { $\frac{٢ س}{ظا س}$ لكل $-\frac{\pi}{٣} < س < ٠$ ، ٣ جتا س لكل $٠ < س < \frac{\pi}{٣}$ }
أ عندما س ⟵ $-\frac{\pi}{٣}$ ب س ⟵ $\frac{\pi}{٣}$ جـ س ⟵ ٠

(١٧) ابحث وجود نهاية للدالة د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ عندما س ⟵ ٢

PDF Compressor Pro

٣ - ٦ الاتصال
Continuity


الوحدة الثالثة

٣ - ٦ الاتصال
Continuity

فكر و ناقش
تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟

د١(س) = |س|
شكل (١)

د٢(س) = س٢
شكل (٢)

د٣(س) = { ١ لكل س ≥ ١ ، -١ لكل س < ١ }
شكل (٣)

د٤(س) = ١ / |س + ٢|
شكل (٤)

في شكل (١) ، (٢) نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أى نقطة.
في شكل (٣) منحنى الدالة غير متصل عند س = ...
في شكل (٤) منحنى الدالة غير متصل عند س = ...
مما سبق نستنتج أن الدالة (د) تكون متصلة عند س = أ إذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

سوف تتعلم
- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية
- اتصال دالة
Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة عند نقطة
Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
Continuity of a Function on Interval

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

١٣٧ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

خلفية

سبق للطالب أن درس مفهوم نهاية دالة عند نقطة، وسوف يتعلم الآن: متى تكون الدالة متصلة عند نقطة، وشروط اتصالها ومتى تكون غير متصلة وهل يمكن إعادة تعريف الدالة غير المتصلة عند نقطة حتى تكون متصلة.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم اتصال الدالة عند نقطة.
- يتعرف اتصال دالة على فترة.
- يتعرف بعض الدوال المتصلة.
- إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة؛ حتى تصبح متصلة.

مفردات أساسية

- اتصال الدالة – اتصال الدالة عند نقطة – اتصال الدالة على فترة.

الوسائل التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية - السبورة التعليمية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى – المحاضرة – الطريقة الاستنباطية – الطريقة الاستقرائية – التفكير الناقد – التفكير الإبداعى – حل المشكلات – التفكير المنطقى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٣٧ إلى صفحة ١٤٥ – الشبكة الدولية للمعلومات.

إجراءات الدرس

يمكنك التمهيد لهذا الدرس من خلال هذا النشاط الجماعى.

النشاط الجماعى:

- اطلب إلى الطلاب رسم منحنيات الدوال الآتية: د١(س) = ٣ ، د٢(س) = س٢ + ١ ، د٣(س) = س٣ / س ، د٤ (س) = ١ / س بحيث يكون مجال كل دالة هو [-٢، ٢]
- اطلب إليهم تحديد نوع الدوال، وذكر خواص كل دالة من الدوال السابقة من الرسم.
- اطلب إليهم تحريك القلم على منحنى كل دالة من نقطة إلى أخرى بدون رفع سن القلم مع تدوين ملاحظاتهم.
- قارن بين النتائج التى توصل إليها الطلاب.
- بين إليهم أنه عند رسم الدوال د١ ، د٢ لم نرفع سن القلم عن الورقة ويكون منحنى الدالة خال من الوثبات والثقوب ، ومثل هذه الدوال تكون متصلة على مجالها ، بينما الدوال د٣، د٤ يوجد لكل منها وثبة (ثقب) عند س = ٠ وتكون غير متصلة عندما س = ٠
- وضح إلى طلابك شروط اتصال دالة عند نقطة، وأكد إليهم على ترابط الشروط التى يجب تحققها معًا حتى تصبح الدالة متصلة.

PDF Compressor Pro

اتصال دالة عند نقطة

- استعرض مع طلابك الأشكال الثلاثة الموضحة ص١٣٨ وناقش معهم النهاية اليمنى واليسرى وقيمة الدالة للتمهيد لمفهوم الاتصال.
- أكد على طلابك مفهوم الاتصال وضرورة تحقق الشروط الثلاثة الموضحين فى التعريف.
- وعليه يجب التمييز بين حالتين من حالات عدم الاتصال.
- **الحالة الأولى** أو النوع الأول من عدم الاتصال أن تكون الدالة غير متصلة عند س = أ رغم وجود نهاية للدالة عندما س ← أ
- **الحالة الثانية** أو النوع الثانى من عدم الاتصال أن تكون الدالة غير متصلة عند س = أ مع عدم وجود نهاية للدالة عندما س ← أ
- فى النوع الأول يمكن إعادة تعريف الدالة حتى تصبح متصلة بينما لايمكن إعادة تعريف الدالة فى النوع الثانى حتى تصبح متصلة.

التقييم المستمر:

تابع مع طلابك ماورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

حلول حاول أن تحل ص١٣٩

(١) د(-١) = $\lim_{س \to -١}$ (٤ س - ١) = ٣

د(+١) = $\lim_{س \to ١}$ (س^{٢} + ٢) = ٣ ، د(١) = ٣

∵ د(-١) = د(+١) = د(١)

∴ الدالة متصلة عند س = ١

(٢) أ د(١) = ٣

$\lim_{س \to ١}$ $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ٣

د(١) = $\lim_{س \to ١}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ١

∵ د(٢) = غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢

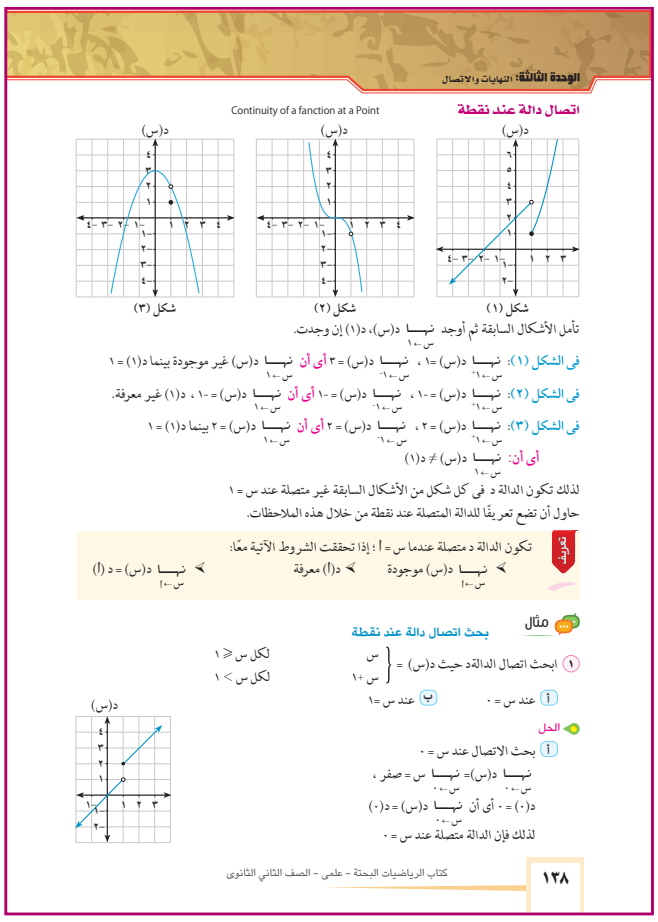
ب د(٢) = ٣

د(+٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ٣ - (س - ٢) = ٣

د(-٢) = $\lim_{س \to ١}$ ٣ - (-س + ٢) = ٣

∴ د(٢) = $\lim_{س \to ر}$ د(ر)

∴ د متصلة عند س = ٢



اتصال دالة عند نقطة Continuity of a fanction at a Point

د(س) د(س) د(س)

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد $\lim_{س \to ١}$ د(س)، د(١) إن وجدت.

فى الشكل (١): $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ١ ، $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣ أى أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة بينما د(١) = ١

فى الشكل (٢): $\lim_{س \to ١}$ د(س) = -١ ، $\lim_{س \to ١}$ د(س) = -١ أى أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = -١ ، د(١) غير معرفة.

فى الشكل (٣): $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ أى أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ بينما د(١) = ١

أى أن: $\lim_{س \to ١}$ د(س) ≠ د(١)

لذلك تكون الدالة د فى كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند س = ١

حاول أن تضع تعريفًا للدالة المتصلة عند نقطة من خلال هذه الملاحظات.

تعريف تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

- $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة
- د(أ) معرفة
- $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

مثال بحث اتصال دالة عند نقطة

(١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = { س لكل س ≥ ١ ؛ س + ١ لكل س < ١

أ عند س = ٠ ب عند س = ١

د(س)

الحل

أ بحث الاتصال عند س = ٠

$\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠}$ س = صفر ،

د(٠) = ٠ أى أن $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = د(٠)

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٠

ب بحث اتصال الدالة عند س = ١

نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة س = ١ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنى ونهاية يسرى للدالة عند س = ١

د(١$^{+}$) = $\lim_{س \to ١}$ (س + ١) = ٢ ، د(١$^{-}$) = $\lim_{س \to ١}$ س = ١

أى أن: د(١$^{+}$) ≠ د(١$^{-}$) وهذا الشرط يكفى لعدم اتصال الدالة د عند س = ١ والشكل البيانى يوضح عدم اتصال الدالة عند س = ١

حاول أن تحل

(١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = { ٤س - ١ عندما س ≥ ١ ؛ س^{٢} + ٢ عندما س < ١ } عند س = ١

مثال التحقق من اتصال دالة عند نقطة

(٢) ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{س^{٣} + ٨}{س - ٢}$ عند س = ٢ ، س = ٣ ب د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

الحل

أ أولًا: بحث اتصال الدالة عند س = ٢

∵ مجال الدالة = ع - {٢} ∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

ثانيًا: بحث اتصال الدالة عند س = ٣

∵ د(٣) = $\frac{٣^{٣} + ٣}{٣ - ٣}$ = ٦ ، ∵ $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^{٣} + ٣}{س - ٣}$ = $\frac{٣^{٣} + ٣}{٣ - ٣}$ = ٦

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = د(٣) ∴ د(س) متصلة عند س = ٣

ب بإعادة تعريف الدالة د(س) = { ٨ - س عندما س ≤ ٣ ؛ س + ٢ عندما س > ٣ }

∵ د(٣) = ٥ ، ∵ د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ (٨ - س) = ٥ ، د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ (س + ٢) = ٥

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٥ أى أن د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٣

حاول أن تحل

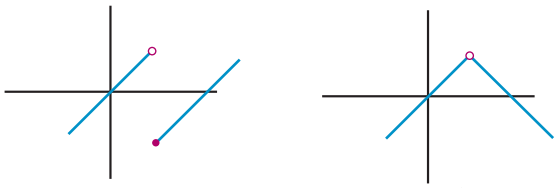
(٢) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{س^{٣} - ٤}{س - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢ ب د(س) = ٣ - |س - ٢| عند س = ٢

PDF Compressor Pro

إعادة تعريف الدالة لتكون متصلة عند نقطة

وضح للطلاب بعض الرسوم البيانية للدوال القابلة لإعادة التعريف؛ لتكون متصلة عند نقطة ٠ مثل:



شكل (١) شكل (٢)

شكل (١) يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ١

شكل (٢) لايمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ١

مثال إثرائي:

إذا كانت د دالة غير متصلة عند س = ١

، $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٥ وكانت:

$$ق(س) = \begin{cases} د(س) + ٢ & س \neq ١ \\ ك & س = ١ \end{cases}$$

ق(س) = د(س) + ٢ حيث س ≠ ١ ك س = ١

فإن: ق(س) تكون متصلة عند س = ١ إذا كانت ك =...

الإجابة: ٧

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(٣) د(٣) غير معرفة

$$\lim_{س \to ٣} د(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س-٢)}{س-٣} = ١$$

يمكن تعريف الدالة لتكون متصلة

عند س = ٣ وهي: $$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ١ & س = ٣ \end{cases}$$

(٤) ∵ د(٣) غير معرفة ∴ د(س) غير متصلة عند س = ٣

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س+٥)(س-٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} (س + ٥) = ٨$$

الدالة $$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ هـ + ١ & س = ٣ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٣

∴ هـ + ١ = ٨ هـ = ٧

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة (إن كان ذلك ممكنا)

مثال

(٢) أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س = ١

(أ) $د(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$ (ب) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س & س < ١ \\ ٥س - ١ & س > ١ \end{cases}$

الحل

(أ) لكي تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = د(١)

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+٣)}{س-١} = \lim_{س \to ١} (س + ٣)$

أي أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٤

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٤ & س = ١ \end{cases}$

(ب) لكي تكون الدالة متصلة عند س = ١، لابد أن تكون د(١) = $\lim_{س \to ١}$ د(س)

∴ د(١) = $\lim_{س \to ١}$ (س^٢ + ٢س) = ١ + ٢ × ١ = ٣، د(١) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٥س - ١) = ٥ - ١ = ٤

∵ د(١) ≠ د(١) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عندما س ← ١

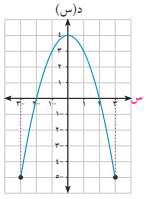
ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

حاول أن تحل

(٣) أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث $د(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$

(٤) بين أن $د(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة هـ التي تجعل $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ هـ + ١ & س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣



اتصال دالة على فترة

continuity of a Function on an Interval

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - س^٢

في الفترة [-٣، ٣] ولكي تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣]

فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أي أن: $\lim_{س \to ا}$ د(س) = د(ا) لكل ا ∈]-٣، ٣[

$\lim_{س \to -٣^+}$ د(س) = د(-٣)، $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) = د(٣)

ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتي:

تعريف

إذا كانت د معرفة على الفترة [ا، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [ا، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة]ا، ب[

٢- $\lim_{س \to ا^+}$ د(س) = د(ا) ، $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ح أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ح عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب وجيب التمام: متصلة على ح

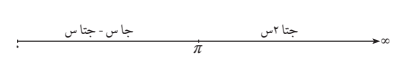
٤- دالة الظل: د(س)= ظاس متصلة على ح - { س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ صـ }

مثال

(٤) ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [٠ ، ∞[

حيث $د(س) = \begin{cases} جا س - جتا س & لكل \ ٠ \leq س \leq \pi \\ جتا ٢س & لكل \ س > \pi \end{cases}$

الحل



د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكي نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

١) د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة]٠، π[

كذلك د(س) = جتا ٢س متصلة على الفترة]π، ∞[

٢) د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = ٠ - ١ = -١ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ (جا س - جتا س) = -١

أي أن: د(٠) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠

PDF Compressor Pro

اتصال دالة على فترة

ينبغي على المعلم الوقوف على مفهوم اتصال دالة عند نقطة قبل دراسة اتصال دالة على فترة فالدالة تكون متصلة عند نقطة إذا كانت متصلة من كلا طرفيها، وعلى ذلك فإن الدالة عند النقط الطرفية للمجال تكون متصلة من جهة اليمين أو اليسار ولانقول إنها متصلة فحسب، ويرجع ذلك لتعريف النهاية من اليسار أو من اليمين وعلى ذلك إذا كانت د دالة معرفة على الفترة [أ ، ب] فإن الدالة تكون متصلة عند أ من جهة اليمين ومتصلة عند ب من جهة اليسار.

اتصال دالة على فترة

- أكد لطلابك أن الدالة تكون متصلة على فترة إذا كانت متصلة على جميع نقاط هذه الفترة.
- ناقش مع طلابك بيان بالدوال المتصلة، وعمل عصف ذهنى لبعض الأمثلة التى تتناول الدوال الآتية:

١) دالة كثيرة الحدود ٢) الدالة الكسرية

٣) الدوال المثلثية

- أكد على المعلومات الموضحة فى «لاحظ أن» والتى توضح العمليات على الدوال المتصلة على ح.

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل (٥)

د(س) متصلة على الفترة [٠ ، ∞ [

إجابات حاول أن تحل (٦)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

أ) متصلة على ع ب) متصلة على ع - {٢، ٣}

جـ) متصل على ع - {س: س = ب + ط ، ب ∈ صـ }

د) متصلة على ع

إجابات حاول أن تحل (٧)

أ) رسم بيانى

ب) د(س) دالة كسرية مجموعة أصفار مقامها = {-١٢}

إجابات حاول أن تحل (٨)

$د(س) = \sqrt{٧ - س^{٢}}$

مجالها هو قيم س التى تحقق س - ٢ ≤ صفر

ان المجال = [٢ ، ∞ [

لكل أ [٢ ، ∞[فإن $د(أ) = \sqrt{٧ - أ^{٢}}$

$\lim_{س \to أ} \sqrt{٧ - س^{٢}} = \sqrt{٧ - أ^{٢}}$ الدالة متصلة عند س = أ

الدالة متصلة على مجالها [٢ ، ∞[

٣) نبحث اتصال الدالة عندما س = π

د(π) = جاπ - حتاπ = ١

$\lim_{س \to \pi^{-}}$ د(س) = $\lim_{س \to \pi^{-}}$ (جا س - جتا س) = ١ ، د(π^{+}) = $\lim_{س \to \pi^{+}}$ جتا ٢س = ١

أى أن: د(π^{-}) = د(π^{+}) ، د(π) = ١ د(π^{-}) = د(π^{+}) = د(π)

∴ متصلة عند س = π من (١) ، (٢) ، (٣) الدالة متصلة على [٠ ، ∞ [

حاول أن تحل

٥) ابحث اتصال الدالة د حيث

$د(س) = \begin{cases} ١ + جا س & ٠ \leq س > \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{\pi}{٢})^{٢} & س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

مثال

٥) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

أ) د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢ ب) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س + ٤}$

جـ) د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س - ١}$ د) د(س) = $\frac{ظا س}{س^{٢} + ١}$

الحل

أ) د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهى متصلة على ع

ب) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س + ٤}$ دالة كسرية مجال الدالة = ع - {-٤} ، أصفار المقام {-٤}

أى أن الدالة متصلة على ع - {-٤}

جـ) د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س^{٢} - ١}$

∵ جا س، جتا س متصلة على ع ، دالة المقام (س^{٢} - ١) متصلة على ع ، أصفار المقام = {-١ ، ١}

∴ الدالة د متصلة على ع - {-١، ١}

د) د(س) = $\frac{ظا س}{س^{٢} + ٤}$

دالة البسط: ظا س متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ صـ}

دالة المقام: س^{٢} + ١ > ٠ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ صـ}

حاول أن تحل

٦) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٧ ب) د(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

جـ) د(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{جا س}$ د) د(س) = (س + ١) جتا س

لاحظ أن

إذا كانت د١ ، د٢ متصلتين على ع فإن:

١) د١ ± د٢ متصل على ع

٢) د١ × د٢ متصل على ع

٣) $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ تكون متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

نشاط

٧) **الربط بالكيمياء**

إذا كان معدل التفاعل فى تجربة كيميائية يعطى بالدالة ص حيث ص (س) = $\frac{٠,٠٦ س}{س + ١٢}$ ، س تركيز المحلول.

ابحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:

أ) مثل الدالة بيانيًا بأحد البرامج الرسومية. ب) ابحث اتصال هذه الدالة.

مثال

٦) بين أن الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س^{٢} + س + ١}$ متصلة على ع

الحل

حيث أن س^{٢} + س + ١ موجب لجميع قيم س ∈ ع

(المميز = ب^{٢} - ٤ أ حـ = ١ - ٤ = -٣ < صفر)

أو س^{٢} + س + ١ = (س + $\frac{١}{٢}$)^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ مجموع مربعين

∴ س^{٢} + س + ١ موجب لجميع قيم س ∈ ع

∴ د (س) = ($\sqrt{س^{٢} + س + ١}$) معرفة لجميع قيم س ∈ ع

لكل أ ∈ المجال ع نجد أن د (أ) = $\sqrt{أ^{٢} + أ + ١}$

$\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\lim_{س \to أ}$ ($\sqrt{س^{٢} + س + ١}$) = $\sqrt{أ^{٢} + أ + ١}$

∴ د (أ) = $\lim_{س \to أ}$ د (س) لكل أ ∈ ع

∴ د (س) متصلة على ع

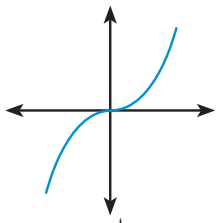
حاول أن تحل

٨) ابحث اتصال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ على مجالها.

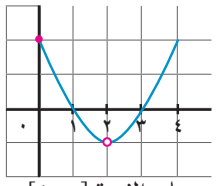
PDF Compressor Pro

تمارين إثرائية للطلاب ضعاف المستوى

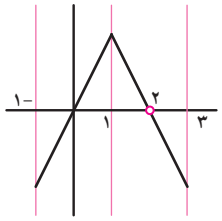
ادرس الشكل البياني لكل من الدوال الآتية، ثم ابحث اتصال كل منها على الفترة المحددة.



على ع



على الفترة [٠ ، ٤]



على الفترة [-١ ، ٣]

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

(١) د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{حا س}}$ (٢) د(س) = $(\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٢}}$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها

(١) د (س) = $\sqrt{\text{س} - ٥}$ (٢) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$

(٣) د (س) = $\sqrt{٩ - ٢\text{س}}$

ابحث اتصال الدوال الآتية على ع

(١) د (س) طا ٢ س (٢) د (س) = طا $\frac{\text{س}}{٣}$

إجابات تمارين الدرس السادس

(١) متصلة عند س =١ (٢) متصلة عند س =٢

(٣) متصلة على عند س =٣

(٤) غير متصلة عند س = -٢ متصلة عند س =١

(٥) متصلة عند س =٢ (٦) متصلة عند س =٠

(٧) متصلة على ع (٨) متصلة على ح

(٩) متصلة على ع - {٠، ٢} (١٠) متصلة على ح- {٥، ٣}

(١١) متصلة على ع - {٢، -٢} (١٢) متصلة على ح- {-٢}

(١٣) متصلة على ع (١٤) متصلة على ح

(١٥) متصلة على ع

(١٦) متصلة على ع {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

(١٧) متصلة على ع - {٣، -٣}

(١٨) متصلة على ع - {٣، -٣، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π } حيث ن ∈ ص

(١٩) متصلة على] - $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ [

تمارين ٣ - ٦

ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

(١) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ ، & \text{س} \geq ١ \\ ٣\text{س} ، & \text{س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ١ ، & \text{س} \geq ٢ \\ ٢\text{س} - ١ ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ ، & \text{س} \geq ٣ \\ \text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١ ، & \text{س} < ٣ \end{cases}$

(٤) د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٤ ، & \text{س} > -٢ \\ ١ ، & -٢ \geq \text{س} > -١ \\ ٢\text{س} + ٣ ، & \text{س} \leq -١ \end{cases}$ عند س = ٣ عند س = -٢، عند س = -١

(٥) د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}(\text{س} - ٢)}{\text{س}^٢ - ٤} ، & \text{س} > ٢ \\ -\frac{٣}{\text{س}^٢} ، & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

(٦) د(س) = $\begin{cases} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} ، & \text{س} < ٠ \\ ٢\ \text{جا س} ، & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

(٧) د(س) = $\text{س}^٢ - ٢\text{س}^٢ + ١$ (٨) د(س) = $\frac{-\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$ (٩) د(س) = $\frac{٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

(١٠) د(س) = $\frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}$ (١١) د(س) = $\frac{\text{س}}{|\text{س}| - ٢}$ (١٢) د(س) = $\frac{|\text{س} + ٢|}{(\text{س} + ٢)^٢}$

(١٣) د(س) = جا س - ٣ جتا (س + ١) (١٤) د(س) = $\text{س}^٢$ + جتا^٢ س (١٥) د(س) = $\text{س}^٢$ جا ٢ س

(١٦) د(س) = ظا^٢ س - ١ (١٧) د(س) = $\frac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$ (١٨) د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

(١٩) د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س ظا س} + \text{جا}^٢ ٣\text{س}}{٥\text{س}^٢} ، & -\frac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ ٢\ \text{جتا}\ ٢\ \text{س} ، & ٠ \leq \text{س} < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ على الفترة] - $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ [

(٢٠) د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١} ، & -٤ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} - ١ ، & ١ \leq \text{س} < ٤ \\ \text{س}^٢ ، & ٤ \leq \text{س} < ٦ \end{cases}$ على الفترة] - ٤ ، ٦ [

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

(٢١) د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{أس} + ٩}$ متصلة على ع

(٢٢) د(س) = $\begin{cases} \frac{(\text{س} + ٣)^٤ - ٨١}{\text{س}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{أ} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ متصلة على ع

أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:

(٢٣) د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & ، \quad \text{س} < ١ \\ \text{س}^٢ + \text{ب س} + \text{جـ} & ، \quad ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س} + ٢\text{ب} & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$ متصلة على ع ، س ∈ ع -] ١، ٣ [

(٢٤) د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢\text{ب} & ، \quad \text{س} < -٢ \\ ٣\text{ب س} + \text{حـ} & ، \quad -٢ \leq \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} - ٢\text{ب} & ، \quad \text{س} < ١ \end{cases}$ متصلة على ع

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:

(٢٥) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \quad \text{س} \leq ٢ \\ \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٢٦) د(س) = $\begin{cases} \frac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}} & ، \quad \text{س} < ٠ \\ \frac{٣}{٥}\ \text{جتا س} & ، \quad \text{س} > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٧) د(س) = $\begin{cases} \frac{(\text{س} - ٣)^{٥٠} + (\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} < ٣ \\ \text{جتا}\ (٣ - \text{س}) & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٢٨) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣

(٢٩) أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: د(س) = $\begin{cases} ٢ - \text{س}^٢ & ، \quad \text{س} \geq \text{جـ} \\ \text{س} & ، \quad \text{س} < \text{جـ} \end{cases}$

PDF Compressor Pro

(٢٠) متصلة على] - ٤ ، ٦ [- { ٤ }
(٢١) أ] -٦ ، ٦ [
(٢٢) أ = ١٠٨
(٢٣) ب = -٣ ، جـ = ٤
(٢٤) ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، جـ = $\frac{١٤}{١٣}$
(٢٥) د(+٢) ≠ د(-٢) ∴ لايمكن اعادة تعريفها لتصبح متصلة

(٢٦) د(س) = $\begin{cases} \frac{٣س + ١ - حتا س}{٥س} & ، س < ٠ \\ \frac{٣}{٥} & ، س = صفر \\ \frac{٣}{٥} حتا س & ، س > صفر \end{cases}$

(٢٧) د(س) = $\begin{cases} \frac{(س-٣٠)^{٥٠} + (س - ٣)}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ١ & س = ٣ \\ حتا (٣ - س) & س > ٣ \end{cases}$

(٢٨) د(س) = $\begin{cases} \frac{س٢ - س - ٦}{س - ٣} & ، س ≠ ٣ \\ ٥ & س = ٣ \end{cases}$

ملخص الوحدة:

وضح إلى طلابك أن ملخص الوحدة يوضح كافة التعريفات والمفاهيم التى تم تناولها في الدروس الستة للوحدة، اطلب منهم قراءة هذا الملخص بتركيز وتحديد المفاهيم والتعريفات، والنظريات، والنتائج المترتبة عليها، وكذلك شروط إيجاد نهاية دالة عند نقطة أو على فترة ومفهوم الاتصال وعدم الاتصال.



ملخص الوحدة

ملخص الوحدة

١) مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة $\overline{ع}$ هى ع ∪ {-∞ ، ∞}
أ) ∞ + أ = ∞ ب) ∞ + ∞ = ∞ ، ∞ - ∞ = أ جـ) $\frac{١}{∞}$ = $\frac{١}{-∞}$ = صفر
د) ∞ × أ = $\begin{cases} -∞ & ، إذا كان أ > ٠ \\ ∞ & ، إذا كان أ < ٠ \end{cases}$ هـ) -∞ × أ = $\begin{cases} ∞ & ، إذا كان أ > ٠ \\ -∞ & ، إذا كان أ < ٠ \end{cases}$

٢) إذا كانت قيمة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما س ⟵ أ من جهة اليمين وجهة اليسار فإن نهـا د(س) = ل وتقرأ نهاية د(س) عندما تقترب س من أ هى ل.
س⟵أ

٣) وجود نهاية الدالة عندما س = أ لا تعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعنى بالضرورة وجود النهاية.

٤) نهـا (حـ$_{ن}$ س^{ن} + حـ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + حـ$_{٠}$) = حـ$_{ن}$ أ^{ن} + حـ$_{ن-١}$ أ$^{ن-١}$ + ... + جـ
س⟵أ

٥) إذا كانت د(س) = ق(س) لكل س ∈ ع - {أ} وكان نهـا ق(س) = ل فإن نهـا د(س) = ل
س⟵أ س⟵أ

٦) إذا كان نهـا د(س) = ل ، نهـا ق(س) = م فإن:
س⟵أ س⟵أ
أ) نهـا ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ع
س⟵أ
ب) نهـا [د(س) ± ق(س)] = ل ± م
س⟵أ
جـ) نهـا د(س). ق(س) = ل.م
س⟵أ
د) نهـا $\frac{د(س)}{ق(س)}$ = $\frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠
س⟵أ
هـ) نهـا (د(س))^{ن} = ل^{ن} حيث ل^{ن} ∈ ع
س⟵أ
و) نهـا $\sqrt[ن]{د(س)}$ = $\sqrt[ن]{ل}$ حيث $\sqrt[ن]{ل}$ ∈ ع
س⟵أ

٧) بعض نظريات ونتائج النهايات:
أ) نهـا $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ = ن أ$^{ن-١}$
س⟵أ
ب) نهـا $\frac{(س+أ)^{ن} - أ^{ن}}{س}$ = ن أ$^{ن-١}$
س⟵٠
جـ) نهـا $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}}$ = $\frac{ن}{م}$ أ$^{ن-م}$
س⟵أ

٨) نهاية دالة عند اللا نهاية:
أ) نهـا $\frac{١}{س^{ن}}$ = ٠
س⟵∞
ب) نهـا $\frac{أ}{س^{ن}}$ = ٠ (حيث ن ∈ ع ، أ ثابت)
س⟵∞
جـ) نهـا جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن نهـا س^{ن} = ∞
س⟵أ س⟵∞



ملخص الوحدة

٩) عند إيجاد نهـا $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:
س⟵∞
أ) النهاية تعطى عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
ب) النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
جـ) النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

١٠) أ) نهـا جا س = جا أ، حيث أ ∈ ع ، نهـا جتا س = جتا أ حيث أ ∈ ع
س⟵أ س⟵أ
ب) نهـا ظا س = ظا أ حيث أ عدد حقيقي ، أ ≠ $\frac{\pi}{٢}$ + ن π لكل ن ∈ صـ
س⟵أ
جـ) إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى فإن: نهـا $\frac{جا س}{س}$ = ١ ، نهـا $\frac{ظا س}{س}$ = ١
س⟵٠ س⟵٠
د) نهـا جتا س = ١ ، نهـا $\frac{١ - جتا س}{س}$ = ٠
س⟵٠ س⟵٠

١١) يقال إن نهاية د(س) عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل.
وتكتب رمزيًا: نهـا د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د (أ$^{+}$) = د (أ$^{-}$) = ل حيث:
س⟵أ
أ) د (أ$^{+}$) = نهـا د(س) ، د (أ$^{-}$) = نهـا د(س)
س⟵أ$^{+}$ س⟵أ$^{-}$

١٢) تكون الدالة د متصلة عندما س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:
أ) نهـا د(س) موجودة ب) د(أ) موجودة جـ) نهـا د(س) = د (أ)
س⟵أ س⟵أ

١٣) إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب]. تكون الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:
أ) د(س) متصلة على الفترة]أ، ب[
ب) نهـا د(س) = د(أ) جـ) نهـا د(س) = د(ب)
س⟵أ$^{+}$ س⟵ب$^{-}$

١٤) بعض أنماط الدوال المتصلة:
- الدالة كثيرة الحدود متصلة على ع أو على مجال تعريفها.
- الدالة الكسرية متصلة على ع ماعدا أصفار المقام
- دالة الجيب وجيب التمام متصلة على ع
- دالة الظل د(س) = ظاس متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ صـ}

PDF Compressor Pro

إجابات التمارين العامة:

١) ٦	٢) $\frac{٢}{٣}$	٣) ٣
٤) ٦ $\frac{٢}{٣}$	٥) $\frac{٥}{٧}$	٦) ١
٧) $\frac{١}{٣}$	٨) ليس لها وجود	
٩) $\frac{١}{٥}$	١٠) $\frac{٩}{٢}$	١١) $\frac{٥}{٣}$
١٢) ١٦	١٣) $\frac{١}{٢}$	١٤) $\frac{١}{٥}$
١٥) -٣	١٦) $\frac{٢}{٣}$	١٧) $\frac{٢٥}{٢}$
١٨) أ) ٢	ب) ٢	جـ) ٢
١٩) ٣	٢٠) ٠	٢١) ∞
٢٢) $\frac{٥}{٧}$	٢٣) $\frac{-٥}{٦}$	٢٤) $\frac{٥}{٢}$
٢٥) ٢	٢٦) ٠	٢٧) $\frac{٣}{٥}$
٢٨) $\frac{١}{٣}$	٢٩) $\frac{٢}{٣}$	٣٠) ٨
٣١) $\frac{١}{٥}$		٣٢) ٢
٣٣) ليس لها وجود		٣٤) ١
٣٥) أ = ١ أو أ = -٢		٣٦) متصلة
٣٧) $\frac{١}{٨}$	٣٨) لايمكن	٣٩) -٢
٤٠) متصلة على الفترة]٠ ، ∞ [		
٤١) أ = $\frac{-١}{٢}$		ب = $-\frac{٩}{٢}$



تمارين عامة

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٦س}{س}$ = ...
(٦ ، π٦ ، π ، ٠)

٢) $\lim_{س \to ٠^+} (\sqrt{٧س} + ٣)$ = ...
(غير موجودة ، ٠ ، ٣ ، ٤)

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٣ + س - ١٢}$ =
($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، -١ ، -٥)

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣٢}{س^٣ - ٨}$ = ...
(٤ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ٠ ، $٦\frac{٢}{٣}$)

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{\pi - س}$ = ...
(١ ، ٢π ، π ، $-\pi$)

أوجد النهايات الآتية (إن وجدت):

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ + س - ٢}$

٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س^٢ - ١٠س + ٢٥}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٣س + ١}{س^٢ + س - ٢}$

٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س^٢ + ٣س - ٩}{٢س^٢ - ٣س - ٩}$

١٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ - ١}$

١١) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٣)^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٥س}$

١٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٧\sqrt{س} + ١٥}{١ - س^٢}$

١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢٥ + س} - ٥}{١٧ + س - ١}$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{٨س^٢ - ٣ جاس}{س}$

١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س}{٣س^٢}$

١٦) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س + ٣}$ = ٤ فما قيمة $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

١٧) إذا كان د(س) = { س - ١ ، لكل س ≥ ٣ / ٣ س - ٧ ، لكل س < ٣ } فأوجد:

أ) $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س)
ب) $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س)
جـ) $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٢ - ٢}{س^٣ + ١}$
١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٢ - ٥س}{س^٤ + ٣}$
٢٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٤ - ٢س + ١}{س^٣ + ٤}$

٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س^{-١} + ٥}{٧ + ٩س^{-٢}}$
٢٢) $\lim_{س \to ٠} (\frac{٢}{٣} - \frac{٣س}{٢س + ٧})$
٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥س - ٣}{٧ + ٤س^٣}$

٢٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧} - \sqrt{س + ٦}}{\sqrt{س} - ١}$
٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \sqrt{٧ + ٤س^٢} - ٣$
٢٦) $\lim_{س \to ٠} (\sqrt{٧س + ١} - \sqrt{٧})$



تمارين عامة

٢٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س}$
٢٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{٣س}$
٢٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢س}{جا ٣س}$

٣٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٤س}{٣س^٢}$
٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س - جا ٢س}{٥س}$
٣٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢س - \pi}{جتاس}$

٣٣) إذا كانت د(س) = { $\frac{٣س}{جاس}$ ، لكل س < ٠ / جتا ٣س ، لكل س > ٠ } فابحث وجود $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

٣٤) إذا كان د(س) = { $\frac{جا(س - ١)}{س - ١}$ ، لكل س < ١ / ظا $\frac{\pi}{٤}$ س ، لكل س > ١ } فابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ د(س)

٣٥) أوجد قيمة الثابت أ لكى يكون للدالة د نهاية عندما س ⟵ ٠

حيث د(س) = { أ + جتا س ، عندما س < ٠ / $\frac{ظا ٢س}{أس}$ ، عندما س > ٠ }

٣٦) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

٣٧) للدالة د حيث د(س) = { $\frac{\sqrt{٧س + ٢} - ٣}{س^٢ - ١}$ حيث س ≠ ١ / ك ، عندما س = ١ } أوجد قيمة ك؛ لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١

٣٨) أعد تعريف الدالة د حيث د(س) = { س^٣ + ٢س ، لكل س < ١ / ٥س - ١ ، لكل س > ١ } بحيث تصبح متصلة عندما س = ١
إذا كان ذلك ممكنًا.

٣٩) للدالة د حيث د(س) = { $\frac{جتا ٢س - ١}{س^٢}$ حيث س ≠ ٠ / ك ، عندما س = ٠ } أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة عندما س = ٠

٤٠) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = { ١ + جاس ، حيث ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ / ١ - جتا ٢س ، حيث س ≤ $\frac{\pi}{٣}$ } على ع

٤١) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = { ٤س ، حيث س ≥ -١ / أس + ب ، حيث -١ < س < ٣ / -٢س ، حيث س ≤ ٣ }
متصلة على ع فما قيمة كل من أ ، ب؟

PDF Compressor Pro

إجابات الاختبار التراكمى:

(١) ٣، -٢

(٢) -٣س

(٣) س^{٢} - س +٤

(٤) $\frac{-١}{\pi}$

(٥) $\frac{\sqrt{٢}}{\pi}$

(٦) ١

(٧) $\frac{-٣}{٢}$

(٨) $\frac{٢}{٥}$

(٩) $\frac{١}{٣}$

(١٠) $\frac{١}{٢}$

(١١) $\frac{٨}{٣}$

(١٢) $\frac{٩}{٥}$

(١٣) $\frac{١}{٣}$

(١٤) $\frac{٥}{٣}$

(١٥) ليس لها وجود

(١٦) ليس لها وجود

(١٧) أ ليس لها وجود

ب ١

جـ ٤

(١٨) أ غير متصلة

ب متصلة على ع - {٢}

(١٩) متصلة على ع - {٢، ٣}

(٢٠) أ = ٢



اختبار تراكمى

أكمل كلًا مما يأتى:

(١) س^{٢} - س - ٦ = (س - .....)(س + ...)

(٢) $\sqrt{س^{٢} - ٣س}$ - س) ($\sqrt{س^{٢} - ٣س}$ + س) = ...

(٣) $\frac{س^{٢} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤}{س - ١}$ = ...

(٤) $\frac{جتا \pi}{\pi}$ = ...

(٥) $\frac{جتا \frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤}}$ = ...

(٦) نهـا $\frac{٣س - ٢}{س}$ = ...
س ← ١

(٧) نهـا $\frac{س^{٢} - ٣س}{٣س}$ = ...
س ← ٠

(٨) نهـا $\frac{جا ٢س}{٥س}$ = ...
س ← ٠

(٩) نهـا $\frac{س^{٢} - ٣س + ٥}{٤ - ٣س^{٢}}$ = ...
س ← ∞

(١٠) نهـا $\frac{١ جتا س}{س^{٢}}$ = ...
س ← ٠

احسب النهايات الآتية (إن وجدت):

(١١) نهـا $\frac{٢ جا ٤س}{جا ٣س}$
س ← ٠

(١٢) نهـا $\frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٢} - ٩}$
س ← -٣

(١٣) نهـا د(س) حيث د(س) = $\frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$
س ← -١

(١٤) نهـا د(س) حيث د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\pi - ٢س}$ لكل س > $\frac{\pi}{٢}$ ، $جا(\pi - س)$ لكل س < $\frac{\pi}{٢}$
س ← $\frac{\pi}{٢}$

(١٥) نهـا $\frac{١ - س^{٠}}{١ - س^{٥}}$
س ← ١

(١٦) نهـا $\frac{س^{٢} + ٣س^{٢} + س - ٢}{س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢}$
س ← ٢

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

(١٧) د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & \text{لكل س} \neq ٢ \\ جا(\pi - س) & \text{لكل س} = ٢ \end{cases}$

(١٨) د(س) = $\frac{س^{٣} - ٩}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ على ع

(١٩) إذا كان د(س) = $\begin{cases} س - ٢ & س < ٠ \\ س^{٢} & ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٣س & س > ٢ \end{cases}$ ، فأوجد

أ نهـا د(س)
س ← ٠

ب نهـا د(س)
س ← ١

جـ نهـا د(س)
س ← ٢

(٢٠) أوجد قيم أ التي تجعل نهـا د(س) لها وجود حيث د(س) = $(\frac{١}{س - ١} - \frac{أ}{س^{٢} - ١})$
س ← ١

أ على ع

ب عند س = ٢

١٥٠ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمي

أوجد النهايات الآتية:

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٥}{٦س - ٨}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} + س}{٣س^{٢} - ٥}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٣} - ٢س^{٢} + ١}{١ - ٣س}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٧س^{٢} + ٢}}{٣س - ٦}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٣]{٥س^{٣} + ٥س^{٢}} - س^{٣})$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^{٢} - ٣س} - س)$

(٢٧) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

أ) $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \geq ٤ \\ ٧ + \frac{١٦}{س} & س < ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - جتاس}{س} & س < ٠ \\ \frac{جتاس}{س} & س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٨) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} -١٠ & س \neq ٤ \\ ١ & س = ٤ \end{cases}$

$ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & س \neq ٤ \\ -٦ & س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

أ) د(س) ب) ر(س) جـ) د(س).ر(س)

د) |د(س)| هـ) ر(س) - ٦د(س) و) ر(د(س))

(٢٩) أوجد قيم ك التي تجعل الدالة متصلة على ح

أ) $د(س) = \begin{cases} ٧س - ٢ & س \geq ١ \\ -ك س^{٢} & س \leq ١ \end{cases}$

ب) $د(س) = \begin{cases} ك س^{٢} & س \geq ٢ \\ ٢س + ك & س < ٢ \end{cases}$

جـ) $د(س) = \begin{cases} -٩ - س^{٢} & س \leq -٣ \\ \frac{ك}{س^{٢}} & س > -٢ \end{cases}$

(٣٠) أوجد قيمة ك، م التي تجعل الدالة الآتية متصلة على ح

$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & س \leq ٢ \\ م(س + ١) + ك & -٢ < س < -١ \\ ٢س^{٣} + س + ٧ & س \geq -١ \end{cases}$

(٣١) أدرس اتصال الدالة د:

أ) $د(س) = \frac{١}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ على مجالها

ب) $د(س) = \frac{س - ٢}{|س| - ٢}$ على ح

(٢١) $\frac{١}{٢}$

(٢٢) ٠

(٢٣) ∞

(٢٤) $\frac{١}{٣}$

(٢٥) $\frac{٥}{٢}$

(٢٦) $\frac{٣}{٢}$

(٢٧) أ) متصلة ب) غير متصلة

(٢٨) أ) غير متصلة ب) غيرمتصلة

جـ) متصلة د) متصلة

هـ) متصلة و) متصلة

(٢٩) أ) ك = -٥ ب) ك = $\frac{٤}{٣}$

جـ) ك = ١٦٢

(٣٠) ك = ٤، م = $\frac{٥}{٣}$

(٣١) أ) متصلة على] ٢، ∞ [

ب) متصلة على ح- {٢، -٢}

PDF Compressor Pro



حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

قبل البدء فى عرض موضوعات الوحدة وضح للمتعلمين دور قدماء المصريين فى تطوير علم حساب المثلثات مع الإشارة إلى مراحل التطور ودور الإغريق وعلماء العرب المسلمين فى حل المعادلات، واستخدام المماسات والقواطع فى قياس المسافات والزوايا كتمهيد للوصول إلى قانونى الجيب وجيب التمام والتطبيقات الهندسية والحياتية موضحًا أنه بعد أن سبق ودرس الطالب حل المثلث القائم الزاوية وتطبيقات عليه تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض، وتعرف مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم، والآن سوف يتعلم حل أى مثلث وذلك من خلال دراسة قانونى الجيب وجيب التمام وبعض التطبيقات الهندسية والحياتية وذلك من خلال درسين هما :

الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام.

مخرجات التعلم

في نهاية هذه الوحدة وتنفيذًا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يُوجِد حلين لزاوية مجهولة).
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.
- يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانونى قاعدتى جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.

مقدمة الوحدة

علم حساب المثلثات Trigonometry هو أحد فروع مادة الرياضيات ، يعتبر قدماء المصريين أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات حيث استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، وترجع معرفتنا بحساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها واستخدموها في إيجاد بعض العلاقات التى تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، كما ساهم علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات المثلثية كما استخدموا المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المسافات والزوايا كما ابتكروا طريقة لإنشاء جداول للجيوب في المثلثات المستوية.

ونشير هنا إلى العالم السويسري ليونارد اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) الذي قدم تعبيرًا جديدًا للدوال المثلثية ، كما استخدم الكثير من الرموز الرياضية التي تساعد في استخدام المسائل الرياضية المتقدمة التي تدرس في جميع المدارس والجامعات حتى الان وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التى تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية الوحدة وتنفيذًا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث ، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حلان لزاوية مجهولة).
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.
- يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث ، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:

إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.

- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانونى (قاعدتى) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.
- يدرس الحالة المبهمة (Ambiguous Case) فى حل المثلث كنشاط جماعى وأبحاث علمية.

١٥٢ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

- يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:
- إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانونى (قاعدتى) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.
- يدرس الحالة المبهمة (*Ambiguous Case*) فى حل المثلث كنشاط جماعى
- يبحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن الحالة المبهمة وإمكانية حل المثلث حسب القياسات المعطاه.

PDF Compressor Pro

الزمن المناسب لتدريس الوحدة

١٤ حصة.

المصطلحات الأساسية

وضح إلى الطلاب أن هناك مصطلحات سبق دراستها مثل الزاوية الحادة، والمنفرجة، وأطوال الأضلاع بالإضافة إلى مصطلحات جديدة مثل الحالة المبهمة، وقانون الجيب، وقاعدة جيب التمام.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة

التفكير المنطقى - التفكير الهندسى - التفكير التحليلى - حل المشكلات - التفكير الإبداعى فى الرياضيات المدرسية.

وسائل ومصادر التعلم

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - جهاز عرض بيانات Data show - برامج رسومية للحاسب الآلي، والتابلت مثل (geogebra) - السبورة التفاعلية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية، والتحريرية الفردية، والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة، والتكليفات الجماعية والفردية، والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.



المصطلحات الأساسية

حساب المثلثات	Trigonometry	حل وحيد	Unique Solution	زاوية مقابلة لضلع	Opposite Angle of a Side
قاعدة الجيب	Sine Rule	أقصر ضلع	Shortest Side	أصغر زاوية	Smallest Angle
زاوية حادة	Acute Angle	أطول ضلع	Longest Side	أكبر زاوية	Largest Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle	مساحة المثلث	Area of The Triangle	قاعدة جيب التمام	Cosine Rule
زاوية قائمة	Right Angle	أطوال أضلاع المثلث	The Lengths of The Sides of the Triangle		
حالة مبهمة	Ambiguous Case				
حلول ممكنة	Possible Solutions				

دروس الوحدة

الدرس (١ - ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ - ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة

١٥٣ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

PDF Compressor Pro

٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب

The Sine rule

خلفية

سبق أن درس الطالب حل المثلث القائم الزاوية وحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض، والآن سوف يتعلم حل المثلث غير قائم الزاوية و إحدى طرق حله هو قانون (قاعدة) الجيب وهو موضوع هذا الدرس.

مخرجات التعلم

في نهاية هذا الدرس وتنفيذًا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- يحل مشكلات رياضية وحياتية بعد نمذجتها باستخدام قانون (قاعدة) الجيب.
- يحدد العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.
- يحل مسائل على العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.

مفردات أساسية

- حساب مثلثات – قانون (قاعدة) الجيب – زاوية حادة – زاوية منفرجة – زاوية قائمة – الحالة مبهمة – حل المثلث.

وسائل ومصادر التعلم

- السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض بيانات Data Show. - آلة حاسبة علمية- السبورة التفاعلية.
- الكتاب المدرسى من ص ١٥٤ - ص ١٦٣.

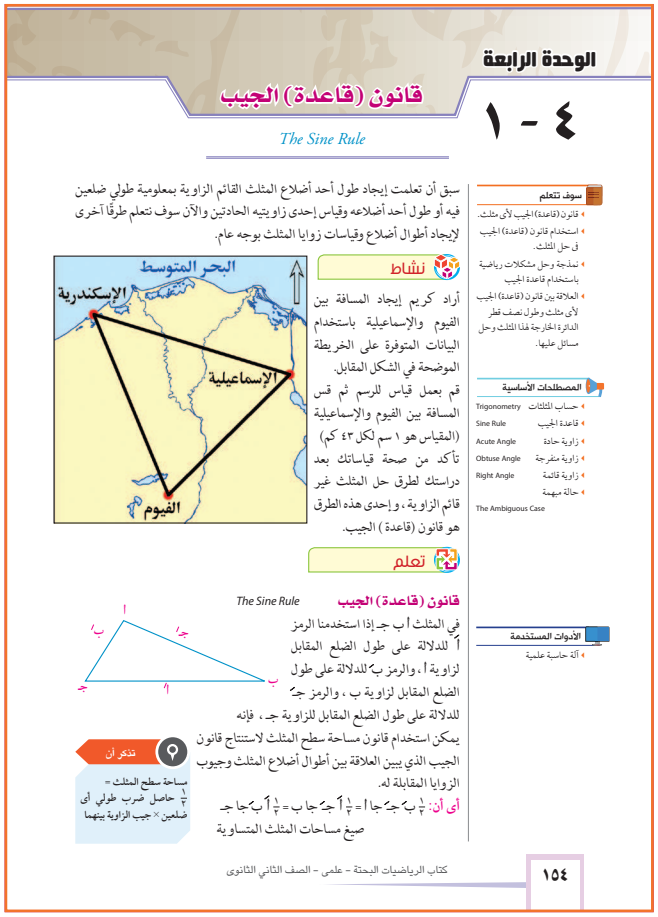
طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

زمن الدرس والمكان

المكان : الفصل الدراسى.

زمن التدريس : ٦ حصص.



الوحدة الرابعة

٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين والآن سوف نتعلم طرقًا أخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمة The Ambiguous Case

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

نشاط

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل.

قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم)

تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية ، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.

البحر المتوسط
الإسكندرية
الإسماعيلية
الفيوم

تعلم

قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*

في المثلث أ ب جـ إذا استخدمنا الرمز أ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ ، والرمز بـ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب ، والرمز جـ للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية جـ ، فإنه يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

أى أن: $\frac{1}{2}$ بـ جـ جا أ = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب = $\frac{1}{2}$ أ بـ جا جـ

صيغ مساحات المثلث المتساوية

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ١٥٤

التهيئة :

اطلب إلى الطلاب فحص الخريطة الموضحة فى ص ١٥٤ وناقشهم فى المعلومات المتوفرة، ساعدهم فى ترجمة الخريطة إلى شكل هندسى وناقشهم فى الحالات المختلفة لتحديد المثلث وفق شرط معطاة.

تعلم

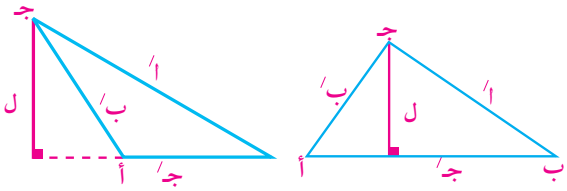
التدريس : في بند تعلم:

- يهدف هذا الجزء إلى استنتاج قانون (قاعدة الجيب) بالاستعانة بمساحة سطح المثلث، احرص على مشاركة الطلاب الفعالة وتوظيف المعلومات السابقة لديهم.
- اطلب إلى الطلاب تذكر قانون مساحة المثلث باستخدام ارتفاع المثلث أو قياس الزاوية المحصورة بين ضلعين معلوم طولهما.
- قسم الطلاب إلى مجموعات عمل تعاونية لرسم مثلث وتحديد الرموز الدالة على أطوال أضلاعه (أ، بـ، جـ) واستخدام هذه الرموز للتعبير عن مساحة سطح المثلث وكتابة الصيغ الممكنة للمساحة، وبالتالى استنتاج قانون (قاعدة) الجيب.

PDF Compressor Pro

تعلم ذاتي:

للإجابة عن السؤال الموضح فى هذا العنوان "هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك" وضح للطلاب أنه يمكن إثبات ذلك باستخدام العلاقة بين ارتفاع المثلث وأحد زوايا المثلث وذلك كما يلي:



ذكر الطلاب بأن : حا أ = $\frac{ل}{ب}$ = ، حا ب = $\frac{ل}{أ}$

أى أن : ل = ب حا أ ، ل = أ حا ب

ب حا أ = أ حا ب أى أن : $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب}$

وبالتالى يمكن إثبات أن: $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ}$

وضح للطلاب أنه في المثلث المنفرج الزاوية يكون : حا (١٨٠° - أ) = حا أ (الجيب موجب في الربع الثاني).

إرشادات للدراسة :

- **فى مثال(١)** يجب أن تناقش طرق تكوين مثلث بمعلومية أى ثلاثة من عناصره الستة، فيجب أن يعرف الطلاب أن ثلاثة عناصر ربما تعين مثلثًا واحدًا، ولكن أحيانًا تحدد اثنين أو ثلاثة أو لاشيء أو عددًا غير محدد من المثلثات.
- **فى مثال (٢)** تأكد من قدرة الطلاب على إيجاد الناتج باستخدام الآلة الحاسبة، وساعد الطلاب على تهيئة الآلة الحاسبة؛ لاستخدام التقدير الستينى لقياسات الزوايا.

نشاط: (تقويم الأداء المهارى)

- اطلب إلى طلابك القيام بالنشاط الموضح ص (١٥٦) من كتاب الطالب قبل مناقشة الحالة المبهمة ، التحقق عدديًّا مما يحدث فى هذا النشاط إذا كان طول الضلع أ = ٣,٥سم، أو ٥سم أو ٢سم.
- ربما يحتاج الطلاب مساعدة فى عمل ربط بين الارتفاع (ع) =ب حا أ وطول الضلع أ لإمكانية استخدام الحالات الثلاث.
- وضح إلى الطلاب بأنه إذا كان معلومًا لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلث وحيد فى هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما، فإن عدد المثلثات الممكنة فى هذه الحالة هو



قانون (قاعدة) الجيب ٤ - ١

ب جـ جا أ = أ جـ جا ب = أ ب جا جـ

بضرب كل عبارة في ٢

$\frac{ب جـ جا أ}{أ ب جـ} = \frac{أ جـ جا ب}{أ ب جـ} = \frac{أ ب جا جـ}{أ ب جـ}$

بقسمة كل عبارة على أ ب جـ

$\frac{جا أ}{أ} = \frac{جا ب}{ب} = \frac{جا جـ}{جـ}$

بالتبسيط

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$

من خواص التناسب

أى أن: في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أى : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$

تذكر أن

مساحة المثلث أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ

= $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب

= $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

تعلم ذاتي: هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك

استخدام قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال

(١) أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٣° ٥٤ ، ق(∠ب) = ٢٢° ٤٩ ، أ = ١٢٤,٥سم

الحل

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية (التباين في المثلث)

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠° - [٣٣° ٥٤ + ٢٢° ٤٩] = ٧٦° ٥

تذكر أن

في أى مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا، ويكون الضلع الأصغر طولًا مقابلًا للزاوية الأصغر قياسًا.

∴ أكبر طول ضلع هو جـ لأنه يقابل أكبر زاوية فى المثلث وهى زاوية جـ

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جـ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٢٤,٥}{جا ٣٣° ٥٤} = \frac{جـ}{جا ٧٦° ٥}$

∴ جـ = $\frac{١٢٤,٥ \times جا ٧٦° ٥}{جا ٣٣° ٥٤}$ = ١٤٨,٤سم

حاول أن تحل

(١) أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣° ، ق(∠ب) = ٦٥° ، جـ = ٨,٤سم

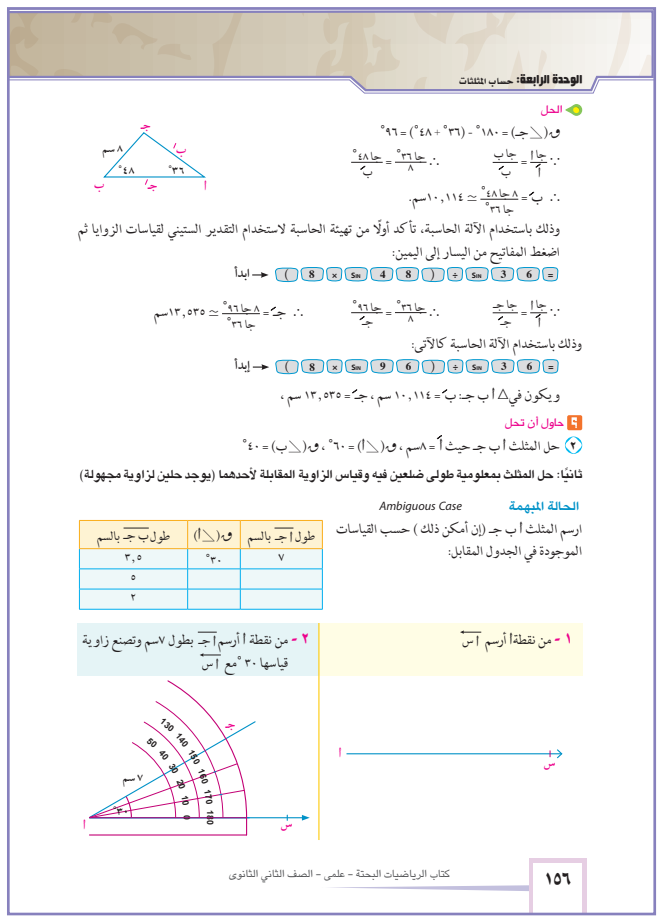
حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the triangle using the sine rule*

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠ب) = ٤٨°



الحل

ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ ∴ $\frac{٨}{جا ٣٦°} = \frac{ب}{جا ٤٨°}$

∴ ب = $\frac{٨ جا ٤٨°}{جا ٣٦°}$ ≃ ١٠,١١٤سم.

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

(8 × Sin 4 8) ÷ Sin 3 6 = ← ابدأ

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جـ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٨}{جا ٣٦°} = \frac{جـ}{جا ٩٦°}$ ∴ جـ = $\frac{٨ جا ٩٦°}{جا ٣٦°}$ ≃ ١٣,٥٣٥سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

(8 × Sin 9 6) ÷ Sin 3 6 = ← إبدأ

ويكون في △ أ ب جـ: ب = ١٠,١١٤ سم ، جـ = ١٣,٥٣٥ سم ،

حاول أن تحل

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (يوجد حلين لزاوية مجهولة)

الحالة المبهمة *Ambiguous Case*

ارسم المثلث أ ب جـ (إن أمكن ذلك) حسب القياسات الموجودة في الجدول المقابل:

طول $\overline{أجـ}$ بالسم	ق(∠أ)	طول $\overline{ب جـ}$ بالسم
٧	٣٠°	٣,٥
		٥
		٢

١ - من نقطة أ أرسم $\overleftarrow{أ س}$

٢ - من نقطة أ أرسم $\overline{أجـ}$ بطول ٧سم وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع $\overleftarrow{أ س}$

PDF Compressor Pro

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

صفر أو واحد أو اثنان وبذلك فإنه ليس للمثلث حل أو له حل وحيد أو له حلان، وتبين الأشكال ص (١٥٧) ، ص(١٥٨) هذه الحالات المختلفة عندما تكون ∠ أ حادة أو منفرجة من خلال مقارنة أ ، ب ، ع حيث ع طول العمود المرسوم من جـ على أ س .

تدريب على النشاط :

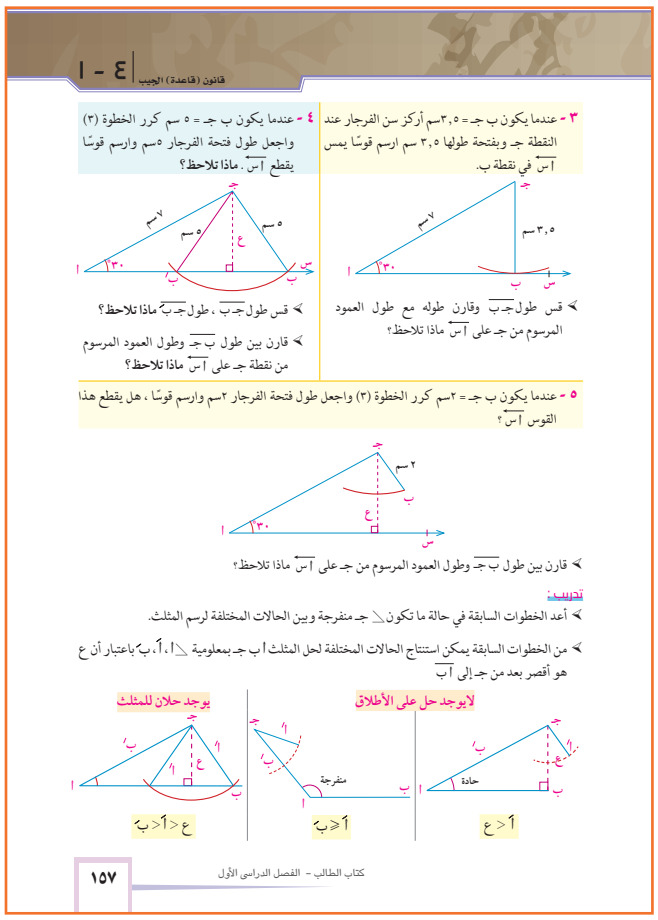
- بعد تنفيذ نشاط «الحالة المبهمة» وللتحقق من استيعاب الطلاب، اطلب منهم التدريب بتنفيذ النشاط الموضح ص١٥٧ وتنفيذ الخطوات الموضحة بالرسم واطلب منهم التعبير بأسلوبهم عن تفسير النتائج الموضحة فى كل حالة.
- فى مثال ٣: اطلب إلى الطلاب العمل فى مجموعات تعاونية للحل، وعليك متابعة عمل الطلاب موضحًا لهم عددًا من النقاط منها:
  - ضرورة تحديد نوع الزاوية المعطاة من حيث كونها زاوية حادة أو زاوية منفرجة.
  - تحديد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة.
  - أقرن حل المثلث بإمكانية رسمه فلا يمكن حل مثلث دون أن يتمكن الطالب من رسمه.
- ناقش مع طلابك أنه إذا بدأ الطالب باستخدام قانون الجيب لحل مثلث ليس له حل فسيجد أن جيب إحدى الزوايا أكبر من الواحد الصحيح، وذلك يجعل الحل مستحيلًا ولمزيد من التوضيح يمكن عرض الأمثلة الإضافية التالية:

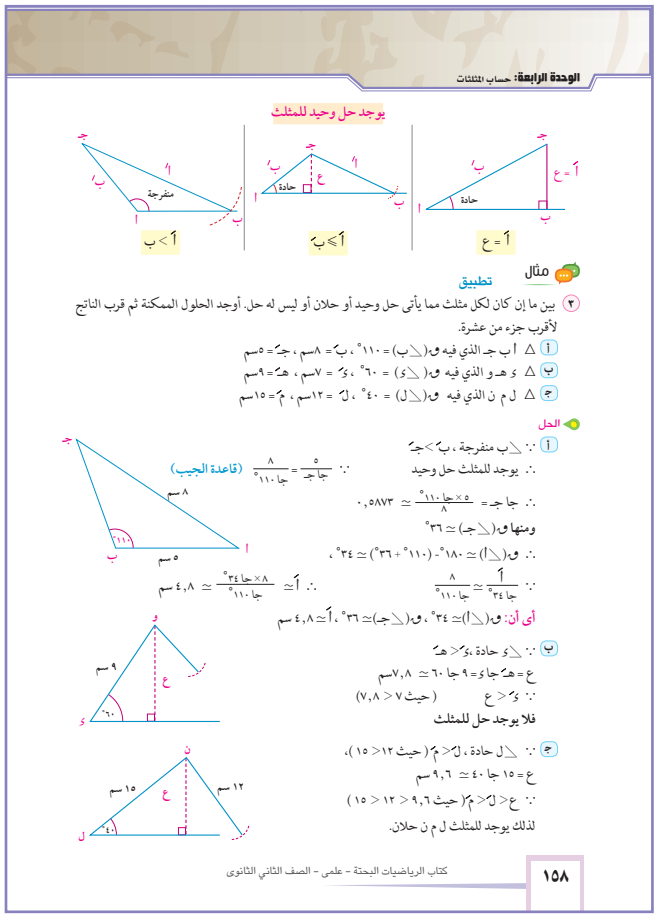
مثال إضافى :

(١) حدد ما إذا كان لكل مثلث فيمايأتى حل وحيد أم حلان أو ليس له حل. أوجد الحلول مقربًا أطوال أضلاع المثلث إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

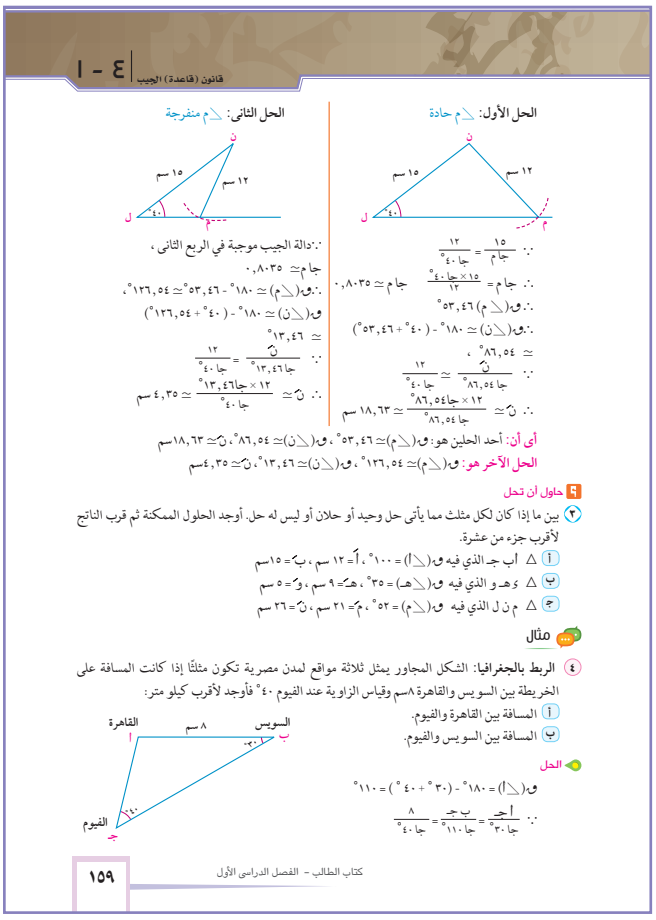
أ المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٨سم ، جـ = ١١سم ،
ق(∠جـ) = ١١٠°
يوجد حل وحيد لأن جـ > أ والحل هو: ب ≃ ٥,٣سم ،
ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٢٧°

ب المثلث س ص ع الذى فيه ص = ٥سم ، ع = ٩سم ،
ق(∠ص) = ٥٢°
لا يوجد حل للمثلث لأن طول العمود المرسوم من س على ص ع أكبر من ص حيث ع ≃ ٩ جا ٥٢° ≃ ٧,١سم.





PDF Compressor Pro



قانون (قاعدة) الجيب ٤ - ١

الحل الأول: ∠م حادة

ن
١٥ سم
١٢ سم
٤٠°
ل
م

∵ ١٥ / جا م = ١٢ / جا ٤٠°

∴ جا م = (١٥ × جا ٤٠°) / ١٢ ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ≃ ٥٣,٤٦°

∴ ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - ٤٠° + ٥٣,٤٦°) ≃ ٨٦,٥٤° ،

∵ ن / جا ٨٦,٥٤° ≃ ١٢ / جا ٤٠°

∴ ن ≃ (١٢ × جا ٨٦,٥٤°) / جا ٤٠° ≃ ١٨,٦٣ سم

الحل الثاني: ∠م منفرجة

ن
١٥ سم
١٢ سم
٤٠°
ل
م

∵ دالة الجيب موجبة في الربع الثاني ،

جا م ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ≃ ١٨٠° - ٥٣,٤٦° ≃ ١٢٦,٥٤° ،

ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - (٤٠° + ١٢٦,٥٤°)

≃ ١٣,٤٦°

∵ ن / جا ١٣,٤٦° = ١٢ / جا ٤٠°

∴ ن ≃ (١٢ × جا ١٣,٤٦°) / جا ٤٠° ≃ ٤,٣٥ سم

أي أن: أحد الحلين هو: ق(∠م) ≃ ٥٣,٤٦° ، ق(∠ن) ≃ ٨٦,٥٤° ، ن ≃ ١٨,٦٣ سم

الحل الآخر هو: ق(∠م) ≃ ١٢٦,٥٤° ، ق(∠ن) ≃ ١٣,٤٦° ، ن ≃ ٤,٣٥ سم

حاول أن تحل

٢ بين ما إذا كان لكل مثلث مما يأتي حل وحيد أو حلان أو ليس له حل. أوجد الحلول الممكنة ثم قرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

أ △ أ ب جـ الذي فيه ق(∠أ) = ١٠٠° ، أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم

ب △ و هـ ز الذي فيه ق(∠هـ) = ٣٥° ، هـ = ٩ سم ، و = ٥ سم

جـ △ م ن ل الذي فيه ق(∠م) = ٥٢° ، م = ٢١ سم ، ن = ٢٦ سم

مثال

٤ **الربط بالجغرافيا:** الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:

أ المسافة بين القاهرة والفيوم.

ب المسافة بين السويس والفيوم.

القاهرة
السويس
٨ سم
أ
ب
٣٠°
الفيوم
جـ

الحل

ق(∠أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

∵ أ جـ / جا ٣٠° = ب جـ / جا ١١٠° = ٨ / جا ٤٠°

ب المثلث ل م ن الذي فيه لَ = ٩سم ، نَ = ١٥ سم ، ق(∠ل) = ٢٨° يوجد للمثلث حلان هما :

الحل الأول: ق(∠ن) = ٥١° ، ق(∠م) = ١٠١° ، مَ = ١٨,٨سم

الحل الثاني : ق(∠ن) = ١٢٩° ، ق(∠م) = ٢٣° ، مَ = ٧,٥ سم

٢ أوجد عدد المثلثات المتكونة إذا كان ق(∠ا) = ٣٠° ، بَ = ٦سم، أَ تساوى ٢سم أو ٣سم ، ٤سم.

الحل:

الارتفاع (ع) هو ٦ حا ٣٠ = ٣سم

أ عندما أَ = ٢سم يكون أَ < ع لذلك لايوجد مثلث.

ب عندما أَ = ٣سم يكون أَ = ع لذلك يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

جـ عندما أَ = ٤سم يكون : ع < أَ < بَ يوجد مثلثان.

التعليم باستخدام التكنولوجيا:

- يمكنك استخدام السبورة التفاعلية؛ لتوضيح الحالة التي يكون فيها للمثلث حلان عند استخدام قانون الجيب واستخدام برنامج الرسم لرسم الضلعين المعطى طولهما والزاوية المعلومة بدقة، قم برسم أحد الأوضاع الممكنة للضلع الثالث للمثلث ثم حرك القطعة المستقيمة التى تمثله؛ لتوضيح كيفية رسم المثلث الآخر الممكن.

مثال الربط بالجغرافيا:

- ذكر طلابك عن مفهوم مقياس الرسم وأن الطول في الحقيقية = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم وأن الطول فى الرسم = الطول فى الحقيقة × مقياس الرسم وعلى المعلم عند إعطاء تطبيقات حقيقية من الواقع يجب أن تكون معلومات المسألة حقيقية مستمدة من الواقع.
- بعد الانتهاء من حل المثال الموضح ص ١٥٩، والخاص بالربط بالجغرافيا، اطلب من مجموعات الطلاب اختيار محافظات أخرى يمكن الحصول على المسافات فيما بينها عبر الإنترنت أو أى مصدر معلومات آخر متاح بالمكتبة، ومن خلال استخدام مقياس رسم معين يمكن محاكاة المثال الموضح بكتاب الطالب والتحقق من مدى الاتساق بين المسافة الحقيقية والمسافة المحسوبة.

PDF Compressor Pro

حاول أن تحل:

اطلب إلى الطلاب الرجوع إلى ص١٥٤ فى بداية الدرس الاطلاع على الخريطة التى توضح المسافة بين الفيوم والإسماعيلية، ويفحص تلك الخريطة اطلب منهم الاستعانة بالشكل الهندسى الموضح؛ لإيجاد المطلوب.

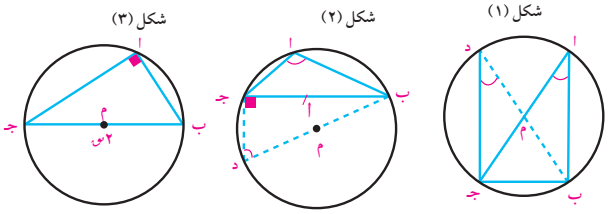
تطبيقات هندسية لقانون الجيب:

لمساعدة الطلاب على استيعاب البرهان الموضح وجه لهم عددًا من الأسئلة؛ لجذب انتباهم وزيادة مشاركتهم، ومن أمثلة الأسئلة التى يمكن أن تستعين بها:

لماذا $\angle ب\,ا\,س = ٩٠°$ لماذا $ا = \frac{ا\,ب}{ب\,س}$

كما يمكنك استخدام البرهان التالى لإثبات قاعدة الجيب.

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)



فى شكل (١) : $\triangle ا\,ب\,جـ$ حاد الزوايا

لذلك فإن حا$ا$ = حا ء = $\frac{ا}{٢نق}$ وبالتالى يمكن استنتاج أن

حا$ب$ = $\frac{ب}{٢نق}$ ، حا جـ = $\frac{جـ}{٢نق}$

فى شكل (٢) : $\triangle ا\,ب\,جـ$ منفرج الزاوية فى $ا$ لذلك فإن :

حا$ا$ = حا (١٨٠° - ء) = حا ء لذلك فإن حا ء = $\frac{ا}{٢نق}$، حا$ا$ = $\frac{ا}{٢نق}$

وبالتالى يمكن استنتاج أن حا$ب$ = $\frac{ب}{٢نق}$ ، حا جـ = $\frac{جـ}{٢نق}$

أى أن: $\frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ} = ٢$ نق

بالمثل يمكن إثبات أن $\frac{ا}{\text{حا}ا} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = ٢$ نق

وبالتالى فإن : $\frac{ا}{\text{حا}ا} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ} = ٢$ نق

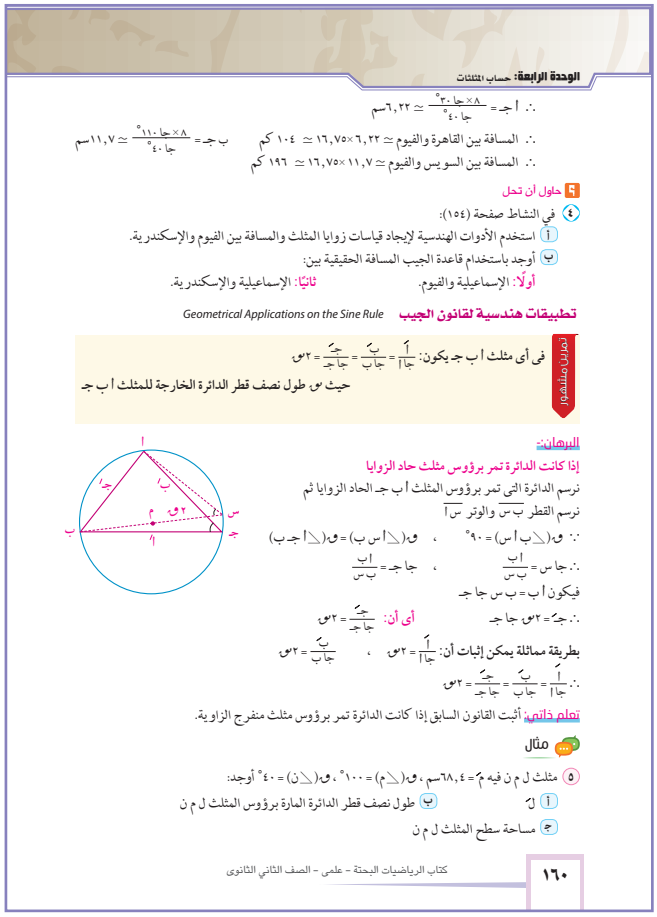
فى شكل (٣) : نجد أن : حا$ب$ = $\frac{ب}{٢نق}$ ، حا جـ = $\frac{جـ}{٢نق}$

أى أن : $\frac{ب}{\text{حا}ب} = \frac{جـ}{\text{حا}جـ}$ ٢ نق

بالمثل يمكن إثبات $\frac{ا}{\text{حا}ا} = \frac{ب}{\text{حا}ب} = ٢$ نق عندما تكون $\angle جـ$ قائمة.

تعلم ذاتى

اطلب إلى الطلاب رسم مثلث منفرج الزاوية داخل دائرة وتحديد الزوايا المحيطية الممكنة بعد رسم القطر، وساعدهم فى اتباع



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

∴ ا جـ = $\frac{٨ \times \text{جا}٣٠°}{\text{جا}٤٠°} \simeq ٦,٢٢$سم

∴ المسافة بين القاهرة والفيوم $\simeq ٦,٢٢ \times ١٦,٧٥ \simeq ١٠٤$ كم ب جـ = $\frac{٨ \times \text{جا}١١٠°}{\text{جا}٤٠°} \simeq ١١,٧$سم

∴ المسافة بين السويس والفيوم $\simeq ١١,٧ \times ١٦,٧٥ \simeq ١٩٦$ كم

حاول أن تحل

٤ فى النشاط صفحة (١٥٤):

أ استخدم الأدوات الهندسية لإيجاد قياسات زوايا المثلث والمسافة بين الفيوم والإسكندرية.

ب أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين:

أولًا: الإسماعيلية والفيوم. ثانيًا: الإسماعيلية والإسكندرية.

تطبيقات هندسية لقانون الجيب *Geometrical Applications on the Sine Rule*

نص مبرهن

فى أى مثلث ا ب جـ يكون: $\frac{ا}{\text{جا}ا} = \frac{ب}{\text{جا}ب} = \frac{جـ}{\text{جا}جـ} = ٢$ء

حيث ء طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ

البرهان:

إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس المثلث ا ب جـ الحاد الزوايا ثم نرسم القطر $\overline{ب\,س}$ والوتر $\overline{س\,ا}$

∵ ق($\angle ب\,ا\,س$) = ٩٠° ، ق($\angle ا\,س\,ب$) = ق($\angle ا\,جـ\,ب$)

∴ جا س = $\frac{ا\,ب}{ب\,س}$ ، جا جـ = $\frac{ا\,ب}{ب\,س}$

فيكون ا ب = ب س جا جـ

∴ جـ = ٢ء جا جـ أى أن: $\frac{جـ}{\text{جا}جـ} = ٢$ء

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{ا}{\text{جا}ا} = ٢$ء ، $\frac{ب}{\text{جا}ب} = ٢$ء

∴ $\frac{ا}{\text{جا}ا} = \frac{ب}{\text{جا}ب} = \frac{جـ}{\text{جا}جـ} = ٢$ء

تعلم ذاتى: أثبت القانون السابق إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث منفرج الزاوية.

مثال

٥ مثلث ل م ن فيه م = ٦٨,٤سم ، ق($\angle م$) = ١٠٠° ، ق($\angle ن$) = ٤٠° أوجد:

أ ل ب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

جـ مساحة سطح المثلث ل م ن

نفس الخطوات السابق تطبيقها فى حل المثلث الحاد الزوايا، ولمزيد من التدريب اطلب إليهم حل مثال ٥ الذى يربط بين طول الضلع ونصف قطر الدائرة ومساحة المثلث.

التقييم المستمر :

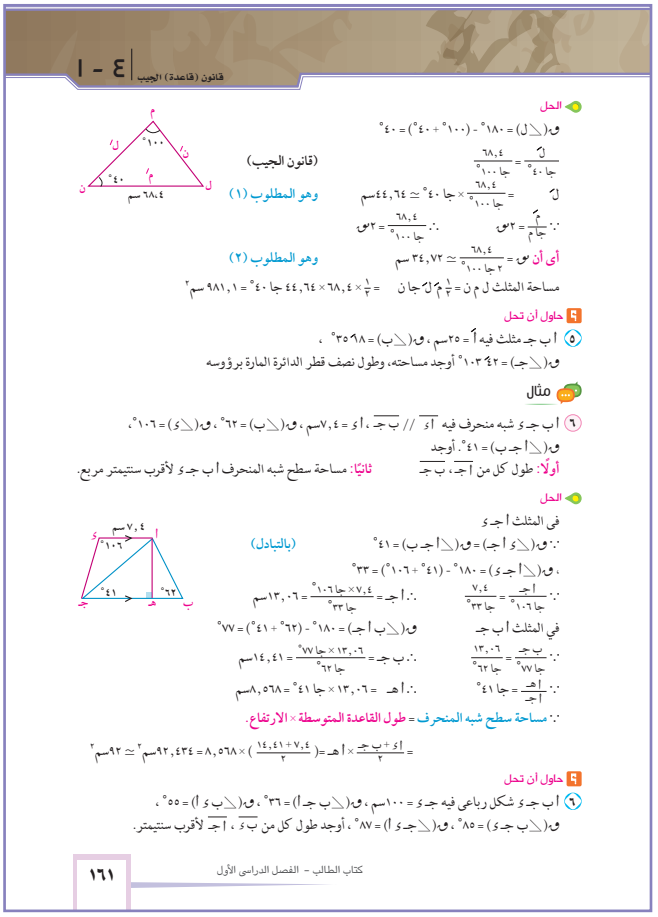
٣ أ $\angle ا$ منفرجة ، $ا > ب$ بالتالى لايوجد حل للمثلث.

ب $\angle هـ$ حادة ، $هـ < و$ يوجد حل وحيد والحل هو.

ق($\angle و$) = ١٨,٥٨٢°، ق($\angle ء$) = ١٢٦,٤٢°، ء $\simeq ١٢,٦$سم

$\angle م$ حادة، $م < ن$ فإن ع = ٢٦ جا ٥٢° $\simeq ٢٠,٥$سم أى أن ع $< م < ن$ لذلك يوجد للمثلث حلان.

PDF Compressor Pro



الحل

و(∠ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

(قانون الجيب)

$\frac{ل}{جا ٤٠°} = \frac{٦٨,٤}{جا ١٠٠°}$

ل = $\frac{٦٨,٤}{جا ١٠٠°}$ × جا ٤٠° ≃ ٤٤,٦٤ سم وهو المطلوب (١)

∵ $\frac{م}{جا م} = \frac{٦٨,٤}{جا ١٠٠°}$ ∴ م = ٣٤,٧٢ سم

أى أن ق = $\frac{٦٨,٤}{٢ جا ١٠٠°}$ ≃ ٣٤,٧٢ سم وهو المطلوب (٢)

مساحة المثلث ل م ن = $\frac{١}{٢}$ ل م × ل ن جا ن = $\frac{١}{٢}$ × ٦٨,٤ × ٤٤,٦٤ جا ٤٠° = ٩٨١,١ سم٢

حاول أن تحل

٥ أ ب جـ مثلث فيه أ = ٢٥ سم ، و(∠ب) = ٣٥°١٨ ،

و(∠جـ) = ١٠٣°٤٢ أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

مثال

٦ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ ، أء = ٧,٤ سم ، و(∠ب) = ٦٢° ، و(∠ء) = ١٠٦°،

و(∠أ جـ ب) = ٤١°. أوجد

أولًا: طول كل من أجـ ، ب جـ ثانيًا: مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

في المثلث أ جـ ء

∵ و(∠ء أ جـ) = و(∠أ جـ ب) = ٤١° (بالتبادل)

و(∠أ جـ ء) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{٧,٤}{جا ٣٣°} = \frac{أجـ}{جا ١٠٦°}$ ∴ أ جـ = $\frac{٧,٤ \times جا ١٠٦°}{جا ٣٣°}$ = ١٣,٠٦ سم

في المثلث أ ب جـ و(∠ب أ جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ $\frac{ب جـ}{جا ٧٧°} = \frac{١٣,٠٦}{جا ٦٢°}$ ∴ ب جـ = $\frac{١٣,٠٦ \times جا ٧٧°}{جا ٦٢°}$ = ١٤,٤١ سم

∵ $\frac{أهـ}{أجـ} = جا ٤١°$ ∴ أهـ = ١٣,٠٦ × جا ٤١° = ٨,٥٦٨ سم

∵ مساحة سطح شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

= $\frac{أء + ب جـ}{٢} \times أهـ = (\frac{٧,٤ + ١٤,٤١}{٢}) \times ٨,٥٦٨ = ٩٢,٤٣٤$ سم٢ ≃ ٩٢ سم٢

حاول أن تحل

٦ أ ب جـ ء شكل رباعي فيه جـ ء = ١٠٠ سم ، و(∠ب جـ أ) = ٣٦° ، و(∠ب ء أ) = ٥٥°،

و(∠ب جـ ء) = ٨٥° ، و(∠جـ ء أ) = ٨٧° ، أوجد طول كل من ب ء ، أجـ لأقرب سنتيمتر.

مثال إضافى للطلاب المتفوقين:

- يمكنك تكليف الطلاب المتفوقين بالمثال التالى، والذى يربط بين مساحة سطح المثلث ونصف قطر الدائرة الخارجة عنه.
- في أى مثلث أ ب جـ أثبت أن مساحة سطحه تساوى ٢ نق٢ جا أ جا ب جا جـ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ.

الحل:

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق ∴ أ = ٢ نق جا أ ، ب = ٢ نق جا ب

∵ مساحة سطح المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا أ × ٢ نق جا ب × جا جـ = ٢ نق٢ جا أ جا ب جا جـ

لتقييم المستمر :

حاول ان تحل

٥ و(∠أ) = ٤١°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق

∴ $\frac{٢٥}{جا ٤١°} = \frac{ب}{جا ١٨°٣٥}$ = ٢ نق

ومنها : ب ≃ ٢٢ سم ، نق ≃ ١٩ سم ،

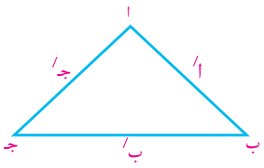
م (△أ ب جـ) ≃ ٢٦٧ سم٢

٦ ب ء = ١١٢ سم ، أ جـ = ١٤٤ سم

لمزيد من التوضيح والتأكيد من تحقق مخرجات التعلم يمكنك أن تطلب من الطلاب محاولة صياغة مشكلات تحاكى التمارين الموضحة فى " حاول أن تحل" ص ١٦١ ومحاولة إيجاد الحل وتهدف هذه الخطوة إلى تشجيع الطلاب وزيادة دافعيتهم على التعلم من خلال تحدى قدرتهم على صياغة مشكلة وحلها.

الاخطاء المتوقعة :

فيما يلى عدد من الأخطاء التى يمكن أن يعاني منها الطلاب فى التطبيق على قانون (قاعدة) الجيب



- التعبير عن أضلاع المثلث بشكل خاطئ بأن يرمز للضلع بالرمز الخطأ ، كما هو موضح بالشكل مما ينتج عنه الخطأ فى استخدام القانون.
- التعويض الخطأ عن المعلومات المعطاة فى قانون (قاعدة) الجيب.

استخدام الآلة الحاسبة بشكل غير صحيح.

- الخلط بين حالات حل المثلث وعدم التحديد الدقيق لعدد الحالات.

PDF Compressor Pro

التدريب والتقييم :

حل بعض التمارين على قاعدة الجيب (تمارين الدرس الأول)

(٢) أ : ب : جـ = ٦ : ٤ : ٣

(٣) ٢٠ سم (٤) ١١,٣سم

(٥) ٤ (٦) أ (٧) أ

(٨) أ (٩) ى (١٠) جـ

(١١) ى

(١٢) أ ق(∠جـ) = ٧٥°، جـ ≃ ٥,١سم، أ ≃ ٤,٥سم،

ب ق(∠أ) = ١٤٣,٤٩°، أ ≃ ٢٧,٥٨سم

جـ ق(∠جـ) = ٤٥,٧٤°، ق(∠ب) = ٣٤,٢٦°،

ب ≃ ١٢,٥٨سم.

(١٣) أ ق(∠ب) = ٣٧,١٤°، ق(∠جـ) = ٣٧,٨٦°،

جـ ≃ ٥,١سم

ب ليس للمثلث حل.

جـ يوجد حلان لأن ع < أ ب

د ق(∠أ) = ٤٨,٥°، ق(∠ب) = ١٥,٥°، ب ≃ ٣,٦سم

(١٤) أ جـ = ١١٠°، أ = ١٢,٩، جـ ≃ ١٨,٨سم.

ب ب = ٦٣,٧، جـ = ٦٧,٣، جـ ≃ ٣٩,١سم

جـ جـ = ٥١,٠٨°، أ = ٩٥,٩٢°، أ = ١٢,٧٨سم للمسألة

حلان أ = ٤٨,٥°، ب = ١٥,٥°، ب ≃ ٣,٥٧سم

(١٥) أ ب = ٢٠,٠٥°، جـ = ١٢٧,٩٥°، جـ = ٢٥,٣سم

ب ب = ٦٣,٦٧°، جـ = ٦٧,٣٣°، جـ ≃ ٣٩,١٢°سم للمسألة

حلان.

جـ جـ = ٧٠°، أ = ٤٠°، أ = ٩,٦سم

د أ = ٢٩,٧١°، ب = ٤٧,٢٩°، أ = ٣١ سم

(١٧) طولى القطرين ٢٣,٧٢سم، ٢٨,٢٧سم

(١٨) ب ≃ ٧,٣٠٩ سم، باستخدام مساحة (△ أ ب جـ)

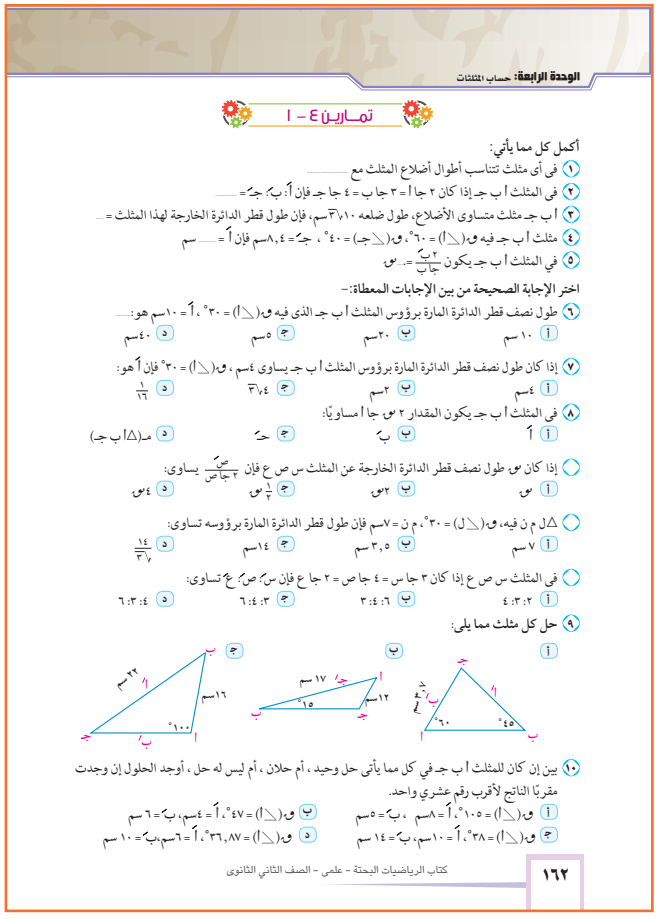
$\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ × حا أ = $\frac{1}{2}$ × أ ب × ع

أى أن ع = أ جـ حا أ = ٧,٣٠٩ × حا ٢٠ ′ ٤١°

تكون ع = ٧,٨٢٧سم.

(١٩) أ جـ ≃ ١٤,٦١سم، ب جـ = ١٦,٥٩سم

(٢٠) ب ى ≃ ١١١٨م، أ جـ ≃ ١٤٣٨ م



(٢٣) $\frac{أ}{حا ٦٠} = \frac{ب}{حا ٤٥}$ ومنها ٢ أ = ب وبالتعويض فى العلاقة :

أ + ب = ٦√ + ٢ يكون : أ = ٦√ سم ، ب = ٢سم

(٢٤) $\frac{أ}{حا ٤٢} = \frac{ب}{حا ٤٨ ′ ٧٤°} = \frac{جـ}{حا ٦٣,٢°} = ٢٠$ ومنها :

أ ≃ ١٣,٣٨سم ، ب ≃ ١٩,٣سم ، جـ ≃ ١٧,٨٥سم

(٢٥) ب ≃ ١٨ سم ، نق ≃ ١٦,٥٦سم

(٢٦) أ ≃ ١٩٣,١١ كم ، ب ≃ ٦٩,٤٤ كم

(٢٧) حتى يكون للمثلث أ ب جـ حل وحيد يجب أن تكون

ب = ع = ٤٢ حا ٥٨

أى أن ب = ٣٥,٦٢سم ويكون المثلث فى هذه الحالة قائم الزاوية فى أ.

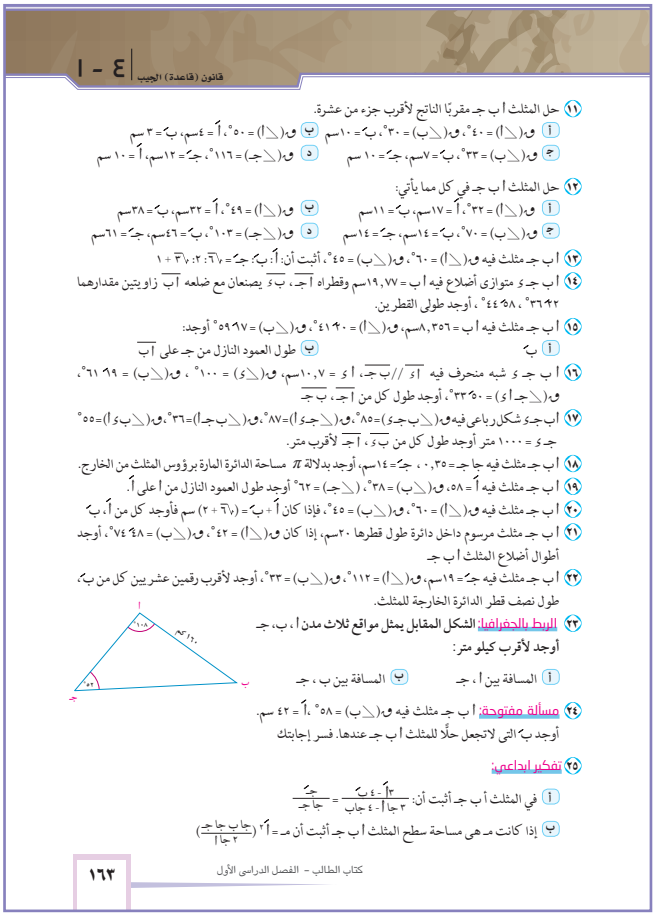
عندما يكون للمثلث حلين يجب أن يكون : ع > ب > أ

أى أن ٣٥,٦٢ > ب > ٤٢ أى : ب ∋]٣٥,٦٢، ٤٢[.

(٢٨) أ فى △ أ ب جـ : $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ}$

$\therefore \frac{أ^3}{٣ حا أ} = \frac{-٤ ب}{-٤ حا ب} = \frac{جـ}{حا جـ}$

PDF Compressor Pro



(١١) حل المثلث أ ب جـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.
(أ) ق(∠أ) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٣٠°، بَ = ١٠سم (ب) ق(∠أ) = ٥٠°، أَ = ٤سم، بَ = ٣ سم
(جـ) ق(∠ب) = ٣٣°، بَ = ٧سم، جَ = ١٠ سم (د) ق(∠جـ) = ١١٦°، جَ = ١٢سم، أَ = ١٠ سم

(١٢) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يأتي:
(أ) ق(∠أ) = ٣٢°، أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم (ب) ق(∠أ) = ٤٩°، أَ = ٣٢سم، بَ = ٣٨سم
(جـ) ق(∠ب) = ٧٠°، بَ = ١٤سم، جَ = ١٤سم (د) ق(∠جـ) = ١٠٣°، بَ = ٤٦سم، جَ = ٦١سم

(١٣) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: أَ : بَ : جَ = √٦ : ٢ : √٣ + ١

(١٤) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم وقطراه $\overline{أجـ}$، $\overline{بـ د}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{أب}$ زاويتين مقدارهما ٣٦°٩٢، ٤٤°٥٨، أوجد طولى القطرين.

(١٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨,٣٥٦سم، ق(∠أ) = ٤١°٢٠، ق(∠ب) = ٥٩°٩٧ أوجد:
(أ) بَ (ب) طول العمود النازل من جـ على $\overline{أب}$

(١٦) أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أد}$ // $\overline{بـ جـ}$، أ د = ١٠,٧سم، ق(∠د) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ٦١°٩٩، ق(∠جـ أ د) = ٣٣°٢٥، أوجد طول كل من $\overline{أجـ}$، $\overline{بـ جـ}$

(١٧) أ ب جـ د شكل رباعي فيه ق(∠ب جـ د) = ٨٥°، ق(∠جـ د أ) = ٨٧°، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ب د أ) = ٥٥°
جـ د = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من $\overline{بـ د}$، $\overline{أجـ}$ لأقرب متر.

(١٨) أ ب جـ مثلث فيه جا جـ = ٠,٣٥ ، جَ = ١٤سم، أوجد بدلالة π مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

(١٩) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨، ق(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من أ على أَ.

(٢٠) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان أَ + بَ = (√٦ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بَ

(٢١) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان ق(∠أ) = ٤٢°، ق(∠ب) = ٧٤°٤٨، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ

(٢٢) أ ب جـ مثلث فيه جَ = ١٩سم، ق(∠أ) = ١١٢°، ق(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

(٢٣) الربط بالجغرافيا: الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، جـ
أوجد لأقرب كيلو متر:
(أ) المسافة بين أ، جـ (ب) المسافة بين ب، جـ

(٢٤) مسألة مفتوحة: أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٥٨° ، أَ = ٤٢ سم.
أوجد بَ التى لاتجعل حلًا للمثلث أ ب جـ عندها. فسر إجابتك

(٢٥) تفكير ابداعي:
(أ) في المثلث أ ب جـ أثبت أن: $\frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{٣ جا أ - ٤ جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$
(ب) إذا كانت م هى مساحة سطح المثلث أ ب جـ أثبت أن م = أ^2 (جا ب جا جـ / ٢ جا أ)

وبتطبيق خواص التناسب يكون:

$$\frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{٣ جا أ - ٤ جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$$

(ب) ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ك

∴ بَ = ك جا ب ، جَ = ك جا جـ ،

ك = $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ وبتربيع الطرفين ∴ ك^2 = $\frac{\text{أ}^2}{\text{جا}^2\text{أ}}$

∵ م (△ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ب جَ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ك جا ب × ك جا جـ × جا أ

= $\frac{1}{2}$ ك^2 جا أ جا ب جا جـ

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{\text{أ}^2}{\text{جا}^2\text{أ}}$ × جا أ جا ب جا جـ

= أ^2 ($\frac{\text{جا ب جا جـ}}{\text{٢ جا أ}}$)

في نهاية استعراض إجابات تمارين الدرس الأول ، يحدد الإشارة إلى أنه ليس من الضرورى أن يجيب جميع الطلاب عن جميع التمارين و إنما عليك عزيزنا المعلم مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب (ضعيف - متوسط - متفوق) فى التكليفات التى تكلفهم بها كواجب منزلى.

تمارين إضافية:

(١) أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٩١ سم مرسوم داخل دائرة م طول نصف قطرها ١٠٠سم. أوجد :
(أ) طول $\overline{بـ جـ}$ (ب) مساحة سطح△ أ ب جـ
[**الإجابة** : ١٦٢,٠٦سم ، ٣٣٥٥سم٢]

(٢) أوجد طول أكبر ضلع في المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٢٥ ٤٢ ، ق(∠ب) = ١١٨ ٤٨ ، أ ب = ٢٠ متر
[**الإجابة** : ٣٠ مترًا]

(٣) منارتان أ ، ب المسافة بينهما ٢٠ كم على خط واحد من الشمال إلى الجنوب ، إذا كان قائد سفينة فى الموقع جـ بحيث ق(∠أ جـ ب) = ٣٣° ، وعامل راديو في الموقع ب بحيث ق(∠أ ب جـ) = ٥٢°. أوجد المسافة بين قائد السفينة وعامل الراديو.
[**الإجابة** ٣٦,٥٨كم]

(٤) **برهنة النظرية** : فى أى مثلث س ص ع أثبت أن مساحته $\frac{\text{س ص ع}}{\text{٤ نق}}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع.

PDF Compressor Pro

٤ - ٢ قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine rule

خلفية

درس الطالب قانون (قاعدة) الجيب وأمكنه حل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع، وأيضًا حل تطبيقات هندسية وحياتية باستخدام هذا القانون، والآن سوف يتعلم قانون (قاعدة) جيب التمام حيث يمكنه حل المثلث إذا عُلِمَ منه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما أو أطوال أضلاعه الثلاثة وأيضًا حل تطبيقات هندسية وحياتية باستخدام هذا القانون.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث.
- يحل مشكلات رياضية وحياتية بعد نمذجتها باستخدام قانون (قاعدة) جيب التمام.

مفردات أساسية

- قانون (قاعدة) جيب التمام – زاوية حادة – زاوية منفرجة – زاوية قائمة – حل المثلث.

وسائل ومصادر التعلم

- السبورة التعليمية – طباشير ملون – جهاز عرض بيانات *Data Show*. – آلة حاسبة علمية.
- الكتاب المدرسى من صفحة ١٤٨ إلى صفحة ١٥٨ الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

زمن الدرس والمكان

المكان: الفصل الدراسى.

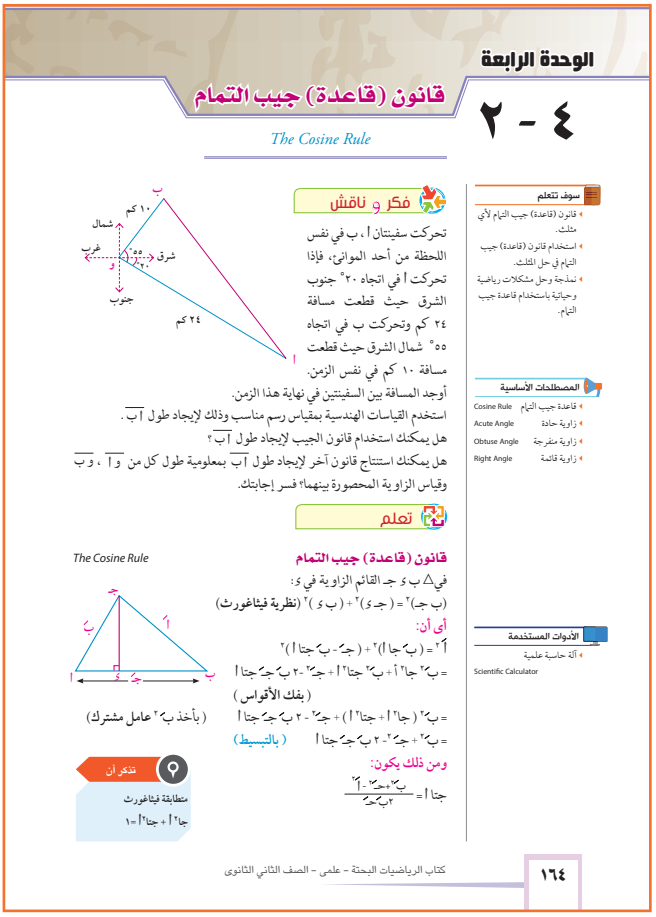
زمن الدرس: ٦ حصص.

اجراءات الدرس

التهيئة

فكر وناقش

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش» صفحة (١٦٤) من كتاب الطالب ويهدف إلى تأكيد الحاجة إلى قانون



(قاعدة) يمكن استخدامه لحل المثلث، إذا عرفنا من المثلث طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

- تابع إجابات طلابك عن الأسئلة المطروحة مؤكدًا على ما سبق.
- وضح لطلابك أنه يمكن استخدام برنامج (geogebra)فى رسم المثلث بمقياس رسم مناسب، ومن ثم يمكن إيجاد طول أب بالسنتيمترات ثم إيجاد الطول الحقيقي من العلاقة :
الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

تعلم ذاتى

- وضح للطلاب خطوات استنتاج قانون (قاعدة) جيب التمام الموضحة فى ص ١٦٤ على المثلث الحاد الزاوية، وبعد التأكد من استيعاب الطلاب لتلك الخطوات وضح لهم الخطوات التالية لإثبات نفس القانون فى المثلث المنفرج الزاوية.

تعلم

إذا كانت ∠ أ منفرجة فإن :

(ب جـ)² = (جـ د)² + (ب د)²

أ'² = [ب' حا (١٨٠° - أ)]² + [جـ' + ب' حتا (١٨٠° - أ)]

PDF Compressor Pro

= (ب′ حا ا)٢ + (حـ′ - ب′ حتا ا)٢

= ب′٢ حا٢ ا + حـ′٢ + ب′٢ حتا٢ ا - ٢ ب′ حـ′ حتا ا

= ب′٢ (حا٢ ا + حتا٢ ا) + حـ′٢ - ٢ ب′ حـ′ حتا ا

= ب′٢ + حـ′٢ - ٢ ب′ حـ′ حتا ا

تفكير ناقد

القانون السابق يصلح في حالة المثلث القائم الزاوية حيث:

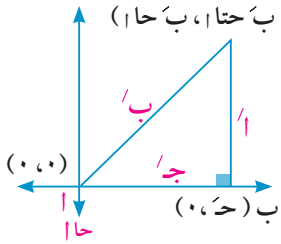
أ′٢ = ب′٢ + حـ٢ - ٢ ب′ جـ′ حتا ٩٠° = ب′٢ + جـ′٢

في حالة وجود صعوبة لدى الطلاب فى إثبات تلك القاعدة فى المثلث القائم الزاوية اطلب منهم تحديد قيمة حتا ٩٠

كذلك يمكن إثبات قاعدة جيب التمام في الوضع التالي:

باعتبار النقطة أ نقطة الأصل لمستوى إحداثى متعامد، محوراه $\overleftrightarrow{أ ب}$ (محور السينات) والعمود عليه (محورًا للصادات) فيكون رؤوس المثلث أ ب جـ هى النقط:

أ (٠، ٠)، ب (جـ′، ٠)، جـ (ب′حتا أ، ب′ حا أ)



من قانون البعد بين نقطتين

(ب جـ)٢ = (ب′ حتا ا - جـ′)٢ + (ب′حا ا - ٠)٢

= ب′٢ حتا٢ ا - ٢ ب′ جـ′ حتا ا + جـ′٢ + ب′٢ حا٢ ا

= ب′٢ (حا٢ ا + حتا٢ ا) + جـ′٢ - ٢ ب′ جـ′ حتا ا

∴ أ٢ = ب′٢ + جـ′٢ - ٢ ب′ جـ′ حتا ا

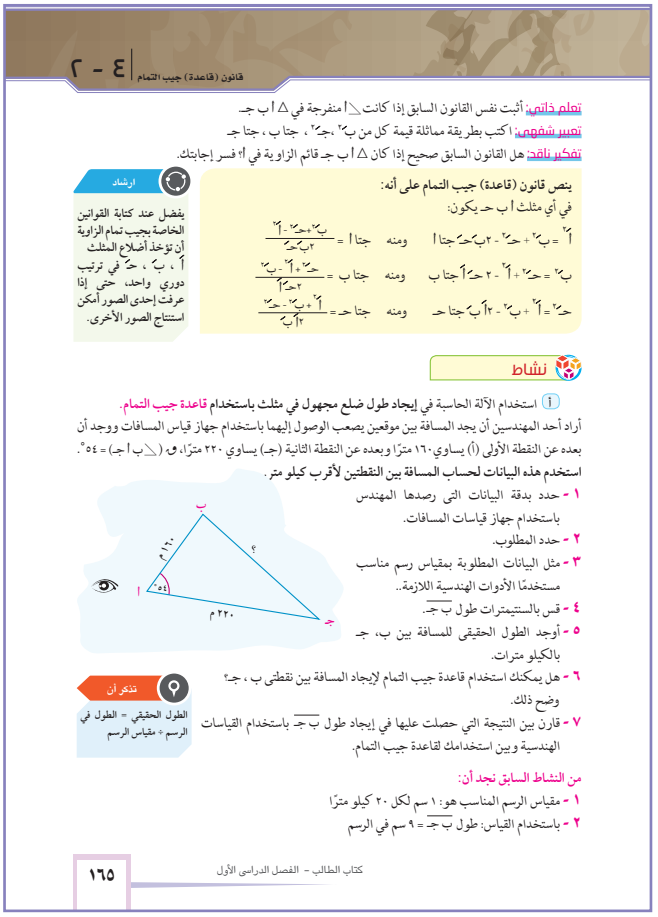
، حتا ا = $\frac{ب′٢ + جـ′٢ - أ′٢}{٢ ب′ جـ′}$

وجه طلابك أنه يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ′ ب′ جـ′ فى ترتيب دورى واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

نشاط: اداء عملى

أكد لطلابك أنه يمكن استخدام قوانين جيب التمام لإيجاد:

أ طول الضلع الثالث فى مثلث إذا عُلِمَ طولا الضلعين الآخرين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.



تعلم ذاتي: أثبت نفس القانون السابق إذا كانت ∠ا منفرجة في △ أ ب جـ

تعبير شفهي: اكتب بطريقة مماثلة قيمة كل من ب′٢ ، جـ′٢ ، جتا ب ، جتا جـ

تفكير ناقد: هل القانون السابق صحيح إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب جـ يكون:

أ′٢ = ب′٢ + جـ′٢ - ٢ ب′ جـ′ جتا ا ومنه جتا ا = $\frac{ب′٢ + جـ′٢ - أ′٢}{٢ ب′ جـ′}$

ب′٢ = جـ′٢ + أ′٢ - ٢ جـ′ أ′ جتا ب ومنه جتا ب = $\frac{جـ′٢ + أ′٢ - ب′٢}{٢ جـ′ أ′}$

جـ′٢ = أ′٢ + ب′٢ - ٢ أ′ ب′ جتا جـ ومنه جتا جـ = $\frac{أ′٢ + ب′٢ - جـ′٢}{٢ أ′ ب′}$

الإرشاد

يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ′ ، ب′ ، جـ′ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

نشاط

أ استخدام الآلة الحاسبة في **إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.**

أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ مترًا وبعده عن النقطة الثانية (جـ) يساوي ٢٢٠ مترًا، وق(∠ب ا جـ) = ٥٤°.

استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر.

١ - حدد بدقة البيانات التى رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.

٢ - حدد المطلوب.

٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..

٤ - قس بالسنتيمترات طول ب جـ.

٥ - أوجد الطول الحقيقى للمسافة بين ب، جـ بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتى ب ، جـ؟ وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول ب جـ باستخدام القياسات الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

تذكر أن

الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

من النشاط السابق نجد أن:

١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا

٢ - باستخدام القياس: طول ب جـ = ٩ سم في الرسم

٣ - طول ب جـ الحقيقي ≃ ٩ × ٢٠ ≃ ١٨٠ كم

٤ - قاعدة جيب التمام هي: أ′٢ = ب′٢ + حـ′٢ - ٢ ب′ حـ′ جتا ا

بالتعويض: أ′٢ = (١٦٠)٢ + (٢٢٠)٢ - ٢ × ١٦٠ × ٢٢٠ جتا ٥٤° ≃ ٣٢٦١٩,٩

فتكون: أ ≃ ١٨٠,٦ كم.

٥ - النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٦ - استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد الناتج:



ابدأ

1 6 0 x² + 2 2 0 x² − 2 × 1 6 0 × Cos 5 4) = √ =

تطبيق على النشاط: أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين في △ أ ب جـ الذي فيه:

أ أ = ٤,٣٦ سم ، ب′ = ٣,٨٤ سم ، ق(∠ جـ) = ١٠١°

ب ب′ = ٢ سم ، حـ′ = ٥ سم ، ق(∠ا) = ٦٠°

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

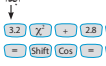
أ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ٤,٦ ، ب′ = ٣,٢ ، حـ′ = ٢,٨

الحل

∵ أكبر زاوية فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا ∴ ∠ا أكبر زوايا المثلث قياسًا

جتا ا = $\frac{ب′٢ + حـ′٢ - أ′٢}{٢ ب′ حـ′}$ = $\frac{(٣,٢)٢ + (٢,٨)٢ - (٤,٦)٢}{٢ × ٣,٢ × ٢,٨}$

باستخدام الآلة الحاسبة



ابدأ

(2.8 x²) × 3.2 x² + 2.8 x² − 4.6 x² = ÷ (2 × 3.2) = Shift Cos = ...

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية ا منفرجة

∴ ق(∠ ا) = ٩٩°٥٣٤٩

حاول أن تحل

أ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ١١ سم ، ب′ = ١٠ سم ، حـ′ = ٨ سم

PDF Compressor Pro

ب قياسات الزوايا الثلاث فى المثلث إذا علم أطوال أضلاعه، والأمثلة المعروضة بكتاب الطالب توضح ذلك.

جـ أكد لطلابك على أنه عند إيجاد قياس زاوية فى مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من قانون الجيب وذلك لأنه:

د فى حالة استخدام قانون الجيب فإن جيب الزاوية الحادة والمنفرجة دائمًا موجب.

هـ فى حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.

استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية:

١- طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، وذلك كما يوضحها مثال (٢) من كتاب الطالب.

٢- أطوال أضلاعه الثلاثة علمًا بأن مجموع طولى أى ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث، وذلك كما يوضحها مثال (٣) من كتاب الطالب.

كما يقدم لنا قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتى سبق دراستها فى قانون الجيب والتى بالرجوع إليها نجد أنه بمعلومية طولى ضلعين وزاوية يوجدعدد من المثلثات صفر أو واحد أو اثنان من المثلثات الممكنة مع هذه المعطيات ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة، ويوضح ذلك مثال (٤) من كتاب الطالب.

⌑ ساعد الطلاب فى تحديد القانون الذى سيتم استخدامه وكذلك توضيح العلاقة بين عدد الحلول من خلال القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

تفكير منطقى

⌑ اطلب من الطلاب استخدام قانون الجيب فى أحد الأمثلة الموضحة ص١٦٧ أو ص١٦٨ لإيجاد أحد الزوايا أو أطوال أحد الأضلاع؛ ليكتشفوا صعوبة ذلك ومساعدتهم على تمييز الحالات التى يمكن فيها استخدام قانون الجيب أو جيب التمام ولمزيد من التدريبات يمكنك استخدام الأمثلة الإضافية التالية:



قانون (قاعدة) جيب التمام | ٤ - ٢

استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

مثال

(٢) حل المثلث ا ب جـ الذي فيه أ = ١١سم ، ب = ٥سم ، ق(∠ حـ) = ٢٠°

الحل

يجب إيجاد حـ ، ق(∠ ا) ، ق(∠ ب)

∵ حـ٢ = أ٢ + ب٢ - ٢ أ ب جتا حـ (قانون جيب التمام)

= (١١)٢ + (٥)٢ - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠°

حـ = $\sqrt{(11)^2 + (5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \text{ جتا } 20°}$ ≈ ٦,٥٢٩ سم

جتا ا = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ = $\frac{(5)^2 + (6,529)^2 - (11)^2}{(6,529)\ 2}$ ≈ - ٠,٨١٧

ق(∠ ا) = ١٤٤° ٩٤′

ق(∠ ب) = ١٨٠° - [ق(∠ ا) + ق(∠ حـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°] = ١٥,٢١٤°

لاحظ أن:

في المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:
- فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:
- إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- وإذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.
- يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.

ارشاد

يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب ق(∠ ا) ، ق(∠ ب) بعد إيجاد حـ، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

حاول أن تحل

(٢) حل المثلث ا ب جـ الذي فيه أ = ٢٤,٦سم ، حـ = ١٤,٢سم،
ق(∠ ب) = ٤٢° ١٨′

١٦٧ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

أمثلة إضافية:

(١) حل المثلث ا ب جـ الذى فيه أ′ = ٢٠,٨سم، ب′ = ٣٢,٦سم، ق(∠ جـ′) = ٤٠° ٢٨′

الحل: ∵ جـ′٢ = أ′٢ + ب′٢ - ٢ أ′ ب′ حتا جـ′

∴ جـ′٢ = (٢٠,٨)٢ + (٣٢,٦)٢ - ٢ × ٢٠,٨ × ٣٢,٦ × حتا ٤٠° ٢٨′

∴ جـ′ ≈ ٢١,٥سم

∵ أ′ < ب′

∴ ∠ ا حادة.

∵ $\frac{أ'}{حا ا'} = \frac{جـ'}{حا جـ'}$

∴ $\frac{20,8}{حا ا'} = \frac{21,5}{حا 28' 40°}$

∴ حا ا′ = $\frac{20,8 \times حا 28' 40°}{21,5}$ ≈ ٠,٦٢٧٩

∴ ق(∠ ا′) = ٣٨° ٥٤′

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° - (٤٠° ٢٨′ + ٣٨° ٥٤′) = ١٠٠° ٣٨′

PDF Compressor Pro



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

(٢) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ٩سم، ب = ٧سم، حـ = ٥سم.

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ، ب، حـ

∵ جتا أ = $\frac{ب^{2}+حـ^{2}-أ^{2}}{2ب حـ}$ = $\frac{٧^{2}+٥^{2}-٩^{2}}{2\times٧\times٥}$ = -٠,١

و(∠أ) ≈ ٩٥° ٤٩' ٤١"

جتا ب = $\frac{حـ^{2}+أ^{2}-ب^{2}}{2حـأ}$ = $\frac{٥^{2}+٩^{2}-٧^{2}}{2\times٩\times٥}$ ≈ ٠,٦٣٣

و(∠ب) ≈ ٥٠° ٤٣' ٩"

و(∠حـ) = ١٨٠° - [و(∠أ) + و(∠ب)] = ٣٤° ٣٣' ٢٦"

حاول أن تحل

(٢) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ١٢,٢سم، ب = ١٨,٤سم، حـ = ٢١,١سم

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

مثال حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

تذكر أن جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أ = ٦سم، ب = ٧سم، و(∠أ) = ٣٠°

الحل

المطلوب إيجاد حـ، و(∠ب)، و(∠حـ)

∵ أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ب حـ جتا أ (قانون جيب التمام)

٦^٢ = ٧^٢ + حـ^٢ - ٢ × ٧ حـ جتا ٣٠°

٠ = حـ^٢ - ٧√٣ حـ + ١٣ أي حـ^٢ - ٧√٣ حـ + ١٣ = ٠

∴ حـ = $\frac{1}{2}$(٧√٣ ± √(-٧√٣)^٢ - ٤ × ١ × ١٣) (القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

∴ حـ = ١٠,٩٣٥ أو ١,١٨٨

كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد جتا ب فإنه:

جتا ب = $\frac{حـ^{2}+أ^{2}-ب^{2}}{2حـأ}$

كتاب الرياضيات البحتة - علمي - الصف الثاني الثاني

١٦٨

وضح لطلابك أنه يمكنهم استخدام قانونى الجيب وجيب التمام لحل مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياس أى عنصرين آخرين من عناصر المثلث، وإذا كان للمثلث حل، فيجب تقرير ما إذا كنا سنبدأ باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام لحله، ثم اعرض عليهم الجدول التالى مستخدمًا جهاز عرض البيانات Data Show:

حل المثلثات غير قائمة الزاوية	
إذا أعطيت	نبدأ الحل باستخدام
قياسى زاويتين وطول أى ضلع	قانون الجيب
طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيب التمام
طولى ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحداهما	قانون الجيب أو قانون جيب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيب التمام

التقييم المستمر:

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بنود «حاول أن تحل» على حل المثلث.

إجابات حاول أن تحل:

(٢) ب ≈ ١٧,٠٣سم، و(∠أ) ≈ ١٠٣° ٣٤' ،

و(∠جـ) ≈ ٣٤° ٨'

(٣) و(∠أ) ≈ ٣٥° ٩' ، و(∠ب) ≈ ٦٠° ١٥'

و(∠جـ) ≈ ٨٤° ٣٦'

(٤) المطلوب إيجاد جـ، و(∠ب)، و(∠جـ)

∵ أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ - ٢ ب جـ جتا أ

∴ (٨,٦)^٢ = (١١,١)^٢ + جـ^٢ - ٢ × ١١,١ × جـ جتا ١٣°

∴ جـ^٢ - ٢١,٤٤ جـ + ٤٩,٢٥ = ٠

∴ جـ = $\frac{٢١,٤٤ \pm \sqrt{(-٢١,٤٤)^{2}-٤\times١\times٤٩,٢٥}}{2}$

جـ = $\frac{٢١,٤٤ \pm ١٦,٢١}{2}$

∵ جـ ≈ ١٨,٨٢سم أو جـ ≈ ٢,٦٢سم

كل قيمة موجبة لـ جـ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان. عندما: جـ ≈ ١٨,٨٢سم

يكون جتا ب$_{١}$ = $\frac{(١١,١)^{2}-(٨,٦)^{2}+(١٨,٨٢)^{2}}{2\times١٨,٨٢\times٨,٦}$ ≈ ٠,٩٤٢

و(∠ب) ≈ ١٩° ٣٦' ١٠" **ويكون:**

و(∠جـ) = ١٨٠° - [١٩° ٣٦' ١٠" + ١٣°]

≈ ١٤٧° ٢٣' ٥٠"

عندما: جـ ≈ ٢,٦٢سم

يكون: جتا ب = $\frac{(١١,١)^{2}-(٨,٦)^{2}+(٢,٦٢)^{2}}{2\times٨,٦\times٢,٦٢}$ ≈ -٠,٩٤١

∴ و(∠ب) = ١٦٠° ٨' ٤٨" **ويكون:**

و(∠جـ) = ١٨٠° - [١٦٠° ٨' ٤٨" + ١٣°]

≈ ٦° ٥١' ١٢"

أى أنه فى أحد المثلثين يكون

جـ ≈ ١٨,٨٢سم، و(∠ب) = ١٩° ٣٦' ١٠"

، و(∠جـ) = ١٤٧° ٢٣' ٥٠"

فى المثلث الآخر يكون

جـ ≈ ٢,٦٢سم، و(∠ب) = ١٦٠° ٨' ٤٨"

، و(∠جـ) = ٦° ٥١' ١٢"

تفسير (تفكير ناقد)

الفت انتباه الطلاب أن حل المثلث الموضح فى مثال ٤ ص ١٦٨ له حلان، واطلب منهم مقارنة هذا الحل بالمثال

PDF Compressor Pro

رقم ٣ على الدرس الأول الموضح صفحة ١٥٨ حيث كانت المعطيات فى الحالتين طول ضلعين وقياس زاوية.

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام

- ناقش مع طلابك ما ورد من أمثلة على التطبيقات الهندسية مذكرًا إياهم بمساحات المضلعات غير المنتظمة السابق عرضها فى هذا الدليل.
- **لمراعاة الفروق الفردية بين الطلاب ولمساعدة الضعاف** منهم ساعدهم على تذكر عدد من المفاهيم والقوانين السابقة كما يلى:

فى مثال ٥: ذكرهم بمحيط المثلث، وكيفية تحديد أصغر أضلاع المثلث.

فى مثال ٦: اطلب منهم تحديد المثلث الذى سيطبق عليه قانون جيب التمام.

فى مثال٧: راجع معهم حالات الشكل الرباعى الدائرى.

- ذكر طلابك بأن الشكل الرباعى الدائرى هو شكل تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة، وأن الشكل الرباعى يكون دائريًّا إذا:
  - وُجِد فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.
  - كان قياس الزاوية الخارجة عند أى من رؤوسه تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.
  - وجد فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها ومتساويتان في القياس.
  - رؤوسه على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

أمثلة إضافية للمتفوقين:

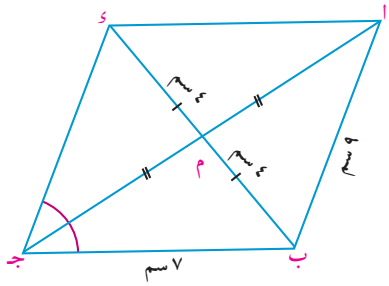
بالنسبة للطلاب المتفوقين يمكن تكليفهم بمزيد من التمارين الإضافية كما هو موضح فى الأمثلة الإضافية التالية:

(٢) ا ب جـ ء متوازى أضلاع، فيه ا ب = ٩سم، ب جـ = ٧سم، ب ء = ٨سم أوجد:

أ) ق(∠ب جـ ء).

ب) مساحة سطح متوازى الأضلاع.

جـ) قياس الزاوية المنفرجة الحادثة من تقاطع القطرين.





قانون (قاعدة) جيب التمام ٤ - ٢

عندما حـ = ١٠,٩٣٥

جتا ب = $\frac{(١٠,٩٣٥)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢ (١٠,٩٣٥) (٦)}$

جتا ب = ٠,٨١٢

ق(∠ب) = ٣٥,٦٨٥°

≃ ٣٥°٤١٬

ق(∠حـ) = ١٨٠° - [ق(∠ا) + ق(∠ب)]

≃ ١١٤,٣١٤°

≃ ١١°٤٩٬٨٥٠

عندما حـ = ١,١٨٨

جتا ب = $\frac{(١,١٨٨)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢ (١,١٨٨) (٦)}$

جتا ب = - ٠,٨١٢

ق(∠ب) = ١٤٤,٣١٤°

≃ ١٤٤°١٨٨٥٠

ق(∠حـ) = ١٨٠° - [ق(∠ا) + ق(∠ب)]

≃ ٥,٦٨٥°

≃ ٥° ٤١٬ ٦

تفسير: في أحد المثلثين حـ = ١٠,٩٤، ق(∠ب) = ٣٥°٤١٬٦ ، ق(∠حـ) = ١٤٤°١٨٨٥٠، وفي المثلث الآخر حـ = ١,١٩، ق(∠ب) = ١٤٤°١٨٨٥٠ ، ق(∠حـ) = ٥°٤١٬٦. قارن هذه النتائج مع النتائج التي حصلنا عليها في المثال رقم (٣) من الدرس الأول (صـ١٥٨) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

حاول أن تحل

حل المثلث ا ب حـ الذي فيه أ = ٨,٦سم، ب = ١١,١سم، ق(∠ا) = ٦٣°

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام Geometric Applications on the Cosine Rule

مثال

ا ب حـ مثلث فيه أ = ٦٣سم، ب - حـ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من ب، حـ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

∵ أ + ب + حـ = ١٤٠ (محيط المثلث)، أ = ٦٣

∴ ب + حـ = ١٤٠ - ٦٣ أي ب + حـ = ٧٧ (١)

∵ ب - حـ = ٢٧ (معطى) (٢)

من (١)، (٢) بالجمع ينتج أن:

٢ ب = ١٠٤ أي أن ب = ٥٢ سم

بالتعويض في ١ ينتج أن حـ = ٢٥سم

ونلاحظ أن حـ هو أصغر أضلاع المثلث ا ب حـ

∴ ∠ حـ هي أصغر زوايا المثلث ا ب حـ

∴ جتا حـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ = $\frac{(٦٣)^٢ + (٥٢)^٢ - (٢٥)^٢}{٥٢ \times ٦٣ \times ٢}$ = ٠,٩٢٣٠٧٦٩

∴ ق(∠حـ) = ٢٢°٤٧٬

الحل

أ) فى المثلث ب جـ ء

حتا جـ = $\frac{ب'^٢ + ء'^٢ - جـ'^٢}{٢ ب ء}$

= $\frac{(٩)^٢ + (٧)^٢ - (٨)^٢}{٢ \times ٩ \times ٧}$ ≈ ٠,٥٢٣٨

∴ ق(∠جـ) ≈ ٥٨° ٢٤٬ ٤٥٬٬

ب) مساحة سطح متوازى الأضلاع ا ب جـ ء

= ٢ مساحة سطح المثلث ب جـ ء

= ٢ ($\frac{١}{٢}$ ب جـ × جـ ء حا ٥٨° ٢٤٬ ٤٥٬٬)

≈ ٥٣,٦٧سم^٢

جـ) فى المثلث ا ب ء

$\overline{اء}$ متوسط

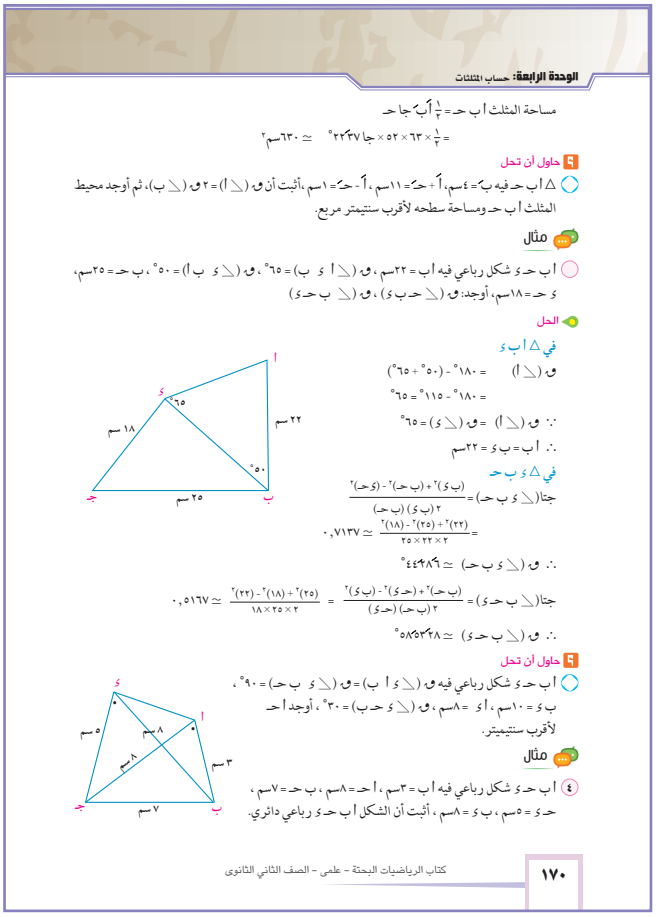
∴ (ا ب)^٢ + (ا ء)^٢ = ٢ (ب م)^٢ + ٢ (ا م)^٢

(نظرية)

∴ ٨١ + ٤٩ = ٢ × ١٦ + ٢ (ا م)^٢

∴ (ا م)^٢ = ٤٩ ∴ ا م = ٧سم

PDF Compressor Pro



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × ا جـ × جا جـ

= $\frac{1}{2}$ × ٦٣ × ٥٢ × جا ٤٢°٣٧′ ≃ ٦٣٠ سم٢

حاول أن تحل

△ ا ب جـ فيه ب جـ = ٤ سم، ا جـ = ١١ سم، أ (△ ا ب جـ) = ٢ أ (△ ا ب)، ثم أوجد محيط المثلث ا ب جـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

ا ب جـ د شكل رباعي فيه ا ب = ٢٢ سم، ق(∠ ا د ب) = ٦٥°، ق(∠ د ا ب) = ٥٠°، ب جـ = ٢٥ سم، د جـ = ١٨ سم، أوجد: ق(∠ جـ ب د)، ق(∠ ب جـ د)

الحل

في △ ا ب د

ق(∠ ا) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)

= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ ق(∠ ا) = ق(∠ د) = ٦٥°

∴ ا ب = ب د = ٢٢ سم

في △ د ب جـ

جتا(∠ ب د جـ) = $\frac{(ب د)^2 + (ب جـ)^2 - (د جـ)^2}{2 (ب د)(ب جـ)}$

= $\frac{(٢٢)^2 + (٢٥)^2 - (١٨)^2}{2 \times ٢٢ \times ٢٥}$ ≃ ٠,٧١٣٧

∴ ق(∠ د ب جـ) ≃ ٤٤°٤٨′٦″

جتا(∠ ب جـ د) = $\frac{(ب جـ)^2 + (د جـ)^2 - (ب د)^2}{2 (ب جـ)(د جـ)}$ = $\frac{(٢٥)^2 + (١٨)^2 - (٢٢)^2}{2 \times ٢٥ \times ١٨}$ ≃ ٠,٥١٦٧

∴ ق(∠ ب جـ د) ≃ ٥٨°٥٣′٤٨″

حاول أن تحل

ا ب جـ د شكل رباعي فيه ق(∠ د ا ب) = ق(∠ د ب جـ) = ٩٠°، ب د = ١٠ سم، ا د = ٨ سم، ق(∠ د جـ ب) = ٣٠°، أوجد ا جـ لأقرب سنتيمتر.

مثال

ا ب جـ د شكل رباعي فيه ا ب = ٣ سم، ا جـ = ٨ سم، ب جـ = ٧ سم، جـ د = ٥ سم، ب د = ٨ سم، أثبت أن الشكل ا ب جـ د رباعي دائري.

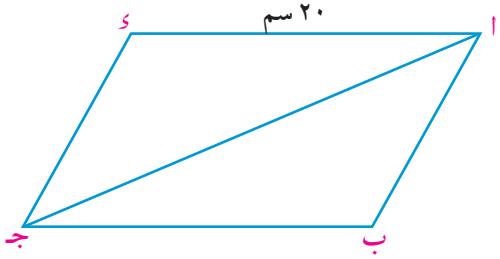
في المثلث ا م ب

حتا ا م ب = $\frac{أ'^2 + ب'^2 - م'^2}{2 أ' ب'}$

≃ $\frac{١٦ + ٤٩ - ٨١}{٢ \times ٤ \times ٧}$ ≃ ٠,٢٨٥٧-

∴ ق(∠ ا م ب) ≃ ١٠٦° ٣٦′ ٣″

(٣) ا ب جـ د متوازى أضلاع فيه ا ب = ٢٠ سم ، ا جـ = ٤٠ سم، حتا ب = $-\frac{1}{4}$ ، أوجد: طول ب جـ ، ثم أثبت أن مساحة سطح متوازى الأضلاع يساوى ١٥٠ $\sqrt{15}$ سم٢



الحل

في المثلث ا ب جـ

(ا جـ)^2 = (ا ب)^2 + (ب جـ)^2 - ٢ ا ب . ب جـ حتا ب

∴ (٤٠)^2 = (٢٠)^2 + (ب جـ)^2 - ٢ × ٢٠ × ب جـ × $(-\frac{1}{4})$

∴ (ب جـ)^2 + ١٠ ب جـ - ١٢٠٠ = ٠

∴ (ب جـ - ٣٠) (ب جـ + ٤٠) = ٠

∴ ب جـ = ٣٠ سم ∵ حتا ب = $-\frac{1}{4}$

∴ حا ب = $\frac{\sqrt{15}}{4}$

∴ مساحة سطح متوازى الأضلاع

= ٢ مساحة المثلث ا ب جـ

= ٢ × $\frac{1}{2}$ ا ب × ب جـ حا ب

= ٢ × $\frac{1}{2}$ × ٢٠ × ٣٠ × $\frac{\sqrt{15}}{4}$ = ١٥٠ $\sqrt{15}$ سم٢

نشاط:

اطلب إلى طلابك الاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) فى عرض مجموعة من التطبيقات الحياتية التى يستخدم فى حلها قانون (قاعدة) جيب التمام.

أمثلة إضافية:

الربط بالرياضة والسياحة

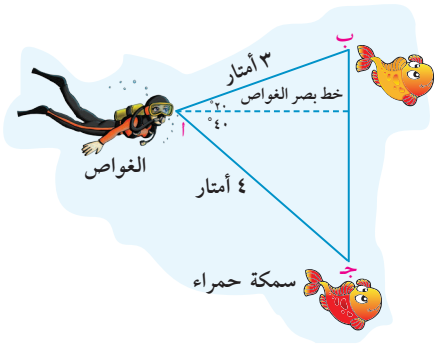
قبل البدء فى عرض التمرين افتح باب المناقشة حول الرياضات المائية والتى منها على سبيل المثال رياضة الغطس وأتح للطلاب الفرصة لعرض نماذج للهوايات المختلفة وذلك بهدف تكوين اتجاه إيجابى نحو الاستمرار فى الدراسة، وبالتالى اتجاه إيجابي نحو الرياضيات.

(٤) يهوى أحد السائحين رياضة الغطس فى مياه البحر الأحمر؛ ليشاهد الأعشاب المرجانية النادرة والأسماك الملونة الرائعة، وفى إحدى مرات الغوص نظر الغواص لأعلى بزاوية قياسها ٢٠° فشاهد سمكة صفراء تبعد عنه ٣ أمتار، وعندما نظر إلى أسفل بزاوية قياسها ٤٠° شاهد سمكة حمراء تبعد عنه مسافة ٤ أمتار، ما المسافة بين السمكة الصفراء والسمكة الحمراء؟

PDF Compressor Pro

الحل

ارسم شكلا تقريبيًّا يمثل المسألة، وذلك كالآتى:



واضح من الرسم أننا نعلم طولى ضلعين فى المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما، لذا يمكننا استخدام قانون جيب التمام وذلك كالآتى:

$أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} - ٢ ب' جـ' \text{ جتا } أ$

$= (٤)^{٢} + (٣)^{٢} - ٢ \times ٤ \times ٣ \text{ جتا } ٦٠° = ١٣$

$\therefore أ' \approx ٣,٦$ متر

أى أن المسافة بين السمكة الصفراء والسمكة الحمراء يساوى ٣,٦ أمتار تقريبًا.

الإخطاء المتوقعة

- قد لايستطيع الطلاب التفرقة بين استخدام قانونى الجيب وجيب التمام؛ لأن ذلك يتطلب فهمًا وإدراكًا للمعطيات وماهو مطلوب ، لذلك اطلب إليهم العمل بدقة وفهم وترو في حل تمارين هذا الدرس.
- قد يستخدم الطلاب التقريب في الخطوات أثناء حل المسألة وليس فى القيم النهائية لذا شجع الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة لإجراء التقريب الذي يمكن تخزينه في ذاكرة الآلة الحاسبة) وذلك للحصول على نتائج دقيقة.
- الإجابة خطأ لعدم تذكر قوانين مساحة أو محيط بعض الأشكال الهندسية.
- تطبيق قانون الجيب أو جيب التمام باستخدام أطوال أضلاع أو زوايا شكل رباعى وليس مثلث.
- الخلط بين أطول واقصر الأضلاع أو أصغر وأكبر الزوايا بما ينتج عنه الخطأ فى إيجاد المطلوب



قانون (قاعدة) جيب التمام | ٤ - ٢

الحل

في Δ أ ب حـ

جتا أ = $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب حـ}$ = $\frac{(٨)^{٢} + (٣)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٨ \times ٣}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ أ) = ٦٠° (١)

في Δ ب ء حـ

جتا ء = $\frac{(حـ ء)^{٢} + (ء ب)^{٢} - (ب حـ)^{٢}}{٢ (حـ ء) (ء ب)}$ = $\frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ ء) = ٦٠° (٢)

∵ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) وهما مرسومتان على $\overline{ب جـ}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب).

حاول أن تحل

٤) أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٩سم ، ب حـ = ٥سم ، حـ ء = ٨سم ، ء أ = ٩سم ، أ حـ = ١١سم. أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

تمارين ٤ - ٢

أكمل كلًّا مما يأتى:

١) يستخدم ..... لحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

٢) يستخدم ..... لحل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع فيه

٣) فى أى مثلث ل م ن يكون: $ل'^{٢} = م'^{٢} + ن'^{٢} - ....$ ، جتا ل = $\frac{م'^{٢} + ن'^{٢} - ....}{....}$

٤) فى المثلث أ ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ..... °

٥) مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧,٥سم ، ٧,٤سم، ٤,٣سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ..... °

٦) Δ س ص ع فيه س = ١٠ سم ، ص = ٦سم ، ق (∠ ع) = ٦٠° فإن ع = ...

٧) فى Δ ل م ن يكون $ل'^{٢} + م'^{٢} - ل'^{٢} = ...$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٦٠° د ٣٠°

٩) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{ل'^{٢} + م'^{٢} - ن'^{٢}}{٢ ل' م'}$ مساويًا:

أ جتا ل ب جتا م جـ جتا ن د لا شئ مما سبق

١٧١ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

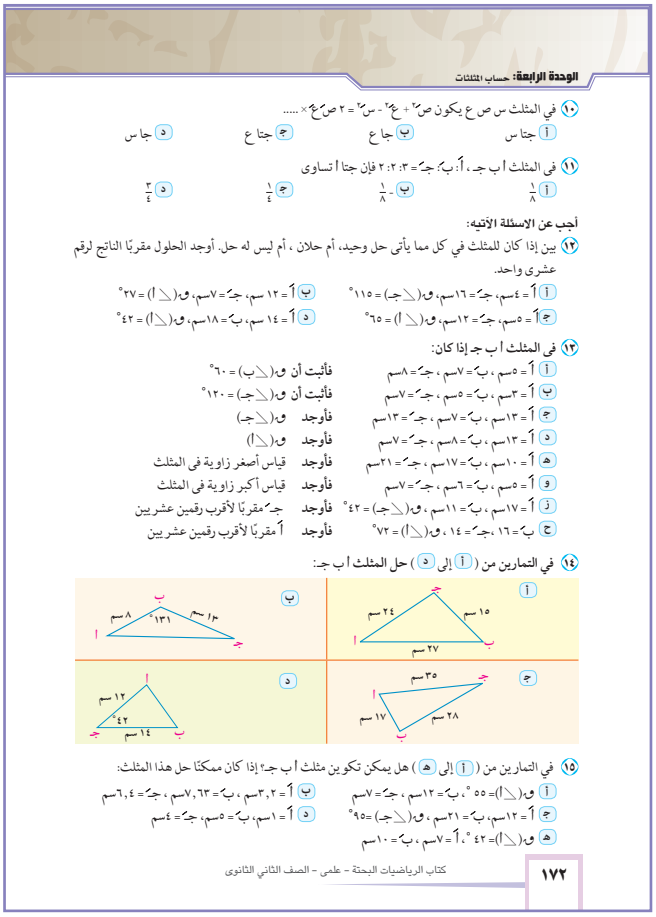
ملخص الوحدة:

- الفت انتباه الطلاب إلى ضرورة الاستعانة بملخص الوحدة الذى يوضح كافة القوانين التى تم دراستها فى الوحدة، وكذا تحديد حالات حل المثلث.
- يمكنك تخصيص حصتين من الحصص المقترحة للوحدة لحل مزيد من التمارين العامة على الوحدة.

التدريب والتقييم:

- تشمل تمارين الدرس الثانى عددًا من تمارين الإكمال والاختبار من متعدد فضلًا عن عدد من الأسئلة المقالية التى يطلب فيها من الطالب حل عدد من المثلثات وتمارين أخرى يطلب منه تحديد هل يمكن تكوين مثلث أم لا من البيانات المعطاه وفى حالة إمكانية رسم المثلث فيطلب منه حل هذا المثلث.
- أثناء حل التمارين ٢٠ - ٢٥ احرص على تبادل عدد من المعلومات فى مجال الملاحة، والزراعة، والتصميم المعيارى لجذب انتباه الطلاب وتكوين اتجاهات إيجابية نحو البيئة.
- التمرين رقم ٢٦ والذى بعنوان اكتشف الخطأ ساعد الطلاب عند الضرورة فى نقد الحلين (حل زياد - حل كريم) لتحديد الخطأ.

PDF Compressor Pro



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

(١٠) في المثلث س ص ع يكون ص^{٢} + ع^{٢} - س^{٢} = ٢ ص ع × .....

(أ) جتا س (ب) جا ع (ج) جتا ع (د) جا س

(١١) في المثلث أ ب جـ ، أ: ب: جـ = ١: ٢: ٣ فإن جتا أ تساوى

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٢) بين إذا كان للمثلث في كل مما يأتى حل وحيد، أم حلان ، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

(أ) أ = ٤سم، جـ = ١٦سم، ق(∠جـ) = ١١٥°

(ب) أ = ١٢ سم، جـ = ٧سم، ق(∠أ) = ٢٧°

(ج) أ = ٥سم، جـ = ١٢سم، ق(∠أ) = ٦٥°

(د) أ = ١٤ سم، ب = ١٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°

(١٣) في المثلث أ ب جـ إذا كان:

(أ) أ = ٥سم ، ب = ٧سم ، جـ = ٨سم فأثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

(ب) أ = ٣سم ، ب = ٥سم ، جـ = ٧سم فأثبت أن ق(∠جـ) = ١٢٠°

(ج) أ = ١٣سم ، ب = ٧سم ، جـ = ١٣سم فأوجد ق(∠جـ)

(د) أ = ١٣سم ، ب = ٨سم ، جـ = ٧سم فأوجد ق(∠أ)

(هـ) أ = ١٠سم ، ب = ١٧سم ، جـ = ٢١سم فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث

(و) أ = ٥سم ، ب = ٦سم ، جـ = ٧سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث

(ز) أ = ١٧سم ، ب = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° فأوجد جـ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(ح) ب = ١٦ ، جـ = ١٤ ، ق(∠أ) = ٧٢° فأوجد أ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(١٤) في التمارين من (أ) إلى (د) حل المثلث أ ب جـ:

(أ) ١٥سم، ٢٤سم، ٢٧سم

(ب) ٨سم، ١٣سم، ١٣١°

(ج) ٣٥سم، ٢٨سم، ١٧سم

(د) ١٢سم، ٤٢°، ١٤سم

(١٥) في التمارين من (أ) إلى (هـ) هل يمكن تكوين مثلث أ ب جـ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

(أ) ق(∠أ) = ٥٥° ، ب = ١٢سم ، جـ = ٧سم

(ب) أ = ٣,٢سم ، ب = ٧,٦٣سم ، جـ = ٦,٤سم

(ج) أ = ١٢سم ، ب = ٢١سم ، ق(∠جـ) = ٩٥°

(د) أ = ١سم ، ب = ٥سم ، جـ = ٤سم

(هـ) ق(∠أ) = ٤٢° ، أ = ٧سم ، ب = ١٠سم

١٧٢ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

⌑ نؤكد عليك عزيزنا المعلم ضرورة مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب وذلك باختيار التمارين ذات مستوى الصعوبة المناسب للمستوى المعرفى للطلاب فلا يصبح تكليف الطالب الضعيف أو المتوسط بأحد التمارين مرتفعة المستوى إلا بعد التأكد من اتقانه للمفاهيم والمهارات الأساسية والتدريب بشكل كافٍ عليها.

حل التمارين:

(٤) ٧٤,٣٨° (٥) ٣٥,٤١°

(٦) ٢ $\sqrt{١٩}$ سم

(٨) ب (٩) جـ

(١٠) أ (١١) ب

(١٢) (أ) حل وحيد وهو :

ب = ١٣,٩سم ، أ ١٣,١° ، ب ٥١,٩°

(ب) حل وحيد وهو :

جـ = ١٥,٤° ، ب = ١٣٧,٦° ، ب ١٧,٨سم

(جـ) لايوجد حل لأن:

ع = ١٢ حا ٦٥° ≃ ١٠,٩سم

ع < أ فلايوجد حل للمثلث

د - ع = ١٨ حا ٤٢° ≃ ١٢ سم

ع < أ < ب يوجد حلان

الحل الأول : تكون ب = ٥٩,٣٥°

الحل الثانى: تكون (ب) = ١٢٠,٦٥°

(١٣) (جـ) ٧٤,٣٨° (د) - ١٢٠°

(هـ) ٢٨,٠٧° (و) ٧٨,٤٦°

(ز) ١١,٤٩سم (ح) ١٧,٧١سم

(١٤) (أ) أ ≃ ٣٣,٥٦° ، ب ≃ ٦٢,١٨° ، جـ ≃ ٨٤,٢٦°

(ب) ب ≃ ١٩,٢٢سم ، أ ≃ ٣٠,٧° ، جـ ≃ ١٨,٣°

(جـ) أ ≃ ٥٢,١٦° ، ب ≃ ٩٩,١٩° ، جـ ≃ ٢٨,٦٥°

(د) جـ ≃ ٩,٥سم ، أ ≃ ٨٠,٣٤° ، ب ≃ ٥٧,٦٦°

(١٥) (أ) لايمكن أن ع < أ

(ب) أ ≃ ٢٤,٤١° ، ب ≃ ٩٩,٨٦° ، جـ ≃ ٥٥,٧٣°

(جـ) جـ ≃ ٢٥,١ سم ، أ ≃ ٢٨,٤٤° ، ب ≃ ٥٦,٦٥°

(د) لايمكن تكوين المثلث لأن أ + جـ = ب .

هـ ع = ب حا أ ≃ ٦,٦٩

∵ ع < أ < ب يوجد حلان للمسألة

الحل الأول : ب ≃ ٧٢,٩٢°

الحل الثانى : ب ≃ ١٠٧,٠٨°

(١٦) ١٦,٥١ سم

PDF Compressor Pro

(١٧) حتا ب = $-\frac{١}{٦}$ ، حتا د = $\frac{١}{٦}$ وهما متكاملتان لذلك فإن الشكل رباعي دائري.

(١٨) ب د = ١٠ سم

(١٩) $\sqrt{١٠٥}$ سم^{٢}

(٢٠) ٨٥ متر

(٢١) ٢٣٩ متر

(٢٢) ٢,٩ سم

(٢٣) ك $أ_{١}$ $ب_{١}$ = [($أ_{١}$ + $ب_{١}$) + $جـ_{١}$][($أ_{١}$ + $ب_{١}$) - $جـ_{١}$]

ك $أ_{١}$ $ب_{١}$ = ($أ_{١}$ + $ب_{١}$)^{٢} - $جـ_{١}^{٢}$

ك = $\frac{أ_{١}^{٢} + ب_{١}^{٢} - جـ_{١}^{٢} + ٢ أ_{١} ب_{١}}{أ_{١} ب_{١}}$

ك = ٢ حتا جـ + ٢ = ٢ (حتا جـ + ١)

∵ حتا جـ ∈ [-١، ١]

∴ ك ∈]٠، ٤]

عندما ك = ١ تكون جـ = ١٢٠°

(٢٤) أ - ا جـ = ٢١ كم ب - ٧٠ دقيقة

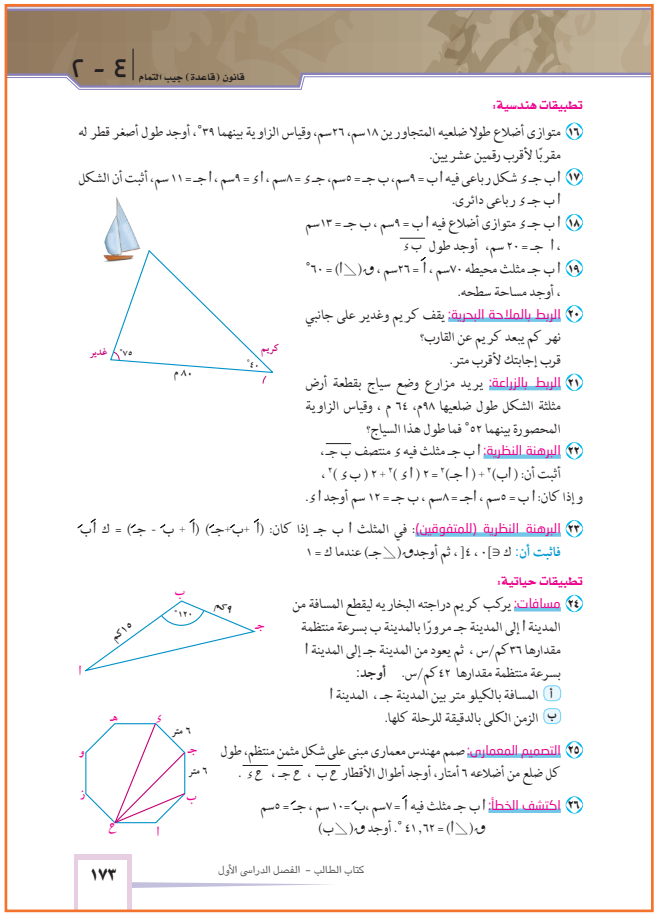
(٢٥) المثمن المنتظم أضلاعه متساوية وزواياه متساوية وقياس الزاوية الداخلية = ١٣٥°

ب) ح ≃ ١١,١ سم ، و(∠ ب ح) = ١١٢,٥°،

جـ) جـ ≃ ١٤,٥ سم ، و(∠ د ح) = ١٠١,٢٥°

د) ج ≃ ١٦,٧ سم.

(٢٦) **حل زياد خطأ :** لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة، ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام في حل كريم.



تطبيقات هندسية:

(١٦) متوازي أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨ سم، ٢٦ سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(١٧) ا ب جـ د شكل رباعي فيه ا ب = ٩ سم، ب جـ = ٥ سم، جـ د = ٨ سم، د ا = ٩ سم، ا جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل ا ب جـ د رباعي دائري.

(١٨) ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه ا ب = ٩ سم، ب جـ = ١٣ سم، ا جـ = ٢٠ سم، أوجد طول $\overline{ب د}$

(١٩) ا ب جـ مثلث محيطه ٧٠ سم، أ = ٢٦ سم، و(∠ ا) = ٦٠°، أوجد مساحة سطحه.

(٢٠) **الربط بالملاحة البحرية:** يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟ قرب إجابتك لأقرب متر.

(٢١) **الربط بالزراعة:** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨ م، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج؟

(٢٢) **البرهنة النظرية:** ا ب جـ مثلث فيه د منتصف $\overline{ب جـ}$، أثبت أن: (اب)^{٢} + (اجـ)^{٢} = ٢ (اد)^{٢} + ٢ (ب د)^{٢} ، وإذا كان: ا ب = ٥ سم ، اجـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد اد.

(٢٣) **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث ا ب جـ إذا كان: ($أ_{١}$ + $ب_{١}$ جـ) ($أ_{١}$ + $ب_{١}$ - جـ) = ك $أ_{١}$ $ب_{١}$ فأثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤] ، ثم أوجد و(∠ جـ) عندما ك = ١

تطبيقات حياتية:

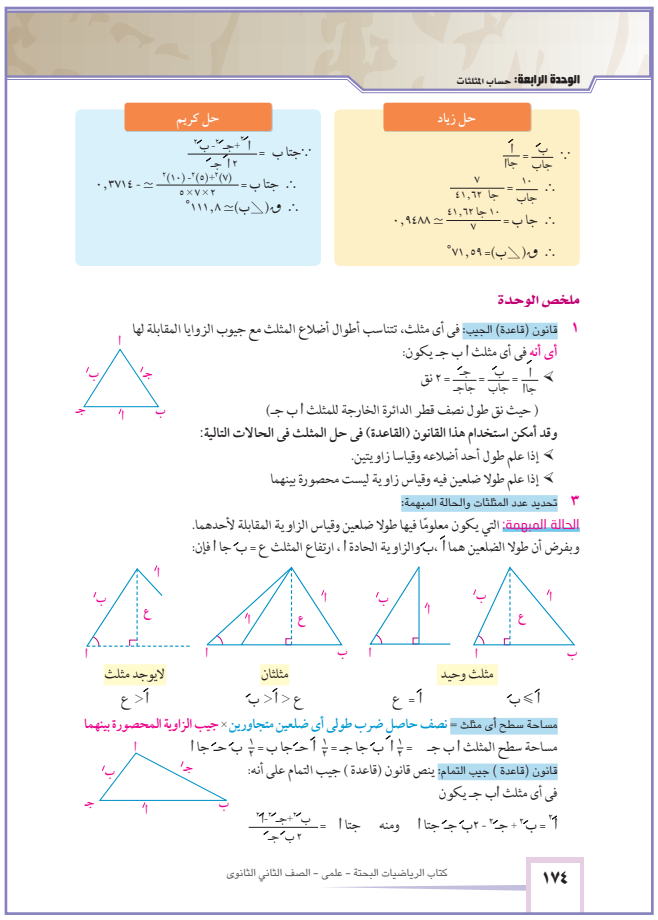
(٢٤) **مسافات:** يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة ا إلى المدينة جـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة ا بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. أوجد:

أ) المسافة بالكيلو متر بين المدينة جـ ، المدينة ا

ب) الزمن الكلي بالدقيقة للرحلة كلها.

(٢٥) **التصميم المعماري:** صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار $\overline{ع ب}$ ، $\overline{ع جـ}$ ، $\overline{ع د}$.

(٢٦) **اكتشف الخطأ:** ا ب جـ مثلث فيه أ = ٧ سم ،ب = ١٠ سم ، جـ = ٥ سم و(∠ ا) = ٤١,٦٢° . أوجد و(∠ ب)



حل زياد

∵ $\frac{ب}{جا ب}$ = $\frac{أ}{جا أ}$

∴ $\frac{١٠}{جا ب}$ = $\frac{٧}{٤١,٦٢}$

∴ جا ب = $\frac{١٠ جا ٤١,٦٢}{٧}$ ≃ ٠,٩٤٨٨

∴ و(∠ ب) = ٧١,٥٩°

حل كريم

∵ جتا ب = $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ جـ}$

∴ جتا ب = $\frac{(٧)^{٢} + (٥)^{٢} - (١٠)^{٢}}{٢ \times ٧ \times ٥}$ ≃ - ٠,٣٧١٤

∴ و(∠ ب) ≃ ١١١,٨°

ملخص الوحدة

١ **قانون (قاعدة) الجيب:** في أي مثلث، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أي أنه في أي مثلث ا ب جـ يكون:

$\frac{أ}{جا أ}$ = $\frac{ب}{جا ب}$ = $\frac{جـ}{جا جـ}$ = ٢ نق

(حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ)

وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) في حل المثلث في الحالات التالية:

- إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.
- إذا علم طولا ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

٣ **تحديد عدد المثلثات والحالة المبهمة:**

الحالة المبهمة: التي يكون معلومًا فيها طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

وبفرض أن طولا الضلعين هما أ ، ب والزاوية الحادة أ ، ارتفاع المثلث ع = ب جا أ فإن:

مثلث وحيد	مثلثان	لايوجد مثلث
أ ⩽ ب	أ = ع	ع < أ < ب	أ > ع

مساحة سطح أي مثلث = نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة سطح المثلث ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ جا أ

قانون (قاعدة) جيب التمام: ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب جـ يكون

$أ^{٢}$ = $ب^{٢}$ + $جـ^{٢}$ - ٢ ب جـ جتا أ ومنه جتا أ = $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

PDF Compressor Pro

التمارين العامة

إجابات التمارين العامة:

(١٠) أ ≈ ١٣,٨٢سم، جـ = ١٠,٨٥سم

(١١) أ ≈ ٩,١٥سم، ب ≈ ١١,٤سم، و ≈ ٨,٣٣سم

(١٢) ٢٦,٤٨سم

(١٣) ٣٨ سم٢

(١٤) ب جـ ≈ ٨,٢٨سم، محيط الدائرة ≈ ٢٦,٤سم

(١٥) ١٠,٩١سم، ١٤,٣٤سم، ١٤,٧٥سم

(١٦) أ ≈ ٢٧,٠٨٤سم

(١٨) ١٢٠°

(١٩) ٣٨ ″ ٣٩ ′ ٣٧°

(٢٠) ٣٤ ′ ١٠٨° ، ٢٠ ′ ٤٦° ، ٦ ′ ٢٥°

(٢١) و (∠ا) ≈ ١٦ ′ ٦١° ، و ≈ ٦,٨٤سم

(٢٢) و (∠ب) ≈ ٢٩ ′ ٥٩° ، مساحة سطح المثلث ≈ ٨٤سم٢

(٢٣) أ جـ ≈ ١٢سم

ب مساحة سطح المثلث. ٣١سم٢

جـ و ≈ ٦سم

(٢٤) ٢٠ ″ ٢٢ ′ ٩٣° ، ١١٠سم٢

(٢٥) أ و (∠ا) ≈ ٤٨°، ب ≈ ١٣,٨٤، جـ ≈ ١٥,٤٤

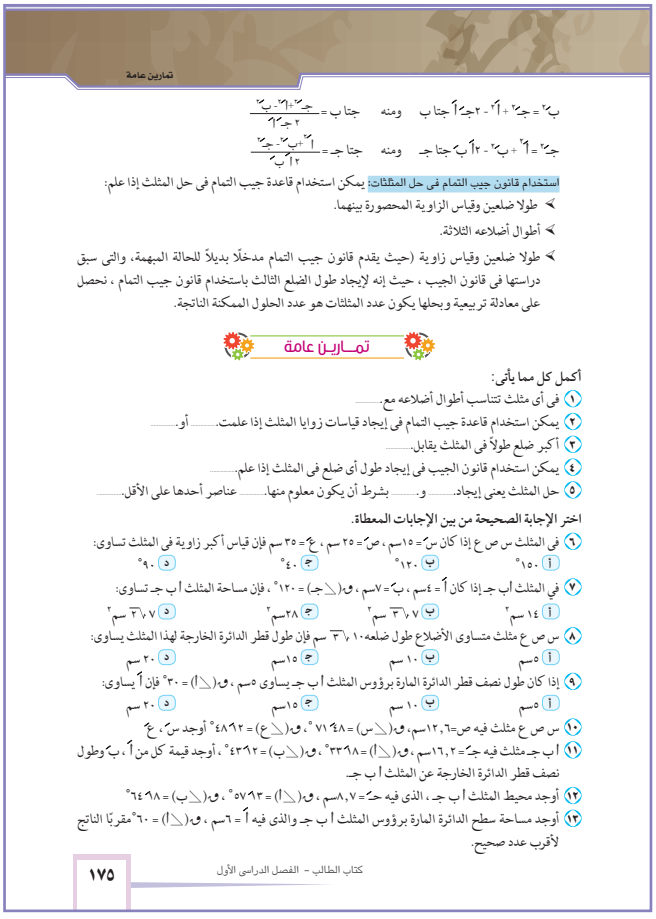
ب و (∠ب) ≈ ٨ ′ ٥٦°، أ ≈ ٦,٥٣٣، جـ ≈ ٥,٠٣٢

جـ و (∠جـ) ≈ ٦ ′ ٤٥°، أ ≈ ٢٣١,١، ب ≈ ٢١٢,٦

د و (∠ب) ≈ ٩٥°، أ ≈ ١,٣٩٨، جـ ≈ ١,٧٩٥

و و (∠ا) ≈ ١٥ ′ ٣٨°، و (∠ب) ٤٧ ′ ٨١° و (∠جـ) ≈ ٦٠°

ز أ = ١٣، و (∠ب) ≈ ١٢ ′ ٣٢° و (∠جـ) ≈ ٤٨ ′ ٨٧°



تمارين عامة

ب٢ = جـ٢ + أ٢ - ٢جـ أ جتا ب ومنه جتا ب = (جـ٢ + أ٢ - ب٢) / ٢جـ أ

جـ٢ = أ٢ + ب٢ - ٢أ ب جتا جـ ومنه جتا جـ = (أ٢ + ب٢ - جـ٢) / ٢أ ب

استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلثات: يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم:

- طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أطوال أضلاعه الثلاثة.
- طولا ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلاً للحالة المبهمة، والتى سبق دراستها فى قانون الجيب ، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام ، نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الممكنة الناتجة.

تمـارين عامة

أكمل كل مما يأتى:

(١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع.....

(٢) يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى إيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علمت..... أو.....

(٣) أكبر ضلع طولاً فى المثلث يقابل.....

(٤) يمكن استخدام قانون الجيب فى إيجاد طول أى ضلع فى المثلث إذا علم.....

(٥) حل المثلث يعنى إيجاد..... و..... بشرط أن يكون معلوم منها..... عناصر أحدها على الأقل.....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(٦) فى المثلث س ص ع إذا كان س = ١٥سم ، ص = ٢٥ سم ، ع = ٣٥ سم فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى:
أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٤٠° د ٩٠°

(٧) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ٤سم ، ب = ٧سم ، و(∠جـ) = ١٢٠° ، فإن مساحة المثلث أ ب جـ تساوى:
أ ١٤ سم٢ ب ٧√٣ سم٢ جـ ٢٨سم٢ د ٧√٣ سم٢

(٨) س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠√٣ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى:
أ ٥سم ب ١٠ سم جـ ١٥سم د ٢٠ سم

(٩) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٥سم ، و(∠ا) = ٣٠° فإن أ يساوى:
أ ٥سم ب ١٠ سم جـ ١٥سم د ٢٠ سم

(١٠) س ص ع مثلث فيه ص = ١٢,٦سم، و(∠س) = ٧١ ′ ٩٨° ، و(∠ع) = ٤٨ ′ ٩٢° أوجد س ، ع

(١١) أ ب جـ مثلث فيه جـ = ١٦,٢سم ، و(∠ا) = ٣٣ ′ ٩٨° ، و(∠ب) = ٤٣ ′ ٩٢° ، أوجد قيمة كل من أ ، ب وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب جـ.

(١٢) أوجد محيط المثلث أ ب جـ ، الذى فيه جـ = ٨,٧سم ، و(∠ا) = ٥٧ ′ ٩٣° ، و(∠ب) = ٦٤ ′ ٩٨°

(١٣) أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ والذى فيه أ = ٦سم ، و(∠ا) = ٦٠° مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

(١٤) أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٤,٧ سم ، و(∠ب) = ٣٤° ، و(∠جـ) = ٦٦° ، أوجد طول ب جـ ، ثم أوجد محيط الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ.

(١٥) إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٤٠سم ، و(∠ا) = ٤٤° ، و(∠ب) = ٦٦° ، فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ.

(١٦) أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠سم٢ ، و(∠ب) = ٨٢° ، و(∠جـ) = ٥٦° فما قيمة أ؟

(١٧) البرهنة النظرية: فى أى مثلث أ ب جـ، أثبت أن مساحته تساوى (أ ب جـ) / (٤ و) حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(١٨) أوجد قياس أكبر زوايا المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ٦سم ، ب = ١٠ سم ، جـ = ١٤سم

(١٩) أوجد قياس أصغر زوايا المثلث أ ب جـ ، إذا كان أ = ٧سم ، ب = ٥ سم ، جـ = ١٠سم

(٢٠) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ، الذى فيه أ = ٧,٦سم، ب = ٥,٨ سم، جـ = ٣,٤سم

(٢١) فى المثلث أ ب جـ أ = ١٢ سم، ب = ١٣سم، جـ = ١٠سم، أوجد و(∠ا) لأقرب دقيقة ، ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(٢٢) أ ب جـ مثلث فيه أ = ١٣ سم، ب = ١٤سم، جـ = ١٥سم ، أوجد و(∠ب)، ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر مربع.

(٢٣) أ ب جـ مثلث فيه و(∠جـ) = ٩٦ ′ ٩٣° ، أ = ٧سم ، ب = ٩سم أوجد:
أ جـ ب مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سم٢
جـ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر.

(٢٤) أ ب جـ مثلث محيطه ٥٢سم، أ = ١٣سم، ب = ١٧سم، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

(٢٥) حل Δ أ ب جـ إذا كان:
أ أ = ١٢سم ، و(∠ب) = ٥٩° ، و(∠جـ) = ٧٣°
ب و(∠ا) = ٧٥ ′ ٣٥° ، أ = ٧ سم ، ب = ٥,٦سم
جـ و(∠ا) = ٧٣ ′ ١٠° ، أ = ١٣٥° ، جـ = ١٧١سم
د و(∠ب) = ٣٦° ، ب = ٥,٣٧سم ، جـ = ٤سم
هـ و(∠ا) = ١٥ ′ ٣٩ ″ ٢° ، ب = جـ = ٦سم
و أ = ٥سم ، ب = ٨سم ، جـ = ٧سم
ز و(∠ا) = ٦٠° ، ب = ٨سم ، جـ = ١٥سم
ح أ = ١٤سم ، و(∠ب) = ٥٣° ، جـ = ١٢سم
ط أ = ١١سم ، ب = ٩سم ، و(∠جـ) = ٤٣ ′ ٩٢°

البرهنة النظرية

(٢٦) فى أى مثلث أ ب جـ أثبت أن:
أ = ب جـ - ٢ب جـ جتا ا و إذا كان أ = ٤سم ، ب = ٥سم ، جـ = ٦سم، أثبت أن جتا جـ = جتا ٢ا ثم أثبت أن مساحة المثلث أ ب جـ = (٧√١٥) / ٤ سم٢

PDF Compressor Pro

ح) ب′ ≈ ١١,٧٤، و(∠أ) ≈ ٧٢° ١٦′
و(∠جـ) ≈ ٥٤° ٤٢′

ط) حـ′ ≈ ٧,٥٩٦، و(∠أ) ≈ ٨٢° ٣٥′
و(∠ب) ≈ ٥٤° ١٣′

٢٧) ٢٥سم
٢٨) ١١٢سم، ١٤٤سم
٢٩) أ) أ د ≈ ١٠,٤٦سم
ب جـ ≈ ١٦,٦٨سم
ب) مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د ≈ ٨٢,٧٩سم٢
٣٠) ١٦سم
٣٤) ٢٩,٧سم
٣٥) أ) ≈ ١٥ مترًا
ب) ≈ ١٤,٢٥ مترًا
٣٦) ٢٥سم

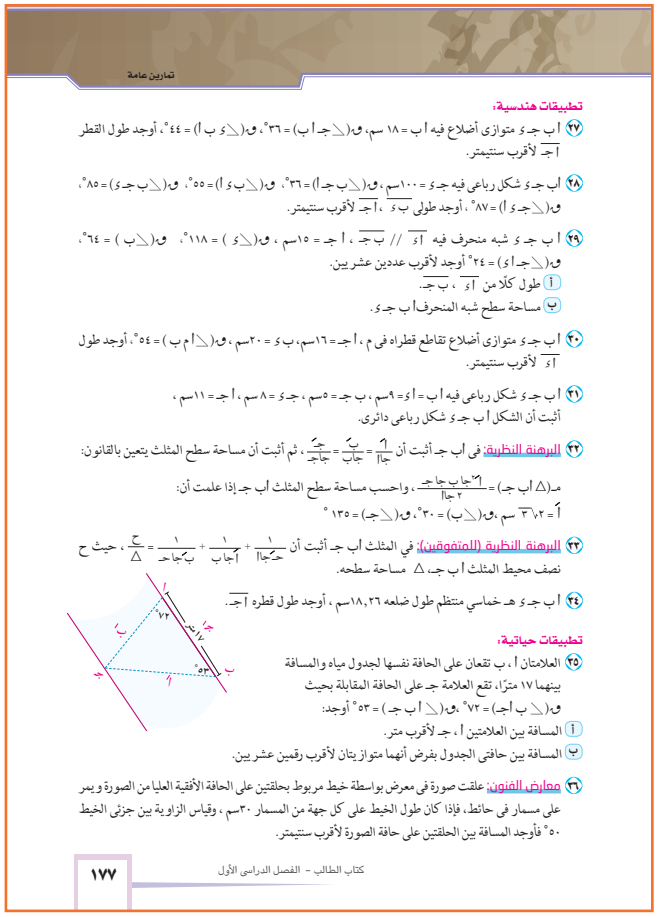
الاختبار التراكمى

إجابات الاختبار:

١) ب
٢) د
٣) ب
٤) ب
٥) د
٦) د
٧) أ
٨) جـ
٩) أ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ب $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ جـ ١ د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
١١) أ $\frac{\pi}{٣}$ ٥ ب $\frac{\pi}{٤}$ ٣ جـ ٢٨٨° د ٣١٥°
١٢) π ٧
١٣) $\frac{٥}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} + \frac{-١٢}{١٣} \times \frac{-٣}{٥} = \frac{١٦}{٦٥}$
١٤) $\frac{\text{س}'}{\text{حا س}} = \frac{\text{ص}'}{\text{حا ص}}$

$\therefore \frac{١٠}{\text{حا ٣٠°}} = \frac{\text{ص}'}{\text{حا ٤٥°}}$

$\frac{١٠}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ض}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$



تطبيقات هندسية:

٢٧) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم، و(∠جـ أ ب) = ٣٦°، و(∠د ب أ) = ٤٤°، أوجد طول القطر $\overline{\text{أ جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

٢٨) أ ب جـ د شكل رباعى فيه د جـ = ١٠٠سم، و(∠ب جـ أ) = ٣٦°، و(∠ب د أ) = ٥٥°، و(∠جـ د أ) = ٨٧°، و(∠ب جـ د) = ٨٥°، أوجد طولى ب د ، أ جـ لأقرب سنتيمتر.

٢٩) أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ جـ = ١٥سم ، و(∠د) = ١١٨° ، و(∠ب) = ٦٤°، و(∠جـ أ د) = ٢٤° أوجد لأقرب عددين عشريين.
أ) طول كلًا من $\overline{\text{أ د}}$ ، ب جـ.
ب) مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ د.

٣٠) أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ جـ = ١٦سم، ب د = ٢٠سم ، و(∠أ م ب) = ٥٤°، أوجد طول $\overline{\text{أ د}}$ لأقرب سنتيمتر.

٣١) أ ب جـ د شكل رباعى فيه أ ب = أ د = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ د = ٨ سم ، أ جـ = ١١سم ، أثبت أن الشكل أ ب جـ د شكل رباعى دائرى.

٣٢) البرهنة النظرية: فى أ ب جـ أثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ ، ثم أثبت أن مساحة سطح المثلث يتعين بالقانون:
م(Δ أ ب جـ) = $\frac{\text{أ}^٢ \text{ جا ب جا جـ}}{٢ \text{ جا أ}}$ ، واحسب مساحة سطح المثلث أ ب جـ إذا علمت أن:
أ = ٣√٢ سم ، و(∠ب) = ٣٠° ، و(∠جـ) = ١٣٥°

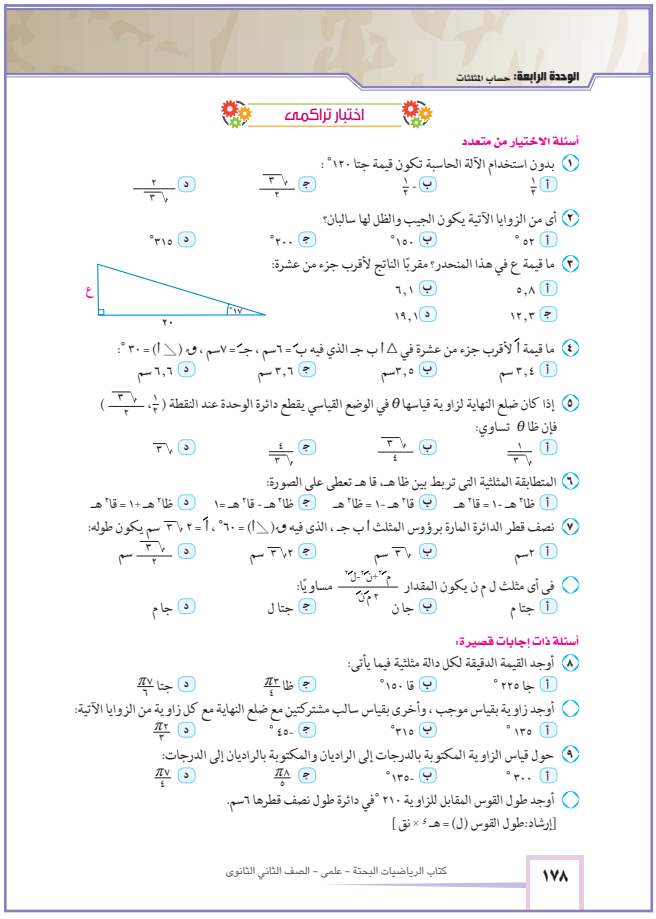
٣٣) البرهنة النظرية (للمتفوقين): فى المثلث أ ب جـ أثبت أن $\frac{١}{\text{ح جا أ}} + \frac{١}{\text{أ جا ب}} + \frac{١}{\text{ب ح جا جـ}} = \frac{\text{ح}}{\Delta}$ ، حيث ح نصف محيط المثلث أ ب جـ، Δ مساحة سطحه.

٣٤) أ ب جـ د هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦سم ، أوجد طول قطره $\overline{\text{أ جـ}}$.

تطبيقات حياتية:

٣٥) العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه والمسافة بينهما ١٧ مترًا، تقع العلامة جـ على الحافة المقابلة بحيث و(∠ب أ جـ) = ٧٢° ، و(∠أ ب جـ) = ٥٣° أوجد:
أ) المسافة بين العلامتين أ ، جـ لأقرب متر.
ب) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

٣٦) معارض الفنون: علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر.



اختبار تراكمى

أسئلة الاختيار من متعدد

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة جتا ١٢٠° :
أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

٢) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبان؟
أ) ٥٢° ب) ١٥٠° جـ) ٢٠٠° د) ٣١٥°

٣) ما قيمة ع فى هذا المنحدر؟ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة:
أ) ٥,٨ ب) ٦,١ جـ) ١٢,٣ د) ١٩,١

٤) ما قيمة أ لأقرب جزء من عشرة فى Δ أ ب جـ الذى فيه ب′ = ٦سم ، جـ′ = ٧سم ، و(∠أ) = ٣٠° :
أ) ٣,٤ سم ب) ٣,٥سم جـ) ٣,٦ سم د) ٦,٦ سم

٥) إذا كان ضلع النهاية لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{١}{٤}, \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ فإن ظا θ تساوى:
أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ جـ) $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ د) $\sqrt{٣}$

٦) المتطابقة المثلثية التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تعطى على الصورة:
أ) ظا٢ هـ - ١ = قا٢ هـ ب) قا٢ هـ - ١ = ظا٢ هـ جـ) ظا٢ هـ - قا٢ هـ = ١ د) ظا٢ هـ + ١ = قا٢ هـ

٧) نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ، الذى فيه و(∠أ) = ٦٠° ، أ = ٢√٣ سم يكون طوله:
أ) ٢سم ب) ٣√٢ سم جـ) ٣√٣ سم د) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ سم

○ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{م}^٢ + \text{ن}^٢ - \text{ل}^٢}{٢ \text{ م ن}}$ مساويًا:
أ) جتا م ب) جا ن جـ) جتا ل د) جا م

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

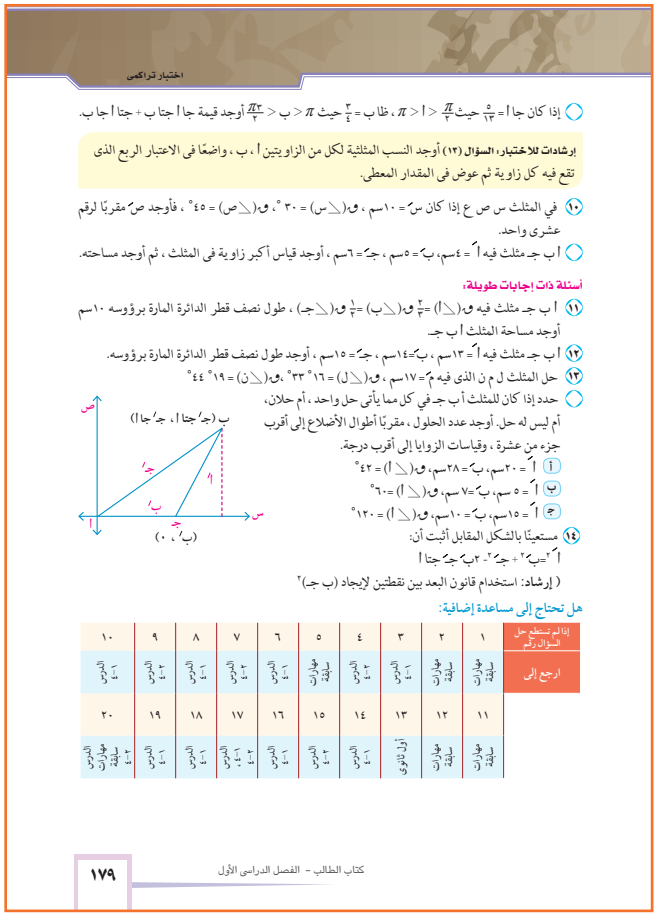
٨) أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتى:
أ) جا ٢٢٥° ب) قا ١٥٠° جـ) ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ د) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

○ أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين مع ضلع النهاية مع كل زاوية من الزوايا الآتية:
أ) ١٣٥° ب) ٣١٥° جـ) -٤٥° د) $\frac{٣\pi}{٣}$

٩) حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:
أ) ٣٠° ب) -١٣٥° جـ) $\frac{٨\pi}{٥}$ د) $\frac{٧\pi}{٤}$

○ أوجد طول القوس المقابل للزاوية ٢١٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٦سم.
[إرشاد: طول القوس (ل) = هـ° × ق]

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمي

إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢} > أ > \pi$ ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث $\pi > ب > \frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة جا أ جتا ب + جتا أ جا ب.

إرشادات للاختبار، السؤال (١٣) أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ب ، واضعًا في الاعتبار الربع الذي تقع فيه كل زاوية ثم عوض في المقدار المعطى.

١٠ في المثلث س ص ع إذا كان س ص = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠° ، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد ص مقربًا لرقم عشري واحد.

أ ب جـ مثلث فيه أ = ٤سم، ب = ٥سم ، جـ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ، ثم أوجد مساحته.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

١١ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = $\frac{٣}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ.

١٢ أ ب جـ مثلث فيه أ = ١٣سم ، ب = ١٤سم ، جـ = ١٥سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

١٣ حل المثلث ل م ن الذي فيه م = ١٧سم ، ق(∠ل) = ١٦° ٣٣′ ، ق(∠ن) = ١٩° ٤٤′

حدد إذا كان للمثلث أ ب جـ في كل مما يأتي حل واحد ، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد عدد الحلول ، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أ أ = ٢٠سم، ب = ٢٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°

ب أ = ٥ سم، ب = ٧ سم، ق(∠أ) = ٦٠°

جـ أ = ١٥سم، ب = ١٠سم، ق(∠أ) = ١٢٠°

١٤ مستعينًا بالشكل المقابل أثبت أن:

أ = ب جـ + جـ أ جتا ب

(إرشاد: استخدام قانون البعد بين نقطتين لإيجاد (ب جـ)

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ارجع إلى	مهارات سابقة	مهارات سابقة	درس ٢	درس ٣	درس ٤	درس ٥	درس ٦	درس ٧	درس ٨	درس ٩
	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
	مهارات سابقة	مهارات سابقة	أول ثانوي	درس ٢	درس ٣	درس ٤	درس ٥	درس ٦	درس ٧	درس ٨

١٧٩ كتاب الطالب - الفصل الدراسي الأول

ص = ٢٠ √٢

∴ ص = $\frac{٢٠}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٥ √٢ سم

١٥ أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ هي جـ

∴ حتا جـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢}{٢ أ ب}$

= $\frac{١٦ - ٢٥ + ٣٦}{٢ \times ٤ \times ٥}$ = ٠,١٢٥

ق(∠جـ) ≈ ٩° ٤٩′ ٨٢°

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ب

= $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٥ \times$ جا ٩° ٤٩′ ٨٢°

≈ ٩,٩٢سم٢

١٦ ق(∠أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ)

∴ ق(∠ب) = $\frac{٣}{٢}$ ق(∠أ)

ق(∠جـ) = ٢ ق(∠أ)

∴ ق(∠أ) + ٢ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠°

ق(∠ب) = ٦٠°

ق(∠جـ) = ٨٠°

$\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{ب}{جا ٦٠°} = \frac{جـ}{جا ٨٠°}$ = ٢٠

أ = ٢٠ جا ٤٠°

ب = ٢٠ جا ٦٠°

مساحة المثلث أ ب جـ

= $\frac{١}{٢} \times ٢٠$ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠°

≈ ١١٠سم٢

١٧ حتا أ = $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ}$

= $\frac{(١٤)^٢ + (١٥)^٢ - (١٣)^٢}{١٥ \times ١٤ \times ٢}$ = ٠,٦

∴ ق(∠أ) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∵ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ ق

∴ $\frac{١٣}{٢ \times جا ٤٨'' ٧' ٥٣°}$ ≈ ٨,١٢٥ سم

١٨ ق(∠م) = ١٨٠° - (١٦′ ٣٣° + ١٩′ ٤٤°) = ١٠٢° ٢٥′

$\frac{ل}{جا ١٦′ ٣٣°} = \frac{١٧}{جا ٢٥′ ١٠٢°}$

∴ ل ≈ ٩,٥٤٨ سم

$\frac{ن}{جا ١٩′ ٤٤°} = \frac{١٧}{جا ٢٥′ ١٠٢°}$ ،

∴ ن ≈ ١٢,١٦١ سم

٢٠ (ب جـ)٢ = (ب جـ جتا أ)٢ + (جـ جا أ)٢

أ٢ = ب٢ + جـ٢ جتا٢ أ + جـ٢ جا٢ أ - ٢ ب جـ جتا أ

= ب٢ + جـ٢ (جتا٢ أ + جا٢ أ) - ٢ ب جـ جتا أ

= ب٢ + جـ٢ - ٢ ب جـ جتا أ

PDF Compressor Pro

PDF Compressor Pro

الفصل الدراسي الثاني

PDF Compressor Pro



المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and series

مقدمة الوحدة

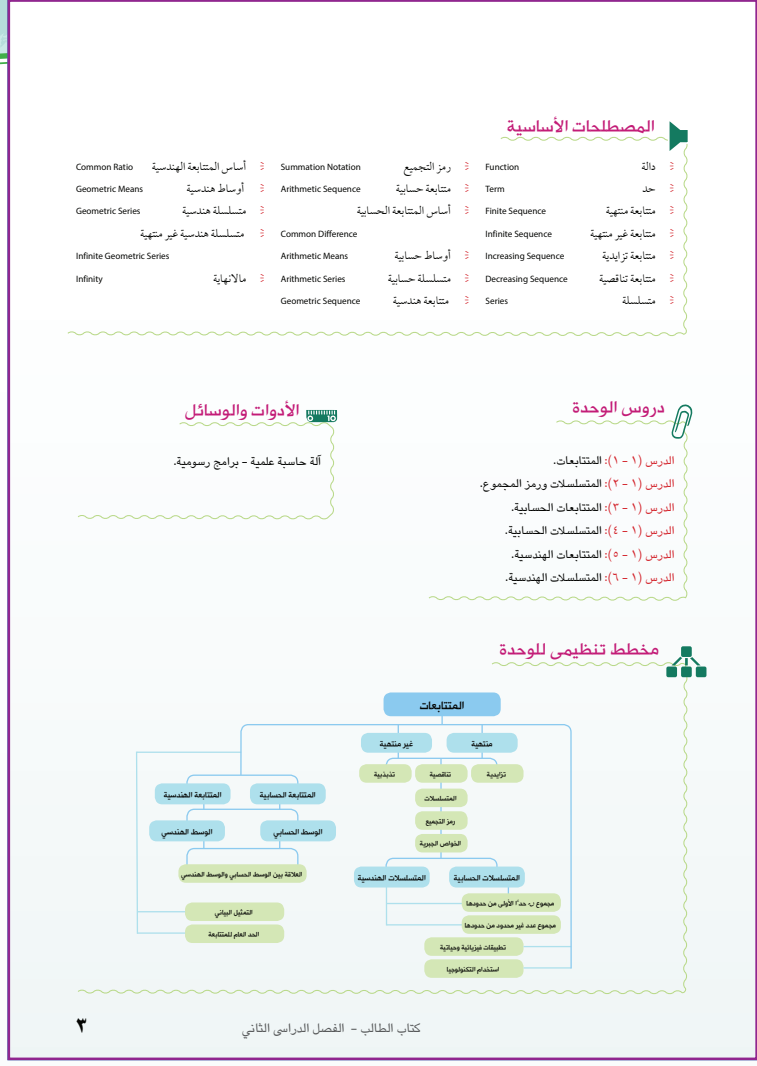
تبدأ هذه الوحدة بالتعريف بالعالم الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي Fibonacci الذي ولد في مدينة بيزا الإيطالية (١١٧٠م - ١٢٥٠م) وتعلم في شمال شرق الجزائر، حيث كان أبوه يعمل دبلوماسيًّا هناك لبلاده، كما تعلم الأعداد العربية واستخدمها في كتاباته وبذلك انتقلت كتابة الأعداد العربية إلى الغرب عن طريق كتابات فيبوناتشي. كما أنه درس الرياضيات والهندسة أيضًا، واهتم بدراسة الفن وكان ذلك أثناء تواجده في سوريا ومصر، وأنهى دراسته سنة ١٢٠٠ وقد كتب العديد من النصوص المهمة التي لعبت دورًا في إنعاش المهارات الرياضية، ومن أعماله المهمة في مجال الرياضيات مقدمة أعداد فيبوناتشي وكذلك سلسلة فيبوناتشي، وقد ألف كتابا في الهندسة يحتوي على نظريات مستندة على عناصر إقليدس والانقسامات بالإضافة إلى براهين دقيقة لنظريات هندسية وفصولًا عن كيفية حساب ارتفاع الأجسام في حساب المثلثات، كما استخدم دراسات عن الدائرة وأقطارها ومساحتها وخواصها، كما استخدم فيبوناتشي جذر المعادلة والكسور والجذور التربيعية .... الخ.

مخرجات التعلم

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المتتابعة.
- يميز بين المتتابعة والمتسلسلة.
- يتعرف المتتابعة الحسابية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الحسابية بصور مختلفة .
- يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية.
- يتعرف المتسلسلة المنتهية وغير المنتهية
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
- يتعرف المتتابعة الهندسية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الهندسية.
- يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
- يحول الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادي.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلات.
- يستخدم الحاسبات فى حل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام المتتابعات والمتسلسلات.

PDF Compressor Pro



المخطط التنظيمي للوحدة

يوضح هذا المخطط المفاهيم المختلفة التى سيتم تناولها من خلال دروس الوحدة من حيث المتتابعة المنتهية وغير المنتهيه وكذلك كونها تزايدية أو تناقصية أو تذبذبية، وبعد ذلك نتناول كيفية إيجاد الحد العام للمتتابعة والتمثيل البيانى لها، ونتطرق إلى المتسلسلات الحسابية والهندسية وحل مشكلات حياتية مرتبطة بها.

زمن تدريس الوحدة:

٢٠ حصة

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الإبداعي - التفكير التحليلي - حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - جهاز عرض فوق رأسي - شفافيات - برامج رسومية للحاسوب.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاوني - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة:

تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية (الفردية والجماعية) وفي أثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية، وتدريبات عامة على الوحدة في نهاية الوحدة والاختبار التراكمي.

PDF Compressor Pro

١ - ١ المتتابعات
Sequences

خلفية

سبق أن درس الطالب في الصفوف السابقة الأنماط بوجه عام، ومن بين هذه الأنماط (الأنماط العددية) الذي تستند عليها المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية، وسوف تدرس في هذا الدرس تعريف المتتابعات بوجه عام، وتوضيح الفرق بين المتتابعة والمجموعة والمتتابعات المنتهية وغير المنتهية وتزايد وتناقص المتتابعات، وكيفية إيجاد الحد العام لبعض المتتابعات ثم التمثيل البياني للمتتابعات باستخدام برنامج (geo gebra).

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذًا للأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يُعرّف المتتابعة بوجه عام.
- يفرق بين المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية.
- يوجد الحد العام للمتتابعات.
- يحدد المتتابعات التزايدية والمتتابعات التناقصية.
- يمثل المتتابعات بيانيًّا.

مفردات أساسية:

متتابعة - متتابعة منتهية - متتابعة غير منتهية - حد متتابعة تزايدية - متتابعة تناقصية - متتابعة ثابتة.

المواد العلمية المستخدمة:

آلة حاسبة علمية - برامج رسوبية للحاسوب (geo gebra).

طرق التدريس المختلفة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - الأنشطة.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص٤ إلى ص١١ - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).


الوحدة الأولى

المتتابعات

١ - ١

Sequences

تمهيد:

درست سابقًا الأنماط (مثل: ١، ٣، ٥، ٧، ...) وتعلمت أن النمط العددى هو ترتيب من مجموعة من الأعداد الحقيقية . وفى هذه الوحدة نلقى الضوء على بعض هذه الأنماط ونتناولها بدراسة أكثر عمقًا.

فكر و ناقش

ادرس النمط الآتى ثم أجب عن الأسئلة: (١، ٤، ٧، ١٠، ...)

١) ما العلاقة بين كل حد والذى يليه؟

٢) هل يمكنك إيجاد الحدين التاليين فى النمط؟

٣) هل يمكنك إيجاد الحد التاسع فى هذا النمط (دون الحاجة إلى إيجاد الحدود السابقة له)؟

تعلم

تعريف

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ+ أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع حيث يرمز للحد الأول بالرمز ع١، الحد الثانى بالرمز ع٢، الحد الثالث بالرمز ع٣ وهكذا. والحد النونى بالرمز عن ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتى: (ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، ... ، عن) أو يرمز لها بالرمز (عن).

تذكر أن

الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، صـ بحيث كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

لاحظ أن

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.
(٢) الرمز (عن) يعبر عن المتتابعة بينما الرمز عن يعبر عن حدها النونى.
(٣) المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.
(٤) عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

سوف تتعلم
- تعريف المتتابعة.
- المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية.
- الحد النونى للمتتابعة.
- المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية.

المصطلحات الأساسية
- Sequence متتابعة
- Finite Sequence متتابعة منتهية
- Infinite Sequence متتابعة غير منتهية
- Term حد
- Increasing Sequence متتابعة تزايدية
- Decreasing Sequence متتابعة تناقصية
- Constant Sequence متتابعة ثابتة

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- Scientific Calculator
- برامج رسومية

تعريف:

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير منتهية

Finite and Infinite Sequences

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيا (أى يمكن حصره أو عده) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (عدد لا نهائى من العناصر).

التهيئة

ناقش مع طلابك النمط (١، ٣، ٥، ٧، ...) ووجه إليهم بعض الأسئلة مثل:

- ما هى قاعدة النمط.
- اكمل هذا النمط إلى سبعة حدود.
- هل يمكن إيجاد الحد العاشر من هذا النمط .
- هل يمكن كتابة انماط أخرى بالقياس لهذا النمط.

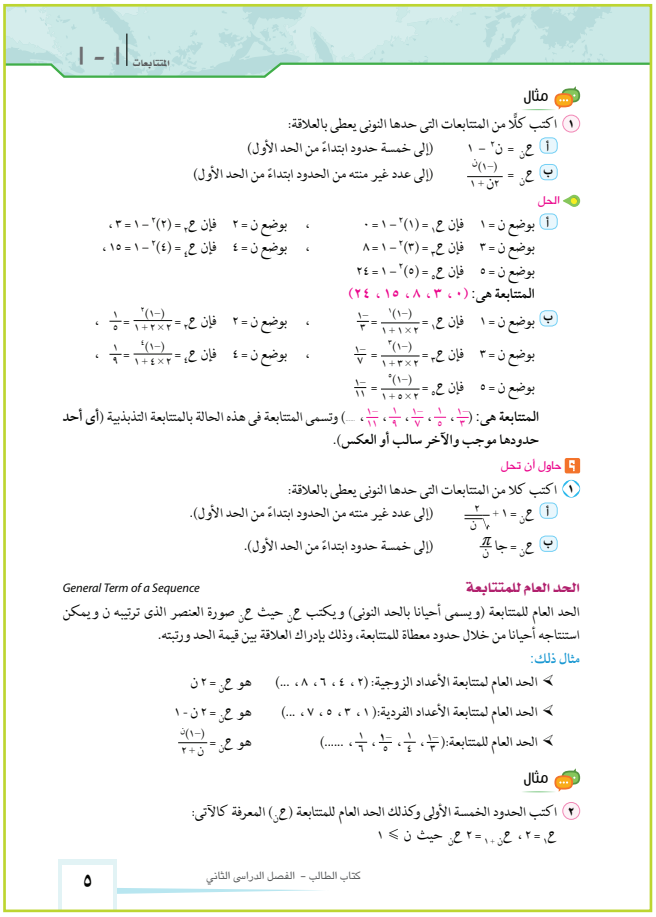
إجراءات الدرس

- في بند تعلم: أشر إلى طلابك بأن المتتابعة هي دالة بشرط أن يكون مجالها هو: {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ...} أو مجموعة جزئية من صـ+ أما مدى المتتابعة فهو مجموعة الأعداد الحقيقية ع.
- وضح إلى طلابك الفرق بين المتتابعة وبين المجموعة، من حيث الرمز، ترتيب حدودها، تكرار العناصر في المتتابعة، وعدم تكرارها في المجموعة.

فى بند تعريف:

وضح إلى الطلاب بأمثلة عددية الفرق بين المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية من خلال عصف ذهنى لدى الطلاب.

PDF Compressor Pro



المتتابعات | ١ - ١

مثال

(١) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

(أ) $ع_ن = ن^2 - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول)

(ب) $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن+٣}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول)

الحل

(أ) بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = (١)^2 - ١ = ٠$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = (٢)^2 - ١ = ٣$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = (٣)^2 - ١ = ٨$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = (٤)^2 - ١ = ١٥$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = (٥)^2 - ١ = ٢٤$

المتتابعة هى: (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤)

(ب) بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = \frac{(-١)^١}{١+١\times٢} = \frac{-١}{٣}$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = \frac{(-١)^٢}{١+٢\times٢} = \frac{١}{٥}$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = \frac{(-١)^٣}{١+٣\times٢} = \frac{-١}{٧}$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = \frac{(-١)^٤}{١+٤\times٢} = \frac{١}{٩}$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = \frac{(-١)^٥}{١+٥\times٢} = \frac{-١}{١١}$

المتتابعة هى: $(\frac{-١}{٣}، \frac{١}{٥}، \frac{-١}{٧}، \frac{١}{٩}، \frac{-١}{١١}، ...)$ وتسمى المتتابعة فى هذه الحالة بالمتتابعة التذبذبية (أى أحد حدودها موجب والآخر سالب أو العكس).

حاول أن تحل

(١) اكتب كلا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

(أ) $ع_ن = \frac{٢}{ن+١}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

(ب) $ع_ن = جا\frac{\pi}{ن}$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

الحد العام للمتتابعة *General Term of a Sequence*

الحد العام للمتتابعة (ويسمى أحيانا بالحد النونى) ويكتب $ع_ن$ حيث $ع_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن ويمكن استنتاجه أحيانا من خلال حدود معطاة للمتتابعة، وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد ورتبته.

مثال ذلك:

- الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) هو $ع_ن = ٢ن$
- الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) هو $ع_ن = ٢ن - ١$
- الحد العام للمتتابعة: $(\frac{١}{٣}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٥}، \frac{١}{٦}، .....)$ هو $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن+٢}$

مثال

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى:

$ع_١ = ٢$ ، $ع_{ن+١} = ٢ع_ن$ حيث $ن \geq ١$



الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فى العلاقة $ع_{ن+١} = ٢ع_ن$

بوضع ن = ١ $ع_٢ = ٢ع_١$ أى أن: $ع_٢ = ٢\times٢ = ٤ = ٢^2$ (بالتعويض عن $ع_١ = ٢$)

بوضع ن = ٢ $ع_٣ = ٢ع_٢$ أى أن: $ع_٣ = ٢\times٤ = ٨ = ٢^3$ (بالتعويض عن $ع_٢ = ٤$)

بوضع ن = ٣ $ع_٤ = ٢ع_٣$ أى أن: $ع_٤ = ٢\times٨ = ١٦ = ٢^4$ (بالتعويض عن $ع_٣ = ٨$)

بوضع ن = ٤ $ع_٥ = ٢ع_٤$ أى أن: $ع_٥ = ٢\times١٦ = ٣٢ = ٢^5$ (بالتعويض عن $ع_٤ = ١٦$)

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢)

الحد العام للمتتابعة $(ع_ن)$ هو: $ع_ن = ٢^ن$

أضف إلى معلوماتك

بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...).

فكر

١- كيف يمكنك التحقق من صحة الحل السابق؟

حاول أن تحل

(٢) اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة $(ع_ن)$ حيث: $ع_{ن+٢} = ع_{ن+١} + ع_ن$ حيث $ن \geq ١$ ، $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٣$

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية: *Increasing and Decreasing Sequences*

تأمل المتتابعات الآتية:

(١) (-٥ ، -١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، .....) (ماذا تلاحظ)

(٢) (٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، .....) (ماذا تلاحظ)

- فى المتتابعة الأولى: $-١ > -٥$ أى أن $ع_٢ > ع_١$ ، $٣ > -١$ أى أن $ع_٣ > ع_٢$ وهكذا بالنسبة لبقية الحدود، أى أن كل حد من حدود المتتابعة أكبر من الحد السابق له مباشرة.
- وفى المتتابعة الثانية: $٢ < ٤$ أى أن $ع_٢ < ع_١$ ، $١ < ٢$ أى أن $ع_٣ < ع_٢$ وهكذا أى أن كل حد من حدود المتتابعة أصغر من الحد السابق له مباشرة.

تعريف:

- تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ **تزايدية** إذا كان $ع_{ن+١} > ع_ن$
- تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ **تناقصية** إذا كان $ع_{ن+١} < ع_ن$

أضف إلى معلوماتك

المتتابعة الثابتة: جميع حدودها متساوية أى: $ع_ن = أ$ وقد تكون منتهية أو تكون غير منتهية.

مثال

(٣) بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.

(أ) $ع_ن = ٢ن + ٣$ (ب) $ع_ن = \frac{١}{٣ن - ١}$ (جـ) $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن+٣} + ٤$

بين إلى الطلاب بأنه يمكن كتابة حدود المتتابعة بإحدى طريقتين:

- إما بالتعويض عن قيم ن فى قاعدة المتتابعة كما جاء فى مثال (١).
- وإما عن طريق معرفة العلاقة بين حدودها كما جاء فى مثال (٢).

معلومات إثرائية:

- تحتاج إلى تدعيم طلابك بهذه المعلومة قبل حل مثال (٢)

الأعداد الأولية (Prime Number) يقال: إن العدد الصحيح الموجب أوليًّا إذا كانت مجموعة عوامله عاملين فقط أ، يكون العدد الصحيح أوليًّا إذا كان أكبر من الواحد ولا يقبل القسمة إلى نفسه والعدد ١ . يسمى العدد الصحيح الموجب غير الأولي عددًا مؤلفًا إذا كتب على الصورة: ب = أ ب حيث ب > أ > ١ ، ب > ب > ١

الأخطاء الشائعة:

يخطئ الطلاب أحيانا فى التفرقة بين رتبة الحد وقيمة الحد، فرتبة الحد $\in ص_+$ أما قيمة الحد فهى $\in ع$.

قد يخطئ الطلاب فى التفرقة بين المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية ، أكد اليهم بأن:

إذا كانت $ع_{ن+١} - ع_ن > ٠$ تكون المتتابعه تزايدية

إذا كانت $ع_{ن+١} - ع_ن < ٠$ تكون المتتابعة تناقصية

ولابد من استخدام هذا التعريف لأنه يعطى الحالة العامة ومن الخطأ المقارنة عن طريق الحدود العددية للمتتابعة.

بند فكر ص(٦):

نلاحظ أن كل حدٍّ تالٍ يساوي ضعف الحد السابق مباشرة.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

تابع مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (٥) ، (٦) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

(١) (أ) $ع_١ = ١ + ٢ = ٣$ ، $ع_٢ = ١ + \sqrt{٢}$ ، $ع_٣ = ١ + \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}$ أى أن المتتابعة هى $\{٣ ، ١ + \sqrt{٢} ، ١ + \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} ، .....\}$.

(ب) $ع_١ = ٠$ ، $ع_٢ = ١$ ، $ع_٣ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $ع_٤ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $ع_٥ = ٠,٥٩$

، المتتابعة هى $(٠ ، ١ ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢} ، ٠,٥٩)$.

PDF Compressor Pro

(٢) بوضع ن = ١ يكون ع٣ = ع٢ + ع١ = ٢ + ٣ = ٥
بوضع ن = ٢ يكون ع٤ = ع٣ + ع٢ = ٥ + ٢ = ٧
بوضع ن = ٣ يكون ع٥ = ع٤ + ع٣ = ٧ + ٥ = ١٢
بوضع ن = ٤ يكون ع٦ = ع٥ + ع٤ = ١٢ + ٧ = ١٩
المتتابعة هي (٢، ٣، ٥، ٧، ١٢، ١٩).

(٣) أ $ع_{ن+١} - ع_ن = (٣ - \frac{٢}{ن+١}) - (٣ - \frac{٢}{ن})$
$= \frac{-٢}{ن(ن+١)} < ٠$
∴ $ع_{ن+١} < ع_ن$ أي أن المتتابعة تناقصية.

ب $ع_{ن+١} - ع_ن = (\frac{١}{٢})^{ن+١} - (\frac{١}{٢})^ن$
$= -\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢})^ن < ٠$ ∴ المتتابعة تناقصية.

ج $ع_١ = -٢$ ، $ع_٢ = ٤$ ، $ع_٣ = -٨$ ، $ع_٤ = ١٦$
المتتابعة هي (-٢، ٤، -٨، ١٦، .....) نلاحظ أن الحدود الفردية للمتتابعة $ع_٣ < ع_١$ تناقصية، بينما الحدود الزوجية $ع_٤ > ع_٢$ تزايدية؛ لذلك فإن المتتابعة ليست تزايدية وليست تناقصية.

قبل البدء فى حل التمارين استرجع مع طلابك متى تكون المتتابعة ثابتة بمعنى أن جميع حدودها متساوية أى $ع_ن = أ$ حيث $أ \in ع$ وقد تكون منتهية أو غير منتهية.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش مع طلابك بعض تمارين (١-١) من ص (٧) إلى ص (٨) وتابع إجاباتهم.

إجابات:

(١) $ص_+$ أو مجموعة جزئية منها.
(٢) $ع_٧ = ٣ + ٩٨ = ١٠١$
(٣) $ع_٤ = \frac{٢}{٥}$
(٤) $ع_٢ = ١$
(٥) $ن = ٥$
(٦) $ع_ن = ن^٣$
(٧) $ع_ن = (-١)^ن \times ن^٢$
(٨) >
(٩) =
(١٠) <
(١١) ب
(١٢) د
(١٣) أ غير منتهية. ب منتهية.
ج غير منتهية. د منتهية.
(١٤) أ (٢، ٦، ١٢، ٢٠، ٣٠)
ب $(-\frac{١}{٣}، -١، ١، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٥})$
ج $(\frac{١}{٣}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٢٧}، \frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٤٣})$.

الحل

أ نوجد $ع_{ن+١}$ كالآتي: $ع_{ن+١} = ٢(ن+١) + ٣ = ٢ن + ٥$
نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_ن$: $ع_{ن+١} - ع_ن = (٢ن + ٥) - (٢ن + ٣) = ٢ > ٠$
$ع_{ن+١} > ع_ن$ أي أن المتتابعة تزايدية لجميع قيم ن

ب نوجد $ع_{ن+١}$ كالآتي: $ع_{ن+١} = \frac{١}{٣(ن+١)-١} = \frac{١}{٣ن+٢}$
نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_ن$: $ع_{ن+١} - ع_ن = \frac{١}{٣ن+٢} - \frac{١}{٣ن-١} = \frac{٣ن-١-٣ن-٢}{(٣ن-١)(٣ن+٢)} = \frac{-٣}{(٣ن-١)(٣ن+٢)} < ٠$
$ع_{ن+١} < ع_ن$ أي أن المتتابعة تناقصية لجميع قيم ن

ج $ع_{ن+١} - ع_ن = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن+١)} - \frac{(-١)^ن}{٢ن} = \frac{-(-١)^ن}{٢(ن+١)} + \frac{(-١)^ن(ن+١)}{٢ن(ن+١)}$
$= (-١)^ن [\frac{١}{٢(ن+١)} + \frac{ن+١}{٢ن(ن+١)}] = (-١)^ن [\frac{٢ن+١}{٢ن(ن+١)}]$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردي وسالب عندما ن عدد زوجي أي أن المتتابعة ليست تزايدية ولا تناقصية.

حاول أن تحل

(٢) بين أيًا من المتتابعات ($ع_ن$) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.
أ $ع_ن = ٣ - \frac{٢}{ن}$ ب $ع_ن = (\frac{١}{٣})^ن$ ج $ع_ن = (-٢)^ن$

تمـارين (١ - ١)

أكمل ما يأتي:

(١) المتتابعة هي دالة مجالها هو ..... أ .....
(٢) الحد السابع للمتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = ٢ن^٢ + ٣$ هو .....
(٣) الحد الرابع فى للمتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = \frac{\sqrt{ن}}{ن+١}$ هو .....
(٤) فى المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_{ن+١} = ن$ $ع_ن$ حيث $ن \leq ١$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_٣ =$ .....
(٥) فى المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = ٣ن^٣ - ١$ إذا كان $ع_ن = ٧٤$ فإن ن = ...
(٦) الحد النونى للمتتابعة (١، ٨، ٢٧، ٦٤، .....) هو .....
(٧) الحد النونى للمتتابعة (-١، ٤، -٩، ١٦، ...) هو .....

أكمل ما يأتي باستخدام أحد الرموز: <، >، =

(٨) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان: $ع_{ن+١}$ ..... $ع_ن$ لكل $ن \geq ١$
(٩) تكون المتتابعة ثابتة إذا كان: $ع_{ن+١}$ ..... $ع_ن$ لكل $ن \geq ١$
(١٠) تكون المتتابعة تزايدية إذا كان: $ع_{ن+١}$ ..... $ع_ن$ لكل $ن \geq ١$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) المتتابعة التى حدها النونى $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل:
أ متتابعة تزايدية ب متتابعة تناقصية ج متتابعة ثابتة د متتابعة تذبذبة

(١٢) الحد العام للمتتابعة ((٢ × ٣)، (٣ × ٤)، (٤ × ٥)، (٥ × ٦)، .....) هو
أ (ن - ١)(ن + ١) ب ن(ن + ١) ج ٢ن(ن + ١) د (ن + ١)(ن + ٢)

أجب عن الأسئلة الآتية:

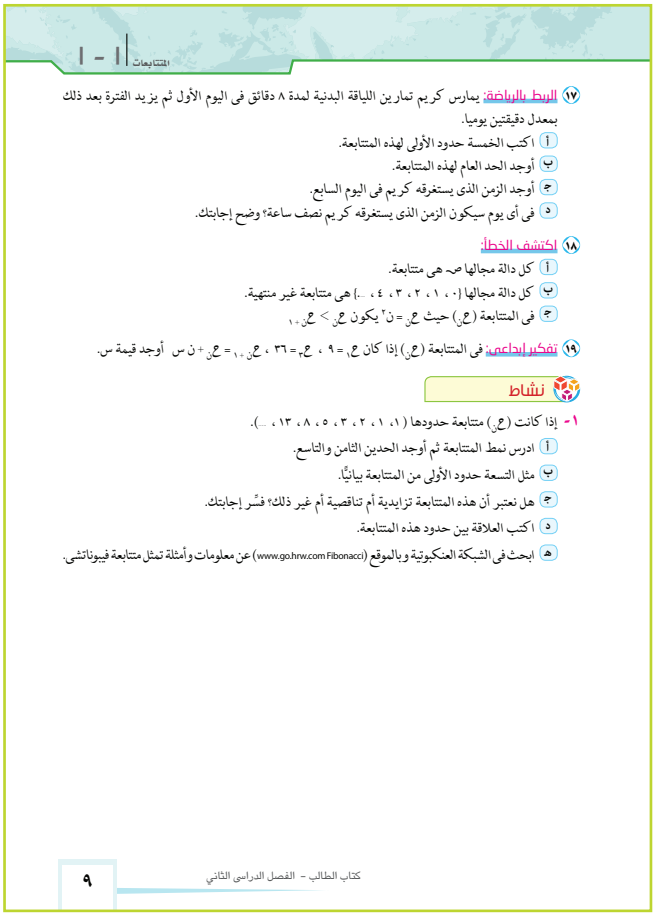
(١٢) بين المتتابعات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية:
أ (١، ٤، ٧، ١١، .....)
ب (٣، ٥، ٧، ٩، .....، ٢١)
ج المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = ن^٢ - ١$ ، $ن \in ص^+$
د المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = \frac{٢}{ن} + ٣$ ، $ن \in$ {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

(١٤) اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:
أ $ع_ن = ن + ن^٢$ ب $ع_ن = \frac{١}{٥ن - ٣}$ ج $ع_ن = (\frac{١}{٣})^ن$
د $ع_ن = جا(\frac{ن\pi}{٤})$ هـ $ع_ن = (-١)^ن (ن-٢)^٢$ و $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$

(١٥) اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية:
أ (٢، ٥، ٨، ١١، ...) ب $(\frac{١}{٢}، \frac{٢}{٣}، \frac{٣}{٤}، \frac{٤}{٥}، ...)$
ج (١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...) د $(١، \frac{١}{١٠}، \frac{١}{١٠٠}، \frac{١}{١٠٠٠}، ...)$
هـ (-١، ٢، -٤، ٨، -١٦، ...)
و (جتا $\frac{\pi}{٣}$ ، جتا π ، جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ ، جتا $\frac{٧\pi}{٣}$ ، ...)

(١٦) بين أيًا من المتتابعات ($ع_ن$) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك فى كل مما يأتي:
أ $ع_ن = ٣ن + ٥$ ب $ع_ن = \frac{١}{ن} + ٢$
ج $ع_ن = (\frac{١}{٣})^{ن+١}$ د $ع_ن = (-١)^ن (ن^٢ + ١)$

PDF Compressor Pro



١ - ١ المتتابعات

١٧ الربط بالرياضة: يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميا.
أ اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.
ب أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.
ج أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.
د فى أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة؟ وضح إجابتك.

١٨ اكتشف الخطأ:
أ كل دالة مجالها صـ هى متتابعة.
ب كل دالة مجالها {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...} هى متتابعة غير منتهية.
ج فى المتتابعة (ع ن) حيث ع ن = ن٢ يكون ع ن < ع ن+١

١٩ تفكير إبداعى: فى المتتابعة (ع ن) إذا كان ع ١ = ٩ ، ع ٣ = ٣٦ ، ع ن+١ = ع ن + ن س أوجد قيمة س.

نشاط

١- إذا كانت (ع ن) متتابعة حدودها (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...).
أ ادرس نمط المتتابعة ثم أوجد الحدين الثامن والتاسع.
ب مثل التسعة حدود الأولى من المتتابعة بيانيًا.
ج هل تعتبر أن هذه المتتابعة تزايدية أم تناقصية أم غير ذلك؟ فسّر إجابتك.
د اكتب العلاقة بين حدود هذه المتتابعة.
هـ ابحث فى الشبكة العنكبوتية وبالموقع (www.go.hrw.com Fibonacci) عن معلومات وأمثلة تمثل متتابعة فيبوناتشى.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ٩

د $\left(\frac{١}{٢\sqrt{٢}}, ١, \frac{١}{٢\sqrt{٢}}, ٠, -\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right)$

هـ (-١، ٠، -١، ٤، -٩)

و $\left(-١, \frac{١}{٤}, \frac{-١}{٩}, \frac{١}{١٦}, \frac{-١}{٢٥}\right)$

١٥ أ ع ن = ٣ن - ١ ب ع ن = $\frac{ن}{ن+١}$

ج ع ن = ن٣ د ع ن = $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ن-١}$

هـ ع ن = (-١)ن (٢)ن-١

و ع ن = حتا$\left(\frac{ن\pi}{٣}\right)$، ن ∈ صـ+

١٦ أ تزايدية ب تناقصية

ج تناقصية د غير ذلك

١٧ أ (٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦) ب ع ن = ٢ن + ٦

ج ٢٠ د ٢ن + ٦ = ٣٠ ∴ ن = ١٢

الأخطاء الشائعة:

ناقش مع طلابك ما ورد في مسألة رقم (١٨) ص ٩ بخصوص الأخطاء الشائعة وأكد على الآتى:

مجال المتتابعة هو صـ+ أو مجموعة جزئية منها .

لايمكن أن يكون العدد (صفر) ضمن ترتيب حدود المتتابعة فى المتتابعة (ع ن) حيث ع ن = ن٢ هى متتابعة مربعات الأعداد ولذلك فإن أى حد تالى يكون أكبر من الحد السابق له مباشرة.

إجابات

١٨ أ هى صـ+ ب {١، ٢، ٣، ٤، .....}

ج ع ن+١ > ع ن لأن المتتابعة تزايدية.

فى بند تفكير إبداعى:

يوضح العلاقة بين الحدود ع١، ع٢، ع٣ ثم استخدام العلاقة ع٣ = ع٢ + ع١ لإيجاد قيمة المجهول س كشكل غير نمطى للتمارين المعتادة.

١٩ بوضع ن = ١ ∴ ع٢ = ع١ + س (١)

بوضع ن = ٢ ∴ ع٣ = ع٢ + ٢س (٢)

٣٦ = ٩ + ٣س ∴ س = ٩

سبق فى تقديم هذه الوحدة أننا أشرنا إلى متتابعة فيبوناتشى وعلمنا أن كل عدد فى هذه المتتابعة هو ناتج من مجموع العددين السابقين له مباشرة، وتتحدد قاعدة المتتابعة كالآتى:

ع ن+٢ = ع ن + ع ن+١، لكل ن = صـ+، ع١ = ع٢ = ١

فى بند نشاط:

إجابة أسئلة النشاط:

أ أى حد = مجموع الحدين السابقين له مباشرة

ع٨ = ٢١ ، ع٩ = ٣٤

ج ليست تزايدية وليست تناقصية لأن ع١ = ع٢ = ١

د ع ن+٢ = ع ن + ع ن+١ لكل ن ∈ صـ+ ، ع١ = ع٢ = ٣

التقدير	أداء الطالب
ممتاز	يستنتج الطالب كتابة النمط و يكتب قاعدته، و يجيب على جميع الأسئلة دون أخطاء
جيد جدًا	يجيب الطالب على جميع الأسئلة، ولكن قد يخطأ فى الناتج النهائى لبعض الأسئلة
جيد	يجيب الطالب على معظم الأسئلة و يمثل حدود المتتابعة مع وجود أخطاء قليلة
مقبول	يجيب الطالب على بعض الأسئلة، و يخطأ فى البعض الآخر و يحتاج إلى بعض المساعدة.
ضعيف	لا يستطيع الطالب الإجابة على أسئلة النشاط، و يحتاج إلى المساعدة والتوجيه.

تمرين إثرائى :

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة (ع ن)

حيث ع ن+٢ = ع ن+١ - ع ن لكل ن ≥ ١ ، ع١ = ١، ع٢ = ٢

PDF Compressor Pro

١ - ٢ المتسلسلات ورمز التجميع
Series and Summation Notation

خلفية

سبق للطالب دراسة المتتابعات وتعرف على المتتابعات المنتهية وغير المنتهية وكيفية إيجاد الحد العام لبعضها والمتتابعات التزايدية والتناقصية ثم التمثيل البيانى لهذه المتتابعة ، كما عرف أن المتتابعة هى قائمة من الأعداد يفصل كل عدد عن الآخر بالعلامة (،) فى حين أن المتسلسلة عملية جمع هذه الأعداد أى استبدال العلامة (+) بدلاً من العلامة (،) كما يستخدم رمز التجميع "Σ"لكتابة المتسلسلة بصورة مختصرة.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا لدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يدرك مفهوم المتسلسلة.
- يتعرف على المتسلسلة المنتهية والمتسلسلة غير المنتهية
- يستنتج الخواص الجبرية للتجميع.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلة

مفردات أساسية:

متسلسلة - متسلسلة منتهية - متسلسلة غير منتهية - رمز التجميع

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض بيانات Datashow - آلة حاسبة بيانية- حاسب آلى مزود بالإنترنت

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

الكتاب المدرسى من صفحة (١٠) إلى صفحة (١٣) الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة:

وضح لطلابك الفرق بين المتتابعة والمتسلسلة، فالمتتابعة هى مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة، ويفصل بين حدودها الإشارة (،) ولكن إذا استبدلنا إشارة (،) بإشارة الجمع (+) فإن المتتابعة تسمى متسلسلة.


الوحدة الأولى

المتسلسلات ورمز التجميع

١ - ٢

Series and Summation Notation

في لغتنا اليومية نستخدم الكلمتين "المتتابعة" و "المتسلسلة" كمترادفين، وعلى الرغم من وجود ترابط بينهما فى المعنى، فإن هناك فرقًا بينهما فى الرياضيات فالمتتابعة هى عبارة عن قائمة مرتبة من الأعداد فى حين أن المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة.
فمثلا: (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ..) هى متتابعة بينما ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + .. هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة، ويمكن استخدام رمز التجميع "Σ" ويقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصور مختصرة.

تعلم

تعريف

المتسلسلة المنتهية: Finite Series

تكتب بالصورة: $ع_1 + ع_2 + ع_3 + ... + ع_ن$ حيث ن عدد صحيح موجب، $ع_ن$ هو الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة

ففى المتسلسلة المنتهية: $ا_1 + ا_2 + ا_3 + ... + ا_ن$

يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{ر=1}^{ن} ا_ر$ وتقرأ مجموع $ا_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

مثال

١ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك.

أ $\sum_{ر=1}^{4} ر^2$ ب $\sum_{ر=1}^{7} (2ر - 1)$ ج $\sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{ر+1} - \frac{1}{ر}$

الحل

أ $\sum_{ر=1}^{4} ر^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

ب $\sum_{ر=1}^{7} (2ر - 1) = (2\times1 - 1) + (2\times2 - 1) + (2\times3 - 1) + (2\times4 - 1) + (2\times5 - 1) + (2\times6 - 1) + (2\times7 - 1)$

$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

ج $\sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{ر} - \frac{1}{ر+1} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}$

$= 1 - \frac{1}{ن+1} = \frac{ن+1-1}{ن+1} = \frac{ن}{ن+1}$

سوف تتعلم:
- مفهوم المتسلسلة.
- المتسلسلة المنتهية.
- المتسلسلة غير المنتهية.
- الخواص الجبرية للتجميع.

المصطلحات الأساسية
- Series متسلسلة
- Finite Series متسلسلة منتهية
- Infinite Series متسلسلة غير منتهية
- Summation Notation رمز التجميع

تذكر أن

قيمة ر الأخيرة ← ن ← رمز التجميع Σ ← ع ر ← قيمة ر الأولى

قاعدة المتسلسلة

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ١٠

إجراءات الدرس:

اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة لمتتابعة، ثم اطلب إليهم التعبير بكتابتها إلى متسلسلة مستخدمين رمز التجميع (Σ)

أكد إلى الطلاب بأن الصورة $\sum_{ر=1}^{ن} ا_ر$

تقرأ مجموع $ا_ر$ من العناصر من ر = ١ إلى ر = ن

ثم اطلب إليهم كتابة مفكوك بعض المتسلسلات كما بالمثال المحلول.

أشر إلى الطلاب بأن المتسلسلة المنتهية تحتوى على عدد معلوم (ن) من الحدود .

الأخطاء الشائعة:

يستخدم بعض الطلاب احيانًا التعبير " مجموع حدود المتسلسلة؛ وهذا خطأ والصواب هو " مجموع حدود المتتابعة " الذى يعرف بالمتسلسلة

- أشر إلى الطلاب أن المتسلسلة غير المنتهية ليس لها ناتج عددى ويستخدم الرمز ∞ للدلالة علي ذلك .
- ناقش مع طلابك الخواص الجبرية لرمز التجميع (Σ) وأن يتم الالتزام بالتمارين المعطاه حتى الدرجة الثانية.

PDF Compressor Pro

ناقش مثال (٣) مع طلابك بطريقتين:

- طريقة استخدام التعويض المباشر وهى تستخدم لعدد قليل جدًا من الحدود.
- طريقة استخدام الخواص الجبرية للتجميع وهى تصلح لجميع الحالات كطريقة عامة.

الربط بالتكنولوجيا:

- تتبع نفس الخطوات الخاصة باستخدام الآلة الحاسبة ص (١٢) لإيجاد ناتج المتسلسلة وقسم طلاب فصلك إلى مجموعات واطلب إلى كل مجموعة إيجاد ناتج متسلسلة معطاة وتابع إجاباتهم .
- نبه الطلاب أن ناتج المتسلسلة باستخدام الحاسبة هو للتأكد من الناتج النهائى ولايعفى الطالب عن استخدام خطوات الحل التفصيلية .

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (١١) ، ص (١٢) وتابع إجاباتهم.

إجابات

(١) أ $\sum_{ر=١}^{٥}(١+ر^{٢}) = (١+١)+(١+٤)+(١+٩)$

$+(١+١٦)+(١+٢٥)$

$= ٥+٥٥ = ٦٠$

ب $\sum_{ر=١}^{٩}(٣ر+٢) = (٢+٣)+(٢+٦)+(٢+٩)$

$+(٢+١٢)+(٢+١٥)+(٢+١٨)+(٢+٢١)$

$+(٢+٢٤)+(٢+٢٧)$

$= ١٨+\frac{٩}{٢}\times٣٠ = ١٥٣$

جـ $\sum_{ر=١}^{ن}(\frac{١}{ر+١}-\frac{١}{ر+٢}) =$

$(\frac{١}{٣}-\frac{١}{٢})+(\frac{١}{٤}-\frac{١}{٣})+(\frac{١}{٥}-\frac{١}{٤})+...+(\frac{١}{ن+١}-\frac{١}{ن+٢})$

$= \frac{١}{٢}-\frac{١}{ن+٢} = \frac{٢-ن-٢}{(ن+٢)٢} = \frac{-ن}{ن+٢}$

إجابة حاول أن تحل ص (١١)

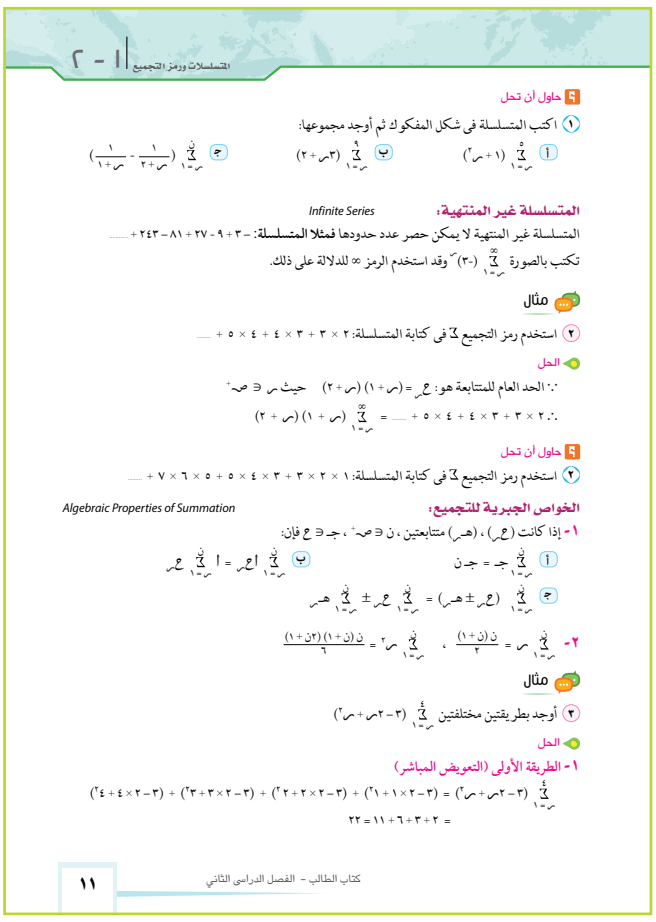
(٢) ∵ الحد العام للمتتابعة هو:

$ع_ر = (٢ر-١)٢^{ر}(ر+١)$ حيث $ر \in ص^{+}$

∴ $١\times٢+٣\times٤+٥\times٦+٧\times... =$

$\sum_{ر=١}^{\infty}(٢ر-١)٢^{ر}(ر+١)$

إجابة حاول أن تحل ص (١٢)



المتسلسلات ورمز التجميع ١ - ٢

حاول أن تحل

(١) اكتب المتسلسلة فى شكل المفكوك ثم أوجد مجموعها:

أ $\sum_{ر=١}^{٥}(١+ر^{٢})$ ب $\sum_{ر=١}^{٩}(٣ر+٢)$ جـ $\sum_{ر=١}^{ن}(\frac{١}{ر+١}-\frac{١}{ر+٢})$

المتسلسلة غير المنتهية: Infinite Series

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها فمثلا المتسلسلة: $-٣+٩-٢٧+٨١-٢٤٣+...$

تكتب بالصورة $\sum_{ر=١}^{\infty}(-٣)^{ر}$ وقد استخدم الرمز ∞ للدلالة على ذلك.

مثال

(٢) استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة: $٢\times٣+٣\times٤+٤\times٥+...$

الحل

∵ الحد العام للمتتابعة هو: $ع_ر = (ر+١)(ر+٢)$ حيث $ر \in ص^{+}$

∴ $٢\times٣+٣\times٤+٤\times٥+... = \sum_{ر=١}^{\infty}(ر+١)(ر+٢)$

حاول أن تحل

(٢) استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة: $١\times٢+٣\times٣+٥\times٤+٧\times٥+...$

الخواص الجبرية للتجميع: Algebraic Properties of Summation

١- إذا كانت $(ع_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، ن $\in ص^{+}$ ، جـ $\in ع$ فإن:

أ $\sum_{ر=١}^{ن} جـ = جـن$ ب $\sum_{ر=١}^{ن} اع_ر = ا\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر$

جـ $\sum_{ر=١}^{ن}(ع_ر \pm هـ_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ع_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} هـ_ر$

٢- $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

مثال

(٣) أوجد بطريقتين مختلفتين $\sum_{ر=١}^{٤}(٣-٢ر+ر^{٢})$

الحل

١- الطريقة الأولى (التعويض المباشر)

$\sum_{ر=١}^{٤}(٣-٢ر+ر^{٢}) = (٣-٢\times١+١^{٢})+(٣-٢\times٢+٢^{٢})+(٣-٢\times٣+٣^{٢})+(٣-٢\times٤+٤^{٢})$

$= ٢+٣+٦+١١ = ٢٢$



الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

٢- الطريقة الثانية (استخدام الخواص الجبرية للتجميع)

$\sum_{ر=١}^{٤}(٣-٢ر+ر^{٢}) = \sum_{ر=١}^{٤}٣ - ٢\sum_{ر=١}^{٤} ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$

$= ٣\times٤ - ٢\times\frac{٤(٤+١)}{٢} + \frac{٤(٤+١)(٢\times٤+١)}{٦}$

$= ١٢ - ٢\times\frac{٤\times٥}{٢} + \frac{٤\times٥\times٩}{٦}$

$= ١٢ - ٢٠ + ٣٠ = ٢٢$

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة:

Using the Scientific Calculator to Find the Result of a Series

- نضغط على مفتاح رمز التجميع Σ حسب اللون المحدد لذلك.
- نكتب قاعدة المتتابعة $(٣-٢ر+ر^{٢})$ مثلا كالآتى:

χ^{2} (×)) ALPHA +) ALPHA (×)) 2 − 3

- نستخدم المفتاح (REPLAY) للتنقل كالآتى:
- لأعلى نكتب 4 ولأسفل نكتب 1
- نضغط على المفتاح = ليعطى على الشاشة الناتج ٢٢

حاول أن تحل

(٤) أوجد بطريقتين: $\sum_{ر=١}^{ن}(٢ر^{٢}-٣ر+٥)$ علما بأن:

$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

تمـارين (١ - ٢)

(١) أكمل ما يأتى:

أ المتسلسلة: $٥+١٠+١٥+٢٠+...+٥٠$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة .....

ب المتسلسلة: $٧\times١+٧\times٢+٧\times٣+...+٧\times٢٠$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة .....

جـ المتسلسلة: $\frac{١}{٢}+\frac{١}{٤}+\frac{١}{٨}+\frac{١}{١٦}+...$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة .....

د المتسلسلة: $٩+٩٩+٩٩٩+٩٩٩٩+...$ إلى ن حدًا، تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة .....

(٢) اكتب المتسلسلات التالية مستخدما رمز التجميع:

أ $١+٢+٣+٤+٥+...+$ ..... $= ٢٠$

ب $٢+٤+٦+٨+١٠+...+$ ..... $= ٦٠$

جـ $٣+٦+٩+١٢+١٥+١٨+...+$ ..... $= ٢١$

د $٢+١+\frac{١}{٢}+\frac{١}{٤}+\frac{١}{٨}+...+$ .....

هـ $١+٤+٩+١٦+...+$ ..... $= ٦٤$

و $\frac{١}{٥}+\frac{١}{١٠}+\frac{١}{١٥}+\frac{١}{٢٠}+...+$ ..... $+\frac{١}{٥٠}$

PDF Compressor Pro

أ الطريقة الأولى

$$\sum_{ر=1}^{5} (٢ر^{٢} - ٣ر + ٥) = (٢ - ٣ + ٥) + (٨ - ٦ + ٥) + (١٨ - ٩ + ٥) + (٣٢ - ١٢ + ٥) + (٥٠ - ١٥ + ٥)$$

$$= ٤ + ٧ + ١٤ + ٢٥ + ٤٠ = ٩٠$$

ب الطريقة الثانية:

$$\sum_{ر=1}^{5} (٢ر - ٣ر + ٥)$$

$$= ٢\sum_{ر=1}^{5} ر^{٢} - ٣\sum_{ر=1}^{5} ر + \sum_{ر=1}^{5} ٥$$

$$= ٢ \times \frac{٥(٥+١)(٢\times٥+١)}{٦} - ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} + ٥ \times ٥$$

$$= ٢ \times \frac{٥\times٦\times١١}{٦} - ٣ \times \frac{٥\times٦}{٢} + ٢٥$$

$$= ٢ \times ٥٥ - ٣ \times ١٥ + ٢٥ = ٩٠$$

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش مع طلابك ما جاء فى تمارين الدرس الثانى ص (١٢) ، ص(١٣) وتحقق من صحة إجاباتهم

الأخطاء الشائعة:

فى سؤال رقم (٥) ص (١٣) أكد إلى طلابك تجنب الأخطاء الشائعة الآتية:

بين للطلاب الفرق بين المتسلسلة والمتتابعة فالمتتابعة هى عبارة عن قائمة من الأعداد التى مجالها صـ+ أو مجموعة جزئية منها ، بينما المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة.

إجابات تمارين (١-٢):

(١) أ $\sum_{ر=1}^{10} ٥ر$ ب $\sum_{ر=1}^{20} ٧ر$ ج $\sum_{ر=1}^{\infty} (-\frac{١}{٢})^{ر}$

د لاحظ أن: $٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ...$

$$= (١٠^{١} - ١) + (١٠^{٢} - ١) + (١٠^{٣} - ١) + ... + (١٠^{ن} - ١)$$

$$\therefore ... + ٩٩٩ + ٩٩ + ٩ = \sum_{ر=1}^{\infty} (١٠^{-ر})$$

(٢) أ $\sum_{ر=1}^{20} ر$ ب $\sum_{ر=1}^{30} ٢ر$ ج $\sum_{ر=1}^{7} ٣ر$

د $\sum_{ر=1}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{-ن}$ هـ $\sum_{ر=1}^{ن} ر^{٢}$ و $\sum_{ر=1}^{10} \frac{١}{٥ر}$

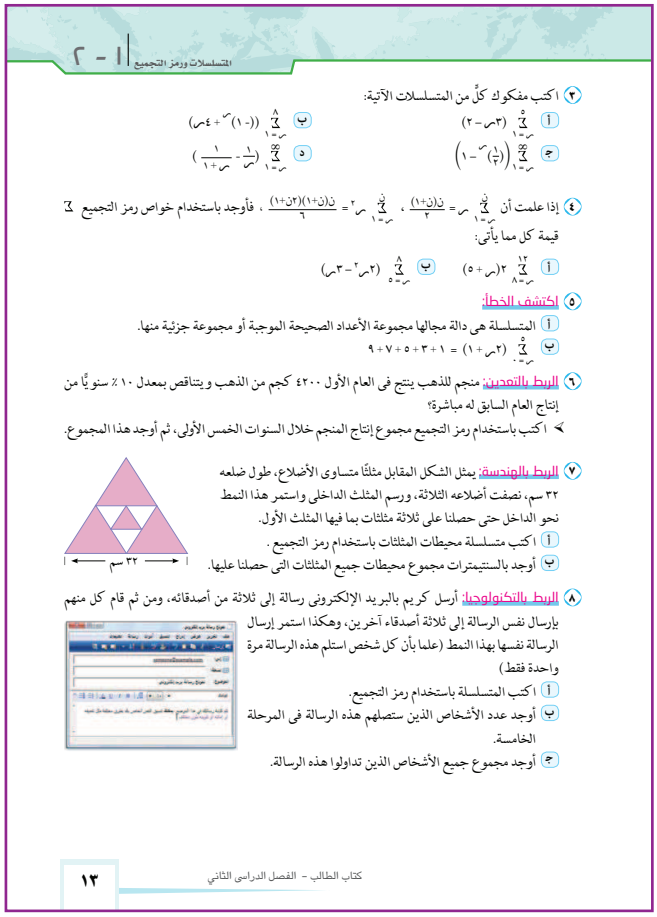
(٣) أ $(١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣)$

ب $(٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ١٩ + ٢٥ + ٢٧ + ٣٣)$

ج $(-\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤} - \frac{٧}{٨} - \frac{١٥}{١٦} - \frac{٦٣}{٦٤} - ....)$

د $(١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + ...)$

(٤) أ ١٥٠ ب ٢٧٠



المتسلسلات ورمز التجميع ١ - ٢

(٣) اكتب مفكوك كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ر=1}^{ن} (٣ر - ٢)$ ب $\sum_{ر=1}^{ن} ((-١)^{ر} + ٤ر)$

ج $\sum_{ر=1}^{ن} (\frac{١}{٢})^{ر-١}$ د $\sum_{ر=1}^{ن} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر})$

(٤) إذا علمت أن $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=1}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع Σ قيمة كل مما يأتى:

أ $\sum_{ر=1}^{١٢} ٢(ر + ٥)$ ب $\sum_{ر=5}^{٨} (٢ر^{٢} - ٣ر)$

(٥) اكتشف الخطأ:

أ المتسلسلة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها.

ب $\sum_{ر=1}^{٤} (٢ر + ١) = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩$

(٦) الربط بالتعدين: منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ويتناقص بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج العام السابق له مباشرة؟

أكتب باستخدام رمز التجميع مجموع إنتاج المنجم خلال السنوات الخمس الأولى، ثم أوجد هذا المجموع.

(٧) الربط بالهندسة: يمثل الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع، طول ضلعه ٣٢ سم، نصفت أضلاعه الثلاثة، ورسم المثلث الداخلى واستمر هذا النمط نحو الداخل حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.

أ اكتب متسلسلة محيطات المثلثات باستخدام رمز التجميع .

ب أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات جميع المثلثات التى حصلنا عليها.

٣٢ سم

(٨) الربط بالتكنولوجيا: أرسل كريم بالبريد الإلكترونى رسالة إلى ثلاثة من أصدقائه، ومن ثم قام كل منهم بإرسال نفس الرسالة إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال الرسالة نفسها بهذا النمط (علما بأن كل شخص استلم هذه الرسالة مرة واحدة فقط)

أ اكتب المتسلسلة باستخدام رمز التجميع.

ب أوجد عدد الأشخاص الذين ستصلهم هذه الرسالة فى المرحلة الخامسة.

ج أوجد مجموع جميع الأشخاص الذين تداولوا هذه الرسالة.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ١٣

فى بند اكتشف الخطأ: تابع إجابات الطلاب وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة مع تفسير الخطأ

(٥) أ المتتابعة بدلًا من المتسلسلة

ب $\sum_{ر=1}^{5} (٢ر + ١) = ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١$

(٦) $\sum_{ر=1}^{5} ٤٢٠٠ (٠,٩)^{ر-١} = ١٧١٩٩,٤٢$ كجم

(٧) أ $\sum_{ر=1}^{3} ٣ (٢)^{ر-٦}$ ب ١٦٨

الربط بالتكنولوجيا: (عمل تعاونى)

- يوضح هذا التمرين ارتباط المتسلسلات بقضايا من البيئة المحيطة بالطلاب.
- كلف الطلاب بإجراء تنفيذ النشاط بشكل تعاونى بأن يرسلوا لاصدقائهم بريد إلكترونى ثم يحاولون الإجابة بشكل عملى على الأسئلة المطروحة:

(٨) أ $\sum_{ر=1}^{\infty} ٣^{-ن} = (... + ٢٧ + ٩ + ٣ + ١)$

ب عدد الأشخاص فى المرة الخامسة = ٨١

ج $\sum_{ر=1}^{5} ٣^{-ن} = ١٢١$

PDF Compressor Pro

١ - ٣ المتتابعة الحسابية

Arithematic Sequencies



خلفية

سبق للطالب دراسة المتتابعات بوجه عام، وفي هذا الدرس سيدرس نوعًا خاصًا من المتتابعات يكثر استخدامه في الحياة العملية وهذا النوع من المتتابعات يكون فيه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ء).

أي أن ء = أي حد من حدود المتتابعة - الحد السابق له مباشرة.

وفي هذا الدرس يستطيع الطالب تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًا، ويعين المتتابعة الحسابية متى علم حدَّها الأول والأساس، ويُدخل عددًا من الأوساط الحسابية بين حدين غير متتالين.

مخرجات الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف المتتابعة الحسابية
- يمثل المتتابعة الحسابية بيانيًا.
- يوجد الحد النوني للمتتابعة الحسابية.
- يعين المتتابعة الحسابية بمعرفة حدها الأول والأساس.
- يدخل عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين.

مفردات أساسية

متتابعة حسابية - حد نوني - أساس المتتابعة الحسابية - رتبة الحد - وسط حسابي.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب (geogebra)

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - التفكير الناقد.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي

مصادر التعلم:

كتاب المدرسة من ص (١٤) إلى ص (٢٠).

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التمهيد:

ابدأ باستعراض مقدمة الدرس كمثال لتقديم المتتابعة الحسابية.

عرض الدرس

أشر إلى الطلاب بإن دعاء يزداد معدل قراءتها يوميًّا ٥ صفحات؛ أي أن:

عدد الصفحات في أي يوم - عدد الصفحات في اليوم السابق له مباشر = ٥ ومن هذا التقديم يستطيع الطالب أن يستنتج تعريف المتتابعة الحسابية .

- اطلب إلى طلابك عمل عصف ذهني لمواقف حياتية، تتطلب فيها تكوين متتابعة حسابية.
- أعطِ طلابك مجموعة من المتتابعات، واطلب إليهم تحديد المتتابعة الحسابية في هذه المجموعات.
- درب طلابك على استخدام المستوى الاحداثي المتعامد في التمثيل البياني لحدود المتتابعة.

PDF Compressor Pro

فى بند التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية:

أشر إلى الطلاب بأن مجموعة النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يؤكد أن هذه المتتابعة هى دالة خطية من الدرجة الأولى فى ن .

استخدام التكنولوجيا:

درب طلابك على مهارة استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد حدود المتتابعة الحسابية كما ورد فى ص (١٦).

فى بند تفكير ناقد:

وضح لطلابك أن المتتابعة الحسابية أساسها يساوى صفرًا

إجابات:

تكون المتتابعة الحسابية:

أ تزايدية إذا كانت ء > ٠ ، ب تناقصية إذا كانت ء < ٠

ج ثابتة إذا كانت ء = ٠ ، فالمتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ....) هى متتابعة حسابية ثابتة أساسها صفر.

الأخطاء الشائعة:

قد يخطئ بعض الطلاب فى التفرقة بين رتبة الحد (ن) وقيمة الحد ($ع_ن$).

أكد على الطلاب بأنه فى أى متتابعة حسابية حدها الأولى (ا) وأساسها (ء) يكون: $ع_ن = ا + (ن - ١)ء$ حيث ا ، ء ثابتان

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

إجابات

(١) أ المتتابعة حسابية أساسها = -٥

ب المتتابعة حسابية أساسها = ٦

ج المتتابعة ليست حسابية لأن:

$ع_٥ - ع_٤ = ٤ \neq$ أساس المتتابعة (٥)

(٢) أ $ع_{ن+١} - ع_ن = ٥ - ٣(ن+١) - [٥ - ٣ن]$

$\therefore ع_{ن+١} - ع_ن = -٣$ (مقدار ثابت)

فتكون المتتابعة حسابية أساسها -٣

ب $ع_{ن+١} - ع_ن = (ن + ١ + ١)^٢ - (ن + ١)^٢$

$= ٢ن + ٣$ ليس مقدارًا ثابتًا

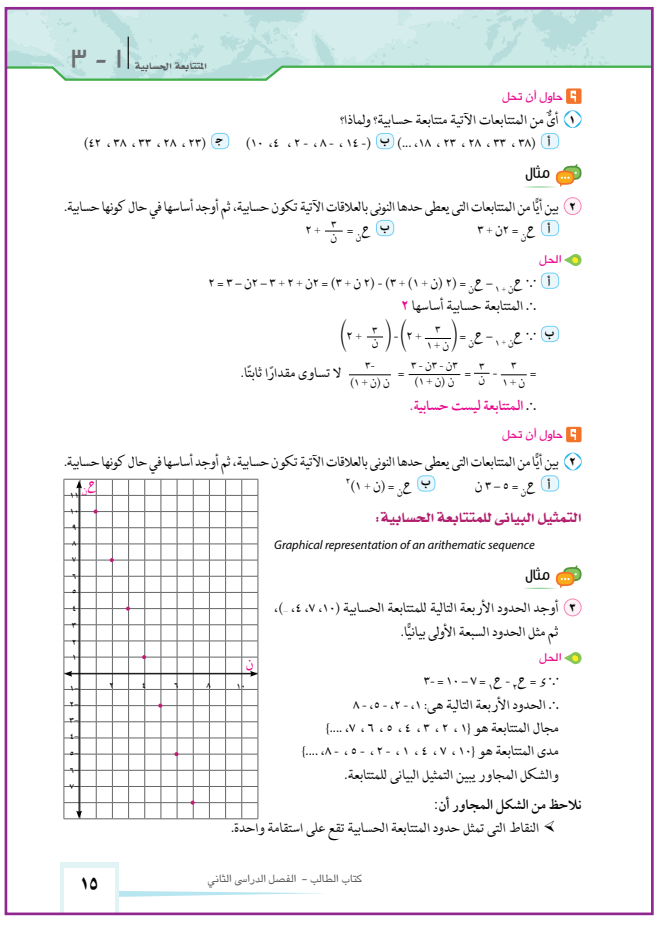
أى أن المتتابعة ليست حسابية

(٣) أ ٣ ج ٤٠ د ٣٠

فى بند الحد النونى للمتتابعة الحسابية ص (١٦):

القانون: $ع_ن = ا + (ن - ١)ء$

يربط العلاقة بين ن (عدد الحدود) ، $ع_ن$ الحد النونى ويلاحظ أن:



حاول أن تحل

(١) أيٌّ من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

أ (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨ ، ...) ب (-١٤ ، -٨ ، -٢ ، ٤ ، ١٠) ج (٢٣ ، ٢٨ ، ٣٣ ، ٣٨ ، ٤٢)

مثال

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها فى حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٢ن + ٣$ ب $ع_ن = \frac{٣}{ن} + ٢$

الحل

أ $\because ع_{ن+١} - ع_ن = (٢(ن + ١) + ٣) - (٢ن + ٣) = ٢ن + ٢ + ٣ - ٢ن - ٣ = ٢$

$\therefore$ المتتابعة حسابية أساسها ٢

ب $\because ع_{ن+١} - ع_ن = \left(\frac{٣}{ن+١} + ٢\right) - \left(\frac{٣}{ن} + ٢\right)$

$= \frac{٣}{ن+١} - \frac{٣}{ن} = \frac{٣ن - ٣(ن+١)}{ن(ن+١)} = \frac{-٣}{ن(ن+١)}$ لا تساوى مقدارًا ثابتًا.

$\therefore$ المتتابعة ليست حسابية.

حاول أن تحل

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها فى حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٥ - ٣ن$ ب $ع_ن = (ن + ١)^٢$

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية:

Graphical representation of an arithmetic sequence

مثال

(٣) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية (١٠ ، ٧ ، ٤ ، ....)، ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

الحل

$\because ء = ع_٢ - ع_١ = ٧ - ١٠ = -٣$

$\therefore$ الحدود الأربعة التالية هى: ١ ، -٢ ، -٥ ، -٨

مجال المتتابعة هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ....}

مدى المتتابعة هو {١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، -٢ ، -٥ ، -٨ ، ....}

والشكل المجاور يبين التمثيل البيانى للمتتابعة.

نلاحظ من الشكل المجاور أن:

- النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة.

مما يعنى أن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ صـ+ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

نستنتج مما سبق أن:

- العلاقة بين المتغيرين ن، $ع_ن$ هى: $ع_ن = ء ن + ب$ حيث ب، ء ثابتان ، ء أساس المتتابعة.
- تكون المتتابعة تزايدية إذا كان ء > ٠ ، وتكون تناقصية إذا كانت ء < ٠

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة حسابية:

لكتابة المتتابعة الحسابية التى فيها (ا = ١٠، ء = -٣) مثلا نتبع الآتى:

- نكتب قيمة ا (العدد ١٠) ثم نضغط علامة = ثم نضع قيمة ء بالضغط على - ثم (العدد٣) و نضغط علامة = فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة = تعطى الحدود التالية وهكذا.



تفكير ناقد:

١- ماذا تتوقع أن تكون المتتابعة الحسابية ($ع_ن$) إذا كانت (ء = ٠)؟ فسّر إجابتك.

حاول أن تحل

(٣) فى المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = ٣ن - ٥$:

أ أثبت أن ($ع_ن$) متتابعة حسابية وأوجد اساسها. ب بيّن أن هذه المتتابعة تزايدية.

ج أوجد حدها الخامس عشر. د إذا كان $ع_ن = ٨٥$ فما قيمة ن.

الحد النونى للمتتابعة الحسابية: *The n^{th} Term*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية ($ع_ن$) التى حدها الأول ا وأساسها ء كالآتى:

$ع_١ = ا$ ، $ع_٢ = ا + ء$ ، $ع_٣ = ا + ٢ء$ وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

$ع_ن = ا + (ن - ١)ء$ وإذا كان $ع_ن = ل$ (حيث ل هو الحد الأخير فإن $ل = ا + (ن-١)ء$

مثال

(٤) فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ..... ، ١٠٠)

أ أوجد الحد العاشر. ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة.

الحل

أ $\because$ المتتابعة حسابية $\therefore ا = ١٣$ ، $ء = ١٦ - ١٣ = ٣$

$\because ع_ن = ا + (ن - ١)ء$ $\therefore ع_{١٠} = ١٣ + (١٠ - ١) \times ٣$

$= ١٣ + ٩ \times ٣ = ١٣ + ٢٧ = ٤٠$

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما ل = ١٠٠

$\because ع_ن = ا + (ن - ١)ء$ $\therefore ١٠٠ = ١٣ + ٣ن - ٣$

$\therefore ١٠٠ = ١٣ + (ن - ١) \times ٣$

أى أن: $٣ن = ١٠٠ - ١٠ = ٩٠$ $\therefore ن = ٣٠$

PDF Compressor Pro

أ العلاقة تشتمل على أربعة مجاهيل، يمكن إيجاد أحدهما بمعلومية الثلاثة الأخرين.

ب إذا وجد فى هذه العلاقة مجهولان وليكن (أ، ء) مثلًا وجب تكوين معادلتين وحلهما معًا حلًا جبريًا.

ج يجب التفرقة بين رتبة الحد (ن) وقيمة الحد ($ع_ن$).

د هذه المعادلة تعطى دالة خطية؟ لأنها من الدرجة الأولى فى ن.

في بند تعبير شفهى ص (١٧)

عدد حدود المتتابعة يزيد بمقدار ٢ عن عدد الأوساط؛ أى أن عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

تابع مع طلابك ما جاء فى بند حاول أن تحل ص (١٧) ، ص (١٨) وتابع إجاباتهم

إجابات:

٤ ∵ ل = أ + (ن - ١) ء ∴ ٦٥ = ٧ + (ن - ١) × ٢

∴ ٦٥ = ٥ + ٢ ن ∴ ن = ٣٠ حدًا

فى الحد العاشر من النهاية يكون: ل = ٦٥

$ع_{١٠}$ من النهاية = ل - ٩ء = ٦٥ - ٩ × ٢ = ٤٧

٥ أ + ٥ ء = ١٧ (١) ، أ + ٢ ء + أ + ٩ ء = ٣٧

٢ أ + ١١ ء = ٣٧ (٢) بحل المعادلتين

أ = ٢ ، ء = ٣ المتتابعة هى (٢، ٥، ٧، ...)

٦ عدد حدود المتتابعة الحسابية (ن) = ٢ + ٧ = ٩

أ = -٢٤ ، ل = ١٦ ، ن = ٩

∵ ل = أ + (ن - ١) ء

١٦ = -٢٤ + (٩-١) ء

∴ ٨ ء = ١٦ + ٢٤ = ٤٠ ∴ ء = ٥

الأوساط هى: -١٩ ، -١٤ ، -٩ ، ... ، ١١

إجابات تمارين (١-٣):

١ حسابية أساسها = -٤ ٢ حسابية أساسها = ٥

٣ حسابية أساسها = -٦ ٤ حسابية ثابتة أساسها = صفرًا

٥ ٢٠ ٦ ٢٨ ٧ ٤ - ٨٥ ن ٨ ١٠

٩ ١٦ ١٠ جـ ١١ د ١٢ د

١٣ جـ ١٤ ب

١٥ ن ∈ صـ$^+$ الصواب لكل ن > ١

١٦ أ هى أساس المتتابعة فى هذه الحالة ٠

١٧ ن = ٢٧ ، جـ = $\frac{٢٧}{٢}$ [٢ + ٨٠] = ٢٧ × ٤١ = ١١٠٧

١٨ $ع_{٧}$ = ٣٩ ، عدد حدود المتتابعة = ٥٠



حاول أن تحل

٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ..... ، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: *Identifying the Arithmetic Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى عُلِم حدها الأول والأساس.

مثال

٥ الحدان السابع والخامس عشر فى متتابعة حسابية هما ١٨ ، ٣٤ على الترتيب أوجد أساس هذه المتتابعة وحدها الأول ثم أوجد حدها النونى.

الحل

$ع_{١٥}$ = ١٨ ، $ع_{١٥}$ = ٣٤ من معطيات المسالة

∵ $ع_ن$ = أ + (ن - ١) ء

∴ أ + ٦ ء = ١٨ ، أ + ١٤ ء = ٣٤

∴ ٨ ء = ١٦ بطرح المعادلتين

ء = ٢ بالقسمة على ٨

∴ أ + ٦ × ٢ = ١٨ بالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ أ = ١٨ - ١٢ = ٦

ولإيجاد الحد النونى نعوض فى القانون: $ع_ن$ = أ + (ن - ١) ء عن قيمتى أ، ء

$ع_ن$ = ٦ + (ن - ١) × ٢ = ٦ + ٢ن - ٢ = ٢ن + ٤

الحد الأول يساوى ٦ والأساس يساوى ٢ **والحد النونى** هو ٢ن + ٤

حاول أن تحل

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ١٧، ومجموع حديها الثالث والعاشر = ٣٧.

الأوساط الحسابية: *Arithmetic means*

عندما يوجد حدان غير متتاليين فى متتابعة حسابية، فتسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين أوساطا حسابية، ويمكن استخدام هذا المفهوم فى إيجاد الحدود الناقصة بين هذين الحدين فى المتتابعة الحسابية.

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية،

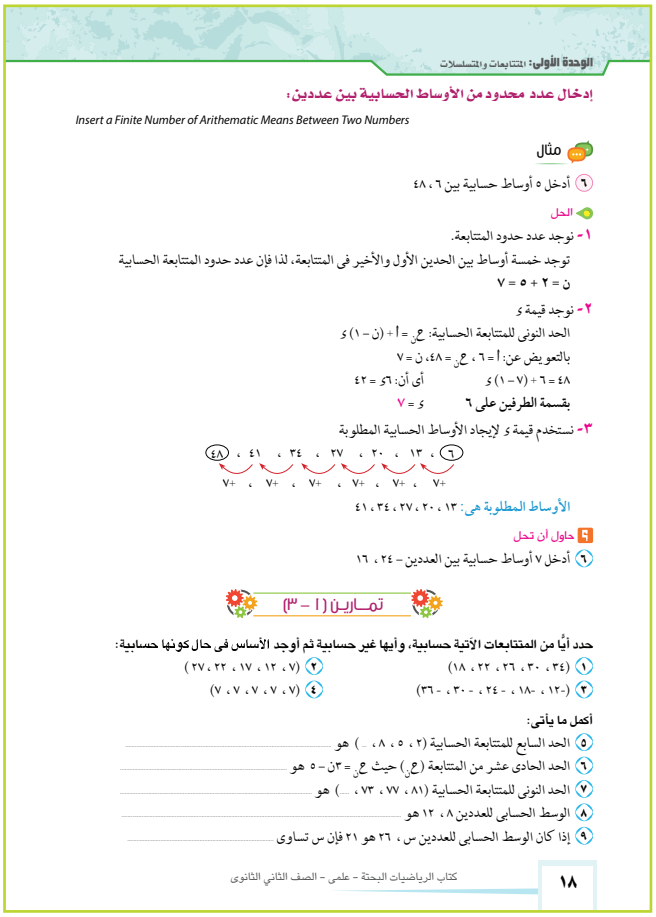
فإن ب تعرف **بالوسط الحسابى** بين الحدين أ ، جـ حيث: ب - أ = جـ - ب

أى أن: ٢ب = أ + جـ فتكون ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$ لذلك فإن: (أ ، $\frac{أ+جـ}{٢}$ ، جـ) **متتابعة حسابية.**

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ بين العددين أ، ب

بحيث تكون الأعداد: (أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ ، ب) **متتابعة حسابية.**

تعبير شفهى: ما العلاقة بين عدد الأوساط الحسابية، وبين عدد حدود المتتابعة التى تحتوى هذه الأوساط؟



إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert a Finite Number of Arithmetic Means Between Two Numbers

مثال

٦ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

١ - نوجد عدد حدود المتتابعة.

توجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة، لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

ن = ٢ + ٥ = ٧

٢ - نوجد قيمة ء

الحد النونى للمتتابعة الحسابية: $ع_ن$ = أ + (ن - ١) ء

بالتعويض عن: أ = ٦ ، $ع_ن$ = ٤٨، ن = ٧

٤٨ = ٦ + (٧ - ١) ء أى أن: ٦ء = ٤٢

بقسمة الطرفين على ٦ ء = ٧

٣ - نستخدم قيمة ء لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة

٦ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١ ، ٤٨

+٧ ، +٧ ، +٧ ، +٧ ، +٧

الأوساط المطلوبة هى: ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١

حاول أن تحل

٦ أدخل ٧ أوساط حسابية بين العددين - ٢٤ ، ١٦

تمـارين (١ - ٣)

حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية ثم أوجد الأساس فى حال كونها حسابية:

١ (٣٤ ، ٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨) ٢ (٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٧)

٣ (-١٢ ، -١٨ ، -٢٤ ، -٣٠ ، -٣٦) ٤ (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

أكمل ما يأتى:

٥ الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو .....

٦ الحد الحادى عشر من المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن$ = ٣ن - ٥ هو .....

٧ الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ...) هو .....

٨ الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو .....

٩ إذا كان الوسط الحسابى للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوى .....

PDF Compressor Pro

(١٩) $ع_{٢٤} = -٢$ (٢٠) $ع_{٤١} = ١٨٢$

(٢١) المتتابعة هى (٧، ١٢، ١٧، ....) $ن = ١٤$ ، $ن = ٢٠$

(٢٢) $ن = ١٠$ ، المتتابعة هى (٣، ٧، ١١، ...)

(٢٣) المتتابعة هى (٩، ١٢، ١٥، ...)

(٢٤) المتتابعة هى (٢، ٧، ١٢، ...)

(٢٥) المتتابعة هى (١٠، ١٢، ١٤، ...)

(٢٦) المتتابعة هى (٢، ٥، ٨، ....) ، $ن = ٥١$

(٢٧) المتتابعة هى (٣، ٧، ١١، ....)

(٢٨) المتتابعة هى (٢٧، ٢٤، ٢١، ....)

(٢٩) $أ = ١٢$ ، $ب = ٦٤$ (٣٠) $أ = ٣٠$ ، $ب = ١٨$

(٣١) $أ = ٤$ ، $ب = ١٢$ (٣٢) (٢٤، ٢١، ١٨، ...، -٢١)

(٣٣) (١، ٤، ٧، ....) (٣٤) عدد الأوساط = ٧

(٣٥) $ع_{١٠} = ١١٨٠$

(٣٦) $١٤٠٠ = ٢٠٠ + (ن - ١) \times ١٢٠$ $ن = ٣٣ \div ٣ = ١١$

تفكير ابداعي:

لقد روعى فى هذا التمرين أنه يتيح للطالب باستخدام اكثر من طريقة لحل التمرين كالتالي:

(٣٧) س ، ل، م ، ص متتابعة حسابية $\therefore$ ص - س = ٣ (م - ل)

$\therefore$ ل - م = $\frac{١}{٣}$ (س - ص)

حل ثان:

$\because$ ل وسط حسابى بين س، م $\therefore$ ل = $\frac{س + م}{٢}$

أى أن: ٢ ل = س + م (١)

$\because$ م وسط حسابى بين ل ، ص م = $\frac{ل + ص}{٢}$

أى أن: ٢ م = ل + ص (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

٢ ل - ٢ م = س + م - ل - ص

$\therefore$ ٣ ل - ٣ م = س - ص $\therefore$ ل - م = $\frac{١}{٣}$ (س - ص)

حل ثالث

بوضع: ل = س + ء ، م = س + ٢ ء ، ص = س + ٣ء

الأيمن = س + ء - س - ٢ ء = - ء

الأيسر = $\frac{١}{٣}$ (س - س - ٣ ء) = - ء

$\therefore$ الطرفان متساويان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٠) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣، ٧، ١١، ١٥، ...) ب (-١١، -١٥، -١٩، -٢٣، ...)

ج ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٥}$، $\frac{١}{٩}$، ...) د ($\frac{٢١}{٥}$، $\frac{١٦}{٥}$، $\frac{١١}{٥}$، $\frac{٦}{٥}$، ...)

(١١) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ $ع_ن = (\frac{ن+١}{ن})$ ب $ع_ن = (ن + ١)^٢$

ج $ع_ن = (\frac{٣}{ن} (ن + ٢))$ د $ع_ن = (\frac{ن^٢ - ١}{ن^٢ + ن + ١})$

(١٢) إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية حيث $ع_ن = ٣ن + ٢$ فإن الوسط الحسابى بين $ع_٩$ ، $ع_{١١}$ يساوى:

أ ٨ ب ١٦ ج ٢٢ د ٢٦

(١٣) إذا كان $٢أ + ١$ ، $أ - ١$ ، $٦أ + ٣$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٥

(١٤) إذا كانت أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن: $\frac{ص - س}{ب - أ}$ تساوى:

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٦

اكتشف الخطأ:

(١٥) يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة أى أن:

ء = $ع_ن - ع_{ن-١}$ لكل ن $\in$ صـ

(١٦) تعطى العلاقة بين ن ، $ع_ن$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى $ع_ن = أن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة .

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٧) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٨) فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، -١٣٣) أوجد:

أ قيمة الحد السابع ب عدد حدود المتتابعة

(١٩) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٦٧، ٦٤، ٦١، ...)

(٢٠) أوجد رتبة وقيمة أول حد قيمته أكبر من ١٨٠ فى المتتابعة الحسابية:

(٢١) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(ع_ن) = (٢ + ٥ ن)$ ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من المتتابعة أوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠

(٢٢) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ع_ن = ٣٩$ ، $ع_{٢ن} = ٧٩$ فما قيمة ن؟ ثم أوجد المتتابعة.

(٢٣) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى.

(٢٤) $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ع_١ + ع_٣ = ٩$ ، $ع_٥ = ٢٢$ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٥) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

(٢٦) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

(٢٧) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢.

(٢٨) $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها: $ع_٢ + ع_٤ = ٤٢$ ، $ع_٣ \times ع_٥ = ٣١٥$ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٩) إذا كانت (٨ ، أ ، ... ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حدًا فأوجد قيم أ ، ب

(٣٠) إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمة أ ، ب

(٣١) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ١٤ ، ٣ب هو ٢٠ ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب

(٣٢) أدخل ١٦ وسطا حسابيا بين ٢٧ ، - ٢٤

(٣٣) متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة.

(٣٤) إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط

(٣٥) الربط بالفيزياء: بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم وفى كل ثانية تالية بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم. أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة.

(٣٦) الربط بالتجارة: اشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه. أوجد عدد هذه الأقساط.

(٣٧) تفكير ابداعى: إذا كان ل ، م وسطين حسابيين بين س ، ص حيث ل $\neq$ م فأثبت أن: ل - م = $\frac{١}{٣}$ (س - ص).

PDF Compressor Pro

١ - ٤ المتسلسلات الحسابية

Arithmetic Series



خلفية

سبق للطالب أن أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية، وأتقن إيجاد أى حد من حدود هذه المتتابعة بمعلومية حدها الأول والأساس، وفى هذا الدرس سوف يتعلم الطالب إيجاد مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير أو بمعلومية حدها الأول والأساس ، كما سيستخدم رمز التجميع (Σ) فى إيجاد عدد محدود من حدود المتتابعة الحسابية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مجموع المتسلسلة الحسابية بمعلومية حدها الأول والأخير.
- يوجد مجموع المتسلسلة الحسابية بمعلومية حدها الأول والأساس.
- يضع المتسلسلة الحسابية على صورة رمز المجموع.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلة الحسابية.

مفردات أساسية:

- متسلسلة حسابية – مجموع متسلسلة حسابية – رمز التجميع (Σ)

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر- المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات- التفكير الناقد.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص (٢١) إلى ص (٢٨) - الشبكة الدولية للمعلومات.

التهيئة

اطلب إلى طلابك عمل عصف ذهنى لإيجاد مجموعات من الأعداد ذهنيًا كما جاء فى قصة كارل جاوس فى مقدمة الوحدة، فمثلًا اطلب إليهم جميع الأعداد الآتية:

أ من ١ إلى ٥٠

ب من ٥١ إلى ١٠٠

ج الأعداد الزوجية بدءًا من صفر إلى ١٠٠

د الأعداد الفردية بدءًا من صفر إلى ١٠٠

إجراءات الدرس:

في بند تعلم

- اطلب إلى الطلاب إثبات قانون مجموع ن حدًا من حدود المتتابعة الحسابية بمعلومية أ، ل، ن ثم بمعلومية أ، ء، ن.
- ثم استخدمه فى إيجاد مجموع حدود المتتابعات فى التمهيد السابق.
- درِّب الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد المتتابعة الحسابية باستخدام رمز التجميع لنفس المتتابعات السابقة، ودعهم يقارنوا بين جميع الإجابات التي حصلوا عليها.

PDF Compressor Pro

فى بند فكر ص(٢٣):

وضح إلى طلابك انه يمكن إيجاد: حـ٢٠ الأولى من المتتابعة ثم اتباع العلاقة حـ١١ الأخيرة = حـ٢٠ الأولى - مجموع الحدود بدأ من ع١ إلى ع٩

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

إجابات:

(١) (أ) $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥) = (١١ + ١٧ + ٢٣ + ...)$

$أ = ١١ ، ء = ٦ ، ن = ٢٠$

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١١ + ١٩ \times ٦] = ١٣٦٠$

(ب) $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م) = (-٢٣ - ٢٨ - ٣٣ - ...)$

$ن = ٣٢ - ٧ + ١ = ٢٦$

$جـ_{٢٦} = \frac{٢٦}{٢} [٢ \times -٢٣ + ٢٥ \times (-٥)] = -٢٢٢٣$

و يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام رمز التجميع .

يمكنك إيجاد هذا المجموع فى كل من (أ) ، (ب) باستخدام القانون $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

(٢) (أ) $\because ل = أ + (ن - ١) ء$

$\therefore ٣٣ = ٨٩ + (ن - ١) \times -٤$

$ن = ١٥$

$جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢} (٨٩ + ٣٣) = ٩١٥$

(ب) $٢١٠ = \frac{ن}{٢} [٣ + ٣٩]$ ومنها $ن = ١٠$

(٣) $أ = ٩ ، ء = ١٢ - ٩ = ٣$

(أ) $جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢} [٢ \times ٩ + ١٤ \times ٣]$

$= ٤٥٠$

(ب) عدد الحدود $= ١٥ - ٥ + ١ = ١١$

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} [ع_٥ + ع_{١٥}]$

$= \frac{١١}{٢} [٢ أ + ١٨ ء]$

$= ١١ (أ + ٩ ء)$

$= ١١ (٩ + ٣ \times ٩) = ٣٩٦$

(جـ) $\because جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

$\therefore ٧٥٠ = \frac{ن}{٢} [٢ \times ٩ + (ن - ١) \times ٣]$

$\therefore ن^٢ + ٥ ن - ٥٠٠ = ٠$

$(ن + ٢٥) (ن - ٢٠) = ٠$

$ن = ٢٠$ حدًّا



الحل

$ن = ٢٤ - ٥ + ١ = ٢٠$ — نوجد عدد حدود المتتابعة

$ع_ن = ٤ن - ٣$ — الحد النونى للمتتابعة

$ع_٥ = ٤ \times ٥ - ٣ = ١٧$ ، $ع_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ - ٣ = ٩٣$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ — صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$ — بالتعويض عن $أ = ١٧ ، ل = ٩٣ ، ن = ٢٠$

حاول أن تحل

(١) أوجد:

(أ) $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$ (ب) $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م)$

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢$

الحل

$ل = أ + (ن - ١) ء$ — الحد النونى للمتتابعة

$٦٢ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ — بالتعويض عن $أ = ٢ ، ء = ٣ ، ل_ن = ٦٢$

أى أن: $٣ن - ٣ + ٢ = ٦٢$

$٣ن - ١ = ٦٢$ — فتكون $ن = ٢١$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ — صيغة المجموع

$جـ_{٢١} = \frac{٢١}{٢} (٢ + ٦٢) = ٦٧٢$ — بالتعويض عن $أ = ٢ ، ن = ٢١ ، ع_ن = ٦٢$

حاول أن تحل

(٢) أوجد:

(أ) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣$

(ب) عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حدًّا الأولى منها يساوى ٢١٠

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن $ل = أ + (ن - ١) ء$ ، $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن - ١) ء]$ أى أن: $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$



مثال

(٣) فى المتسلسلة الحسابية $٥ + ٨ + ١١ + ...$ أوجد:

(أ) مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها. (ب) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

(جـ) مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

الحل

$أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣$

(أ) $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$ — صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ٥ + (٢٠ - ١) \times ٣]$ — بالتعويض عن $أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣$

$= ١٠ (١٠ + ١٩ \times ٣)$

$= ١٠ \times ٦٧ = ٦٧٠$ — بالتبسيط

(ب) $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ — الحد النونى للمتتابعة

$ع_٧ = أ + ٦ ء$

$= ٥ + ٦ \times ٣ = ٢٣$ — بالتعويض عن $أ = ٥ ، ء = ٣ ، ن = ٧$

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٢ ع_٧ + (١٠ - ١) \times ٣]$ — بالتعويض فى صيغة المجموع

$جـ_{١٠} = ٥ [٢ \times ٢٣ + ٢٧]$

$= ٥ \times ٧٣ = ٣٦٥$ — بالتبسيط

(جـ) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ — الحد النونى للمتتابعة

$ع_{١٠} = أ + ٩ ء$

$= ٥ + ٩ \times ٣ = ٣٢$ — بالتعويض عن $أ = ٥ ، ء = ٣$

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ ء = ٥ + ١٩ \times ٣ = ٦٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ — صيغة المجموع

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} (ع_{١٠} + ع_{٢٠})$

$= \frac{١١}{٢} (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧$ — بالتعويض عن $ع_{١٠} = ٣٢ ، ع_{٢٠} = ٦٢ ، ن = ١١$

فكر:

هل توجد حلول أخرى لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

حاول أن تحل

(٣) فى المتتابعة الحسابية $(٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...)$. أوجد:

(أ) مجموع ١٥ حدًّا الأولى منها .

(ب) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر .

(جـ) عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

تابع مع طلابك ما جاء فى بند حاول أن تحل ص(٢٤) ، ص (٢٥) وتابع إجاباتهم

إجابات:

(٤) أ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$ ∴ $٥٤٥ = \frac{ن}{٢}[٢٣ + ٨٦]$

ومنها ن = ١٠ حدود.

∵ $ع_ن = أ + (ن-١)ء$

∴ $٨٦ = ٢٣ + ٩ء$ ∴ $ء = ٧$

المتتابعة هى (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ...)

ب $-٥٨٥ = \frac{ن}{٢}(-١٧ - ٩٥)$ ومنها ن = ١٥

∴ $-٩٥ = ١٧ + ١٤ء$ ∴ $ء = -٨$

∴ المتتابعة هى: (١٧ ، ٩ ، ١ ، ...)

(٥) $أ = ٤$ ، $ء = \frac{١}{٢}$

أ $ع_٧ = أ + ٦ء = ٤ + ٦ \times \frac{١}{٢} = ٧$ كم

ب $جـ_٧ = \frac{٧}{٢}[٢ \times ٤ + ٦ \times \frac{١}{٢}]$

$= \frac{٧٧}{٢} = ٣٨\frac{١}{٢}$ كم

جـ ∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$

$٨١ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٤ + (ن-١) \times \frac{١}{٢}]$

∴ $ن^٢ + ١٥ن - ٣٢٤ = ٠$

$(ن - ١٢)(ن + ٢٧) = ٠$

ن = ١٢ يومًا

إجابة تمارين (١-٤):

(١) $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$ (٢) $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$

(٣) ٣٥ (٤) ٩٠

(٥) ٢٠٠ (٦) ٣٤٣

(٧) جـ (٨) جـ

(٩) أ (١٠) ب

أخطاء شائعة: من (١١) إلى (١٤)

- ناقش مع طلابك الإجابات المختلفة
- صحح المفاهيم الخاطئة لدى طلابك من خلال:

(١١) **الصواب:** لإيجاد عدد الحدود الموجبة نحل المتباينة $ع_ن > ٠$ لإيجاد عدد الحدود الموجبة، ثم نوجد مجموعها.

(١٢) لإيجاد عدد الحدود السالبة نحل المتباينة $ع_ن < ٠$ وبالتالى نوجد مجموع ن حدًّا .



الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

مثال

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها: $ع_٩ = ١١$ ، $ع_{١٥} = ٨٧$ ، $جـ_ن = ٩٨٠$

الحل

أ إيجاد قيمة ن

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ صيغة المجموع

$٩٨٠ = \frac{ن}{٢}(١١ + ٨٧)$ بالتعويض عن $ع_٩ = ١١$ ، $ع_{١٥} = ٨٧$ ، $جـ_ن = ٩٨٠$

$٩٨ \times \frac{ن}{٢} = ٩٨٠$ فيكون: ن = ٢٠ حدًا بالتبسيط

ب إيجاد قيمة ء

$ع_ن = أ + (ن-١)ء$ الحد النونى

$٨٧ = ١١ + ١٩ء$ بالتعويض عن $ع_٩ = ١١$ ، ن = ٢٠ ، $ع_{٢٠} = ٨٧$

$١٩ء = ٨٧ - ١١ = ٧٦$ بالتبسيط

$ء = ٤$ وبالقسمة على ١٩

جـ تكوين المتتابعة: $ع_٩ = ١١$ ، $ع_{١٠} = ١١ + ٤ = ١٥$ ، $ع_{١١} = ١٥ + ٤ = ١٩$

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ... ، ٨٧)

حاول أن تحل

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها

أ $ع_٩ = ٢٣$ ، $ع_{١٥} = ٨٦$ ، $جـ_ن = ٥٤٥$

ب $ع_٩ = ١٧$ ، $ع_{١٥} = -٩٥$ ، $جـ_ن = -٥٨٥$

مثال

الربط بالفيزياء:

(٥) سقط جسم من ارتفاع ٤٩٠ مترا تحت تأثير الجاذبية الأرضية، وبفرض إهمال مقاومة الهواء فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الأولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا، أوجد:

أ المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة.

ب مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمان الأولى.

جـ متى يصل الجسم إلى سطح الأرض.

الحل

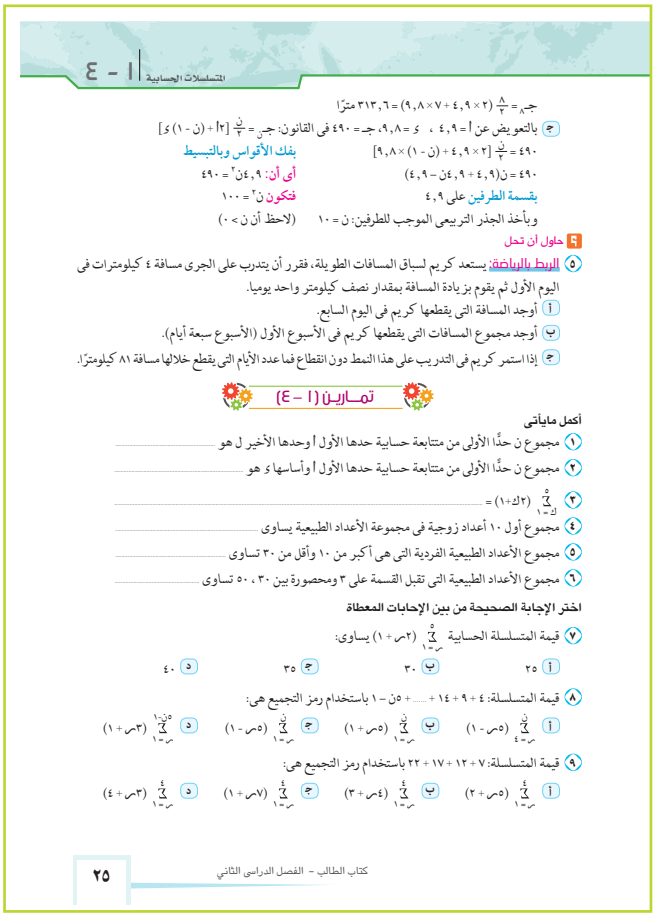
المسافات المقطوعة فى الثوانى الثلاث الأولى هي على الترتيب: ٤,٩ ، ١٤,٧ ، ٢٤,٥ ، ...

وهى تمثل متتابعة حسابية فيها: $أ = ٤,٩$ ، $ء = ١٤,٧ - ٤,٩ = ٩,٨$

أ بالتعويض عن: $أ = ٤,٩$ ، $ء = ٩,٨$ فى القانون: $ع_ن = أ + (ن-١)ء$

$ع_٦ = أ + ٥ء$ فتكون $ع_٦ = ٤,٩ + ٥ \times ٩,٨ = ٥٣,٩$ مترًا

ب بالتعويض عن: $أ = ٤,٩$ ، $ء = ٩,٨$ ، ن = ٨ فى القانون: $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$



$جـ_٨ = \frac{٨}{٢}(٢ \times ٤,٩ + ٧ \times ٩,٨) = ٣١٣,٦$ مترًا

جـ بالتعويض عن: $أ = ٤,٩$ ، $ء = ٩,٨$ ، $جـ_ن = ٤٩٠$ فى القانون: $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$

$٤٩٠ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٤,٩ + (ن-١) \times ٩,٨]$ بفك الأقواس وبالتبسيط

$٤٩٠ = ن(٤,٩ + ٤,٩ن - ٤,٩)$ أى أن: $٤,٩ن^٢ = ٤٩٠$

بقسمة الطرفين على ٤,٩ فتكون $ن^٢ = ١٠٠$

وبأخذ الجذر التربيعى الموجب للطرفين: ن = ١٠ (لاحظ أن ن > ٠)

حاول أن تحل

(٥) **الربط بالرياضة:** يستعد كريم لسباق المسافات الطويلة، فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلومترات فى اليوم الأول ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحد يوميا.

أ أوجد المسافة التى يقطعها كريم فى اليوم السابع.

ب أوجد مجموع المسافات التى يقطعها كريم فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

جـ إذا استمر كريم فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا.

تمـاريـن (١ - ٤)

أكمل مايأتى

(١) مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل هو .....

(٢) مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء هو .....

(٣) $\sum_{ك=١}^{٥٠}(٢ك+١) =$ .....

(٤) مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى .....

(٥) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى .....

(٦) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى .....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{س=١}^{١٠}(٣س+١)$ يساوى:

أ ٢٥ ب ٣٠ جـ ٣٥ د ٤٠

(٨) قيمة المتسلسلة: ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن - ١ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{س=١}^{ن}(٥س-١)$ ب $\sum_{س=١}^{ن}(٥س+١)$ جـ $\sum_{س=١}^{ن-١}(٥س-١)$ د $\sum_{س=١}^{ن-١}(٣س+١)$

(٩) قيمة المتسلسلة: ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{س=١}^{٤}(٥س+٢)$ ب $\sum_{س=١}^{٤}(٤س+٣)$ جـ $\sum_{س=١}^{٤}(٧س+١)$ د $\sum_{س=١}^{٤}(٣س+٤)$

PDF Compressor Pro

(١٣) بوضع جـ$_{ن}$ = ٠ فإن $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن-١)ء] = ٠

الصواب: أى أن: ٢أ + (ن -١) ء = ٠

(١٤) **الصواب هو:** ع$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ - جـ$_{ن-١}$

(١٥) جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٩ + ١٤ × ٤] = ٣٢٠

(١٦) جـ$_{٣٠}$ = $\frac{٣٠}{٢}$ [٢ × ٥ + ٢٩ × ٢] = ١٠٢٠

(١٧) جـ$_{٢٧}$ = $\frac{٢٧}{٢}$ (٢ + ٨٠) = ١١٠٧

(١٨) ٤٥٦ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ١٦ + (ن -١) × ٤]

٤٥٦ = ١٤ ن + ٢ ن^{٢} ∴ ن^{٢} + ٧ ن - ٢٢٨ = ٠

(ن -١٢) (ن + ١٩) = ٠ ∴ ن = ١٢

(١٩) ٣ ن = ٥٧ ∴ ن = ١٩

(٢٠) جـ$_{٧}$ = ٠ ، جـ$_{٦}$ = ١٢ ع$_{٧}$ = ٠ - ١٢ = -١٢

-٢٤٠ = ١٤ ن - ٢ن^{٢} ن^{٢} -٧ ن - ١٢٠ = ٠ ومنها ن = ١٥

(٢١) جـ$_{ن}$ > ٠

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٨٩ + (ن-١) × -٨] > ٠

∴ ١٧٨ - ٨ ن + ٨ > ٠ أى أن ن > $\frac{١}{٤}$ ٢٣ ومنها ن = ٢٤

(٢٢) جـ$_{ن}$ > ٠ $\frac{ن}{٢}$[٢ × ٢٥+(ن-١) × -٤] < ٠

∴ ٤ ن > ٥٤ ∴ ن = ١٣

(٢٣) أ جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٥+ ١٩ × ٣] = ٦٧٠

ب ع$_{٧}$ = ٥ + ٦ × ٣ = ٥ + ١٨ = ٢٣

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٢٣+ ٩ × ٣] = ٣٦٥

جـ ع$_{١٠}$ = ٥ + ٩ × ٣ = ٣٢ ع$_{٢٠}$ = ٥ + ١٩ × ٣ = ٦٢

ن = ٢٠ - ١٠ + ١ = ١١ جـ$_{١١}$ = $\frac{١١}{٢}$ [٣٢ + ٦٢] = ٥١٧

(٢٤) ٣٢ + (ن - ١) × -٤ > ٠

-٤ ن + ٣٦ > ٠ ∴ ن < ٩

ع$_{١٠}$ = ٣٢ + ٩ × -٤ = -٤ حـ ن > ٠

٢ أ + (ن -١) ء > ٠ ٢ × ٣٢ + (ن -١) × -٤ > ٠

∴ ن < ١٧ ∴ ن = ١٦

(٢٥) أ ٢٥ + (ن-١) × -٢ > ٠ ∴ ن < $\frac{١}{٢}$ ١٣ ن = ١٣

جـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ [٢ × ٢٥+ ١٢ × -٢] = ١٦٣

ب ١٢٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢٥ + (ن -١) × -٢]

ن^{٢} - ٢٦ ن + ١٢٠ = ٠ ن = ٦ أو ن = ٢٠

التفسير: مجموع ٦ حدود الأولى = ١٢٠، مجموع ١٤ حدًّا التالية = صفر لأن مجموع الحدود الموجبة يلاشى مجموع الحدود السالبة.

(٢٦) المتتابعة هى (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، .... ، -٢٦)

(١٠) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ن + ١)) ابتداء من حدها الأول يساوى:

أ ن(ن + ١) ب ن(ن + ٢) جـ ن(ن + ٥) د ن(ن + ٢) ن(ن + ٣)

اكتشف الخطأ

(١١) لإيجاد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها الموجبة وذلك بوضع جـ$_{ن}$ > ٠ لإيجاد قيمة ن ، ومن ثم نوجد أكبر مجموع.

(١٢) لإيجاد أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها السالبة وذلك بوضع جـ$_{ن}$ < ٠ لإيجاد قيمة ن ومن ثم نوجد اصغر مجموع.

(١٣) لإيجاد عدد حدود المتتابعة الحسابية الذى يتلاشى عنده المجموع نضع جـ$_{ن}$ = ٠ فيكون أ + (ن - ١)ء = ٠ [حيث ن ≠ ٠] ومن ذلك نوجد عدد الحدود.

(١٤) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٣}$ (٣ن + ٥)

فإن ع$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ - جـ$_{ن-١}$.

أجب عن الأسئلة الآتية

(١٥) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ...).

(١٦) أوجد مجموع ٣٠ حدًّا الأولى من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ن + ٣

(١٧) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٨) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها مساوياً ٤٥٦

(١٩) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

(٢٠) إذا كان مجموع ن من متتابعة حسابية يتعين بالقانون: جـ$_{ن}$ = ٢ن(٧ - ن) فأوجد:

أ ع$_{٧}$

ب عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا - ٢٤٠

(٢١) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبا.

(٢٢) أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبا.

(٢٣) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) أوجد:

أ مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها.

ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

جـ مجموع حدود المتتابعة بدأ من ع$_{١٠}$ إلى ع$_{٢٠}$

(٢٤) فى المتتابعة (ع$_{ن}$) = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...).

أ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

ب أوجد عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر من الصفر.

(٢٥) فى المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...). أوجد:

أ أكبر مجموع للمتتابعة.

ب عدد الحدود التى مجموعها = ١٢٠ ابتداء من الحد الأول " فسّر وجود جوابين "

(٢٦) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = -٢٦ ، ومجموع حدودها = -١٤٠ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٧) (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشر حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٨) متتابعة حسابية فيها ع$_{٣٠}$ = ٠ ، إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها. أوجد قيمة ن.

(٢٩) إذا أدخل ن وسطًا حسابيًا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$. فما عدد الأوساط وما مجموع المتتابعة.

(٣٠) متتابعة حسابية فيها ع$_{٥}$ = ٢٤ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، أوجد هذه المتتابعة.

(٣١) متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ ، فما هى المتتابعة؟ وكم حدًّا يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر؟

(٣٢) **ادخار:** يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوما.

(٣٣) **الربط بالنشاط الفنى:** مسرح مدرسى يتسع لـ ١٦ صفا ، فإذا كان الصف الأول يحتوى على ١٦ مقعدا، وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذى يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد. كم عدد المقاعد بهذا المسرح؟

(٣٤) **الربط بالدخل:** بدأ كريم العمل براتب سنوى قدره ١٩٢٠٠ جنيها ، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيها. فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب فى نهاية السنة العاشرة؟

(٣٥) **الربط بالتجارة:** اقترض رجل مبلغا من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض؟

PDF Compressor Pro



(٢٧) أ + ى = ١٣ ، $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ + ٩ى] = ٢٣٥

بحل المعادلتين المتتابعة هى (١٠، ١٣، ١٦، ...)

(٢٨) أ + ٣٥ى = ٠ ، $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن -١)ى]

= $\frac{٥}{٢}$ × ٢ [٢أ + ٤ى]

بحل المعادلتين: ن = ١١ أو ن = ٦٠

(٢٩) ١٤ وسطًا ، جـ$_{ن}$ = ٢٥٦

(٣٠) المتتابعة هى (١٢، ١٦، ٢٠، ...)

(٣١) المتتابعة هى (٣٠، ٢٦، ٢٢، ....)، ن = ١٦

(٣٢) جـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢ × ١٥ + ١٤ × ٢] = ٤٣٥ جنيه

(٣٣) جـ$_{١٦}$ = $\frac{١٦}{٢}$ [٢ × ١٦ + ١٤ × ٤] = ٧٠٤ مقعد

(٣٤) جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ١٩٢٠٠ + ٤٨٠ × ٩] = ٢١٣٦٠٠ جنيه

(٣٥) جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٥٠٠ + ٢٠٠ × ٩] = ١٤٠٠٠ جنيه

معالجة بعض القضايا المرتبطة بالبيئة

(٣٦) جـ$_{٥}$ = $\frac{٥}{٢}$ [٢ × ١٠٠٠ + ١٠٠ × ٤] = ٦٠٠٠ جنيه

$\frac{أ}{أ + (أ + ى)}$ = $\frac{٣}{١٠}$ ∴ ٤أ = ٣ى

∵ ع$_{٧}$ = ٢٧ ∴ أ + ٦ى = ٢٧ بحل المعادلتين

المتتابعة هى (٣، ٧، ١١، ...) ، جـ١٠ = ٢١٠

فى بند نشاط ص (٢٨)

يهدف هذا النشاط إلى استخدام المتتابعة الحسابية فى حل بعض التطبيقات الحياتية .

إجابة اسئلة النشاط:

١- ع$_{٧}$ = ٦ ٢- ن = ١٠ ٣- حـ = ٧٨ ٤- حتى لايختل توازن العلب. ٥- استخدام الانترنت فى البحث عن معلومات

تمارين اثرائية للطالب:

(١) أوجد مجموع ٢٠ حدًا الأولى من المتتابعة (١، ٩، ١٧، ...) [الإجابة: ١٥٤٠]

(٢) متتابعة حسابية حدها الأول ٩ ، وحدها الأخير ٢٧ وعدد حدودها ٢٠ حدًا . أوجد مجموع حدودها [الإجابة: ٣٦٠]

(٣) أوجد مجموع المتتابعة الحسابية (١٣، ١٨، ٢٣، ..... ١٥٨٠٠٠) [الإجابة: ٢٥٦٥]

(٤) اثبت أن: $\frac{٢+٦+١٠+ ... \text{ إلى } ٧٥ \text{ حدًا}}{٢ + ٩ + ١٥ + ... + ٢٩٧}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٥) أوجد مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة (٢ ن -١) ابتداء من ع$_{٥}$ [الإجابة: ١٧٤٠].

(٦) إذا كان $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٣ ر -١) = ٩٥٠ فما قيمة ن [الإجابة: ٢٥]

(٧) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد المتتابعة

[الإجابة: (١٠، ١٣، ١٦، ....)]

سلم التقييم للنشاط:

التقدير	أداء الطالب
ممتاز	يحل الطالب جميع الاسئلة بشكل صحيح و يستخدم الشبكة العنكبوتية فى إيجاد المطلوب الخامس بشكل شامل وكامل.
جيد جدًا	يجيب الطالب عن ثلاثة اسئلة كاملة بشكل صحيح و يستخدم الشبكة العنكبوتية فى إيجاد المطلوب الخاص بشكل جزئى
جيد	يجيب الطالب على سؤالين فقط واستخدامه للشبكه العنكبوتية فى إيجاد المطلوب عشوائى
مقبول	يجيب الطالب على سؤال واحد فقط ولايوجد فائدة من استخدام للشبكة العنكبوتية
ضعيف	لايستطيع الطالب الإجابة على الاسئلة ولايستخدم الشبكة العنكبوتية بشكل سليم

PDF Compressor Pro

١ - ٥ المتتابعة الهندسية
Geometric Sequences

خلفية

سبق للطالب أن درس المتتابعة الحسابية وعلم أن أساسها (ء) يساوي أي حد من الحدود - الحد السابق له مباشرة.

وسوف يدرس في هذا الدرس المتتابعة الهندسية وهي تختلف عن المتتابعة الحسابية في أن أساسها يساوي أي حد من الحدود مقسومًا على الحد السابق له مباشرة ويعطي مقدارًا ثابتًا هو أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر).

مخرجات الدرس:

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف المتتابعة الهندسية.
- يمثل المتتابعة الهندسية بيانيًّا.
- يوجد الحد النوني للمتتابعة الهندسية.
- يعين المتتابعة الهندسية بمعلومية حدها الأول والأساس.
- يدخل عدة أوساط هندسية بين حدين غير متتاليين.
- يوجد العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي الموجب.

مفردات أساسية:

متتابعة هندسية - حد نوني - متتابعة تزايدية - متتابعة تناقصية - متتابعة متناوبة الإشارة - وسط هندسي.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - التفكير الناقد.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص(٢٩) إلى ص (٣٦) - الشبكة الدولية للمعلومات.


الوحدة الأولى

المتتابعة الهندسية

١ - ٥

Geometric Sequences

سوف تتعلم
- تعريف المتتابعة الهندسية
- التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية.
- الحد النوني للمتتابعة الهندسية.
- تعيين المتتابعة الهندسية.
- الأوساط الهندسية.
- العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي لعددين.

المصطلحات الأساسية
- متتابعة هندسية Seqences Geometric
- حد نوني nth Term
- متتابعة تزايدية Increasing Seqence
- متتابعة تناقصية decreasing Sequence
- متتابعة متناوبة الإشارة Alternating Signal Sequence
- وسط هندسي Geometric Mean

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية

تأمل المثلثات الصغرى في كل شكل من الأشكال الآتية ثم أوجد عددها. ماذا تلاحظ؟

٨ ٤ ٢ ١ × ٢

تعريف ١: تسمى المتتابعة (ع ن) حيث ع ن ≠ ٠ متتابعة هندسية إذا كان ع ن+١ / ع ن = مقدارًا ثابتًا لكل ن ∈ ص+ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر)

مثال

١ بين أيًّا من المتتابعات (ع ن) الآتية هندسية وأوجد أساس كل منها:
أ (ع ن) = (٢ × ٣^ن) ب (ع ن) = (٤ ن^٢)
ج المتتابعة (ع ن) حيث: ع١ = ١٢ ، ع ن = ١/٤ × ع ن-١ (حيث ن > ١)

الحل
أ ∵ ع ن+١ / ع ن = ٢ × ٣^(ن+١) / ٢ × ٣^ن = ٣^(ن+١-ن) = ٣ (مقدار ثابت)
∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ٣
ب ∵ ع ن+١ / ع ن = ٤ (ن+١)^٢ / ٤ ن^٢ (ليس مقدارًا ثابتًا)
∴ المتتابعة ليست هندسية
ج ∵ ع ن = ١/٤ × ع ن-١ (حيث ن > ١)
∴ ع ن / ع ن-١ = ١/٤ (مقدار ثابت)
∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ١/٤

كتاب الطالب - الفصل الدراسي الثاني ٢٩

التهيئة:

يبدأ المعلم بعرض المثلثات على السبورة ويناقش الطلاب ما العلاقة بين الأربعة أشكال للتوصل إلى نمط المتتابعة واعرض عليهم مفهوم المتتابعة الهندسية من خلال ذلك.

اجراءات الدرس:

- اطلب إلى الطلاب رسم أنماط أخرى تتطلب تكوين متتابعة هندسية واطلب إليهم إيجاد الأساس في كل حالة.
- اعرض على طلابك التعريف الخاص بالمتتابعةالهندسية مع بيان المقصود بأساس المتتابعة الحسابية والرمز الخاص بها.
- وضح إلى الطلاب أن أساس المتتابعة الهندسية = $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ يساوى مقدارًا ثابتًا أي لا يتوقف على قيمة ن.
- ناقش مع طلابك المثال ص (٢٩) وهو تدريب مباشر على المتتابعة الهندسية وأخرى متتابعة غير هندسية (لأن المقدار غير ثابت)

PDF Compressor Pro

حاول أن تحل

(١) بين أيًا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها في حال كونها هندسية:

(أ) $(ع_ن) = (٩٦، ٤٨، ٢٤، ١٢، ٦، ٣)$ (ب) $(ع_ن) = (\frac{١}{٢٤٣}، -\frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٧}، -\frac{١}{٩}، \frac{١}{٣}، -١)$

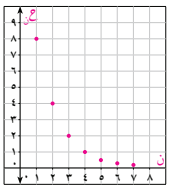
(ج) $(ع_ن) = (٥ \times ٢^{ن})$ (د) $(ع_ن) = (٣ (ن+١)^{٢})$

التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية:

Graphical Representation of The Geometric Sequence

مثال

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية (٨، ٤، ٢، ..) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.



الحل

أساس المتتابعة = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي فإن الحدود الأربعة التالية هي:

$١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}$

المجال هو {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

المدى هو $\{٨، ٤، ٢، ١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}\}$

ونلاحظ من الشكل البياني أن:

- حدود المتتابعة متناقصة حيث $ا > ٠$ ، $٠ < ر < ١$
- التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية وليس دالة من الدرجة الأولى كما في المتتابعة الحسابية.

تعبير شفهي: اكتب وصفا للمتتابعة الهندسية من حيث كونها (تزايدية ا، تناقصية ا، متناوبة الإشارة) في الحالات الآتية.

الحد الأول	موجب			سالب		
الأساس	$ر > ١$	$٠ < ر < ١$	$-١ < ر < ٠$	$ر < -١$	$٠ < ر < ١$	$-١ < ر < ٠$	$ر < -١$
الوصف	تزايدية			متناوبة الإشارة			

تفكير ناقد: هل يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية مساويًا للصفر أو مساويًا للواحد الصحيح؟ فسّر إجابتك.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٣٢}، \frac{١}{٨}، \frac{١}{٢}، ..)$ ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

الحد النوني للمتتابعة الهندسية:

The n th Term

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النوني للمتتابعة الهندسية $(ع_ن)$ التي حدها الأول ا وأساسها ر كالآتي:

$ع_١ = ا$، $ع_٢ = ار$، $ع_٣ = ار^{٢}$ وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النوني لهذه المتتابعة هو: $ع_ن = ار^{ن-١}$

مثال

(٣) في المتتابعة الهندسية (٢، ٤، ٨، ....) أوجد:

(أ) الحد الخامس

(ب) رتبة الحد الذي قيمته ٥١٢

الحل

$\because ا = ٢$ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $ع_ن = ا \times ر^{ن-١}$

$\therefore ع_٥ = ار^{٤} = ٢ \times ٢^{٤} = ٢ \times ١٦ = ٣٢$

أي أن قيمة الحد الخامس تساوي ٣٢

$\because ع_ن = ا \times ر^{ن-١}$ $\therefore ٢ \times ٢^{ن-١} = ٥١٢$

وبقسمة الطرفين على ٢

$\therefore ٢^{ن-١} = ٢^{٨}$ $\therefore ن - ١ = ٨$ $\therefore ن = ٩$

أي أن الحد الذي قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع

تعيين المتتابعة الهندسية:

Identifying The Geometric Sequence

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس؟

مثال

(٤) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة، فإذا كان $ع_٣ + ع_٤ = ٦ع_٥$، $ع_٣ = ٣٢٠$ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$\because ع_٣ + ع_٤ = ٦ع_٥$ $\therefore ار^{٢} + ار^{٣} = ٦ \times ار$

$\therefore ار (ر + ر^{٢}) = ٦ \times ار$ وبقسمة الطرفين على ار (حيث ا، ر لا يساويان الصفر)

$\therefore ر^{٢} + ر = ٦$ أي أن: $ر^{٢} + ر - ٦ = ٠$

$\therefore (ر - ٢)(ر + ٣) = ٠$ $\therefore ر = ٢$ أو $ر = -٣$ مرفوض (لأن الحدود موجبة)

$\because ع_٣ = ٣٢٠$ $\therefore ار^{٢} = ٣٢٠$ وبالتعويض عن $ر = ٢$

$\therefore ا \times ٢^{٢} = ٣٢٠$ $\therefore ٤ا = ٣٢٠$ وبقسمة الطرفين على ٤

$\therefore ا = ٥$ المتتابعة هي (٥، ١٠، ٢٠، ...)

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية



لكتابة المتتابعة الهندسية التي فيها $ا = ٥$ ، $ر = ٢$ مثلا نتبع الآتي:

نكتب قيمة ا (العدد ٥) ثم نضغط علامة (×) ثم نضغط على المفتاح (Ans) ونضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط علامة (=) فتعطي الحد الثاني للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة (=) تعطي الحدود التالية وهكذا ....

التقييم المستمر: (المناقشة والحوار)

تابع مع طلابك ما جاء في فقرات حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

(١) (أ) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٣}$

(ب) ليست متتابعة هندسية لاختلاف إشارة الأساس (ر).

(ج) متتابعة هندسية أساسها = ٢.

(د) ليست متتابعة هندسية.

(٢) الحدود التالية هي (١، ٣، ٩، ٢٧)

(٣) $\because ع_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ $\therefore ع_{ن+١} = ٢ \times ٣^{ن-٤}$

$$\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٢ \times ٣^{ن-٤}}{٢ \times ٣^{ن-٥}} = ٣ = \text{مقدار ثابت}$$

المتتابعة هندسية أساسها (ر) = ٣ (مقدار ثابت)

بوضع ن = ٧ $\therefore ع_٧ = ٢ \times ٣^{٦} = ١٨$

الأخطاء الشائعة :

- عند إثبات أن المتتابعة $(ع_ن)$ هندسية يستخدم التعريف $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدار ثابت (لا يتوقف على قيمة ن)، ولا يستخدم قسمة أحد الحدود على الحد السابق له مباشرة مثل $\frac{ع_٢}{ع_١}$ ، $\frac{ع_٣}{ع_٢}$ ، ..... ولكن يستخدم ذلك فقط إذا كانت المتتابعة بالفعل هندسية والمطلوب إيجاد الأساس.
- درب طلابك على استخدام الآلة الحاسبة في كتابة حدود المتتابعة الهندسية وكذلك في إيجاد ناتج العمليات الأسية.
- ذكر طلابك بطرق التحليل المختلفة وكذلك بحل المعادلات الأسية وذلك لإيجاد قيمة ا ، ر .

إجابة تعبير شفهي: إكمال الجدول حسب الأماكن الخالية وبالترتيب من اليمين هي: عندما $ا > ٠$ تناقصية - متناوبة الإشارة .

إجابة تفكير ناقد ص(٣٠):

لا يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية = صفر ولكن يمكن أن يكون ر = ١ وتكون المتتابعة في هذه الحالة تسمى بالمتتابعة الثابتة.

استخدام التكنولوجيا:

درب طلابك علي كيفية استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد حدود المتتابعة الهندسية حسب ماهو موضح في ص (٣١).

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

تابع مع طلابك ما جاء فى فقرات حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

إجابات

(٤) $أ_{ر}^{٤} = ١٨ أ_{ر}$ ∴ $ر^{٣} = ٨$

∴ $ر = ٢$ ، $أ_{ر}^{٣} + أ_{ر}^{٥} = ٢٤٠$

∴ $١٨ أ + ١٣٢ أ = ٢٤٠$

∴ $أ = ٦$ المتتابعة هي (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، .....)

(٥) $أ_{ر} + أ_{ر}^{٢} = ١٢$ ، $أ \times أ_{ر}^{٣} = ٢٧$

وبتربيع المعادلة الأولى وقسمتها على الثابتة.

$$\frac{أ^{٢} ر^{٢} (ر+١)^{٢}}{أ^{٢} ر^{٣}} = \frac{١٢ \times ١٢}{٢٧}$$

∴ $\frac{ر^{٢} + ٢ر + ١}{ر} = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $٣ر^{٢} - ١٠ر + ٣ = ٠$

بالتحليل $(٣ر - ١)(ر - ٣) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$ أ ، $ر = ٣$

$أ = ٢٧$ أ ، $أ = ١$

∴ توجد متتابعتان هندسيتان هما:

(.....، ٣ ، ٩ ، ٢٧) (.....، ٩ ، ٣ ، ١)

(٦) إرتفاع الكرة بعد التصادم الأول $= \frac{٣}{٤} \times ٢٤٠ = ١٨٠$ متر

المتتابعة هى $(١٨٠ ، ١٨٠(\frac{٣}{٤}) ، ١٨٠(\frac{٣}{٤})^{٢})$ إلى ن حدا

$أ = ١٨٠$ ، $ر = \frac{٣}{٤}$ ، $ن = ٧$

∴ $ع_{٧} = أ_{ر}^{٦}$ ∴ $ع_{٧} = ١٨٠(\frac{٣}{٤})^{٦} \simeq ٣٢$ مترًا

الأخطاء الشائعة:

فى بند تعبير شفهى ص (٣٢) يهدف إلى معالجة مفهوم إيجاد الوسط الهندسى بين عددين كخطأ يقع فيه كثير من الطلاب ويجب تنبيه الطلاب إلى أن:

من تعريف الوسط الهندسي لعددين لهما نفس الإشارة نجد أن $ب = \pm \sqrt{أ \times جـ}$

وهذا ممكن فقط إذا كان $أ \times جـ > ٠$ أي أن أ ، جـ يكون لهما نفس الإشارة، وفي حالة اختلاف الإشارة بين أ ، جـ فلا يكون هناك وسط هندسى بينهما.

(٧) عدد حدود المتتابعة $= ٦ + ٢ = ٨$ ∴ $ل = أ_{ر}^{ن-١}$

∴ $٣٢ = \frac{١}{٤} \times ر^{٧}$

∴ $ر^{٧} = ١٢٨ = ٢^{٧}$ ∴ $ر = ٢$

∴ الأوسط هي $(\frac{١}{٢} ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)$

حاول أن تحل

(٤) $(ع_{ن})$ متتابعة هندسية فيها $ع_{٥} = ٨ ع_{٣}$ ، $ع_{٤} + ع_{٦} = ٢٤٠$. أوجد هذه المتتابعة

(٥) متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٢ ، حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٢٧ أوجد هذه المتتابعة.

مثال

(٥) **الربط بالتعليم:** إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية في إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤ ٪ سنويًا، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات؟

الحل

∵ عدد الطلاب حاليا = ٢٤٠٠

∴ عدد الطلاب فى السنة الثانية = $٢٤٠٠ (١ + ٠,٠٤)$

$= ٢٤٠٠ (١,٠٤)$

∴ عدد الطلاب فى السنة الثالثة = $٢٤٠٠(١,٠٤) + ٢٤٠٠(١,٠٤) \times ٠,٠٤$

$= ٢٤٠٠(١,٠٤)(١ + ٠,٠٤) = ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢}$ وهكذا..

أى أن أعداد الطلاب تكون متتابعة هندسية (٢٤٠٠ ، ٢٤٠٠(١,٠٤) ، ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} ، .....)

$أ = ٢٤٠٠$ ، $ر = ١,٠٤$ ، $ن = ٦$ وبالتعويض فى قانون الحد النونى للمتتابعة الهندسية $ع_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$

$ع_{ن} = (٢٤٠٠) \times (١,٠٤)^{٥} = ٢٩١٩,٩٦٦٩٦٦$

أى أن عدد الطلاب بعد ٦ سنوات يساوى ٢٩٢٠ طالبًا تقريبًا.

حاول أ ن تحل

(٦) **الربط بالفيزياء:** تسقط كرة من المطاط من ارتفاع ٢٤٠ مترا فوق سطح الأرض، فإذا كانت الكرة ترتد إلى ارتفاع قدره $\frac{٣}{٤}$ ارتفاعها السابق مباشرة، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام السابع؟

الأوساط الهندسية: *Geometric Means*

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية، ويستخدم أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد هذه الأوساط.

تعريف ٢ إذا كانت أ، ب، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ، جـ حيث: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ أى أنه $ب^{٢} = أ جـ$

فتكون $ب = \pm \sqrt{أ جـ}$

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة $ع_{١}، ع_{٢}، ع_{٣}، ..... ، ع_{ن}$ بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم أى أن: الوسط الهندسى (GM) $= \sqrt[ن]{ع_{١} \times ع_{٢} \times ... \times ع_{ن}}$

تعبير شفهي:

الأوساط الهندسية التى يمكن إدخالها بين عددين تعتمد على إشارة هذين العددين . فسّر هذه العبارة.

إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين:

مثال

(٦) أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة: (٤ ، .... ، .... ، .... ، .... ، ٢٩١٦)

الحل

١- **نوجد عدد حدود المتتابعة**

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة الهندسية

لذا فإن عدد حدود المتتابعة ن $= ٢ + ٥ = ٧$

٢- **نوجد قيمة ر**

باستخدام القانون: $ل = أ_{ر}^{ن-١}$

$٢٩١٦ = ٤ \times ر^{٧-١}$ بالتعويض عن: $أ = ٤$ ، $ل = ٢٩١٦$ ، $ن = ٧$

أى أن: $٤ \times ر^{٦} = ٢٩١٦$ بقسمة الطرفين على ٤ $ر^{٦} = ٧٢٩$

أى أن: $ر^{٦} = (\pm ٣)^{٦}$ ومنها $ر = \pm ٣$

٣- **نستخدم قيمة ر لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة**

الأوساط هى:

أ، ٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢ ، ٢٩١٦

(×٣ ×٣ ×٣ ×٣ ×٣ ×٣)

٤ ، ١٢- ، ٣٦ ، ١٠٨- ، ٣٢٤ ، ٩٧٢- ، ٢٩١٦

(×-٣ ×-٣ ×-٣ ×-٣ ×-٣ ×-٣)

الأوساط المطلوبه هى ١٢، ٣٦، ١٠٨، ٣٢٤، ٩٧٢ أ ، -١٢، ٣٦، -١٠٨، ٣٢٤، -٩٧٢

حاول أن تحل

(٧) أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين:

إذا كان س، ص $\in ع^{+}$ ، س $\neq$ ص

فإن: الوسط الحسابى (ع) $= \frac{س + ص}{٢}$ ، الوسط الهندسى الموجب (هـ) $= \sqrt{س ص}$

∴ ع - هـ $= \frac{س + ص}{٢} - \sqrt{س ص}$

$= \frac{س - ٢\sqrt{س ص} + ص}{٢}$

$= \frac{(\sqrt{س} - \sqrt{ص})^{٢}}{٢} > ٠$ (بوضع المقدار على صورة مربع كامل)

∴ ع > هـ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب

فيكون الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

أضف إلى معلوماتك

إذا كانت: $ع_{١}، ع_{٢}، ع_{٣}، ...$ ، $ع_{ن}$ أعداد حقيقية موجبة فإن: $\frac{ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣} + ... + ع_{ن}}{ن} \geq \sqrt[ن]{ع_{١} ع_{٢} ع_{٣} ... ع_{ن}}$ وتتحقق المساواة فقط عندما: $ع_{١} = ع_{٢} = ع_{٣} = ... = ع_{ن}$

PDF Compressor Pro



الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

تفكير ناقد: ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

مثال

(٧) إذا كانت أ، ب، جـ، ٢ ء كميات موجبة فى تتابع حسابى.
أثبت أن ب جـ > أ ء

الحل

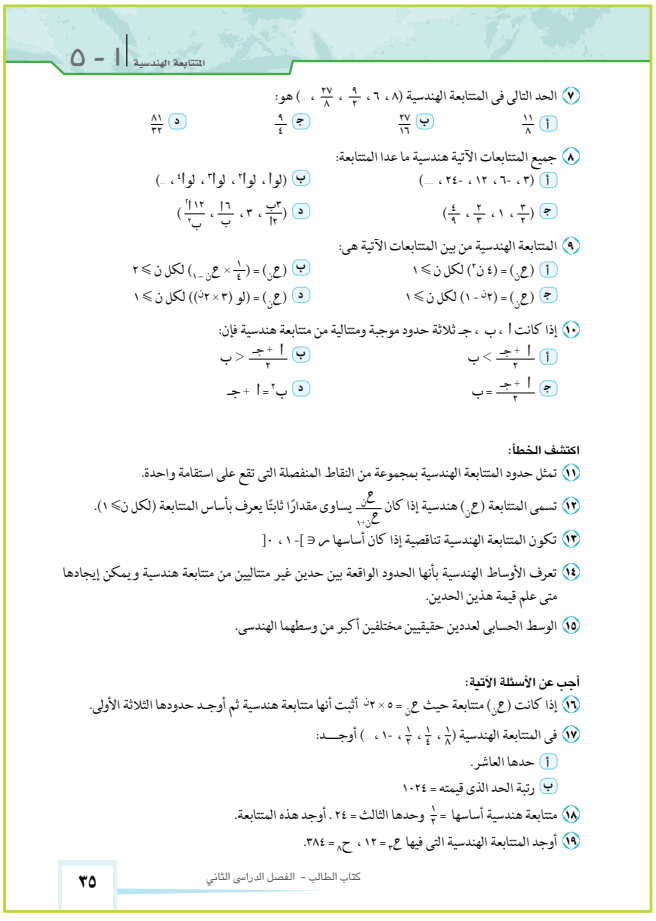
∵ ب وسط حسابى بين أ، جـ
وحيث إن الوسط الحسابى > الوسط الهندسى الموجب
∴ ٢ ب > ٢ √(أ جـ) وبتربيع الطرفين
∴ ٤ ب² > ٤ أ جـ (١)
وبالمثل جـ وسط حسابى بين ب، ء
∴ ٢ جـ > ٢ √(ب ء) وبتربيع الطرفين
٤ جـ² > ٤ ب ء (٢)
ومن (١)، (٢)
ب² × ٤ جـ² > ٤ أ جـ × ٤ ب ء
وبقسمة الطرفين على ٣٦ ب جـ (ب، جـ ∈ ع*)
∴ ب جـ > أ ء

تمارين (أ - ٥)

أكمل ما يأتى

(١) الحد الخامس من المتتابعة (ع_ن) حيث ع_ن = ٢ × (٣)^(ن-١) يساوى .....
(٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...) هو .....
(٣) الحد السادس من المتتابعة الهندسية (١/٢٤٣ ، ١/٨١ ، ١/٢٧ ، ...) هو .....
(٤) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو .....
(٥) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى .....
(٦) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب > .....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة



(٧) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، ٩/٢ ، ٢٧/٨ ، ...) هو:
أ) ١١/٨ ب) ٢٧/١٦ ج) ٩/٤ د) ٨١/٣٢

(٨) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة:
أ) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ...) ب) (لوأ ، لوأ^٢ ، لوأ^٣ ، لوأ^٤ ، ...)
ج) (٣/٢ ، ١ ، ٢/٣ ، ٤/٩) د) (٣/٢ ، ٣ ، ١٦/ب ، ٢١٢/ب^٣)

(٩) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى:
أ) ع_ن = (٤ ن^٢) لكل ن ≤ ١ ب) ع_ن = (١/٤ × ع_ن-١) لكل ن ≤ ٢
ج) ع_ن = (٢^ن - ١) لكل ن ≤ ١ د) ع_ن = (لو (٣ × ٢^ن)) لكل ن ≤ ١

(١٠) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن:
أ) (أ + جـ)/٢ < ب ب) (أ + جـ)/٢ > ب
ج) (أ + جـ)/٢ = ب د) ب^٢ = أ + جـ

اكتشف الخطأ:

(١١) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.
(١٢) تسمى المتتابعة (ع_ن) هندسية إذا كان ع_ن / ع_ن-١ يساوى مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة (لكل ن ≤ ١).
(١٣) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها ر ∈]-١ ، ٠[
(١٤) تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى علم قيمة هذين الحدين.
(١٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٦) إذا كانت (ع_ن) متتابعة حيث ع_ن = ٥ × ٢^ن أثبت أنها متتابعة هندسية ثم أوجد حدودها الثلاثة الأولى.
(١٧) فى المتتابعة الهندسية (١/٨ ، ١/٤ ، ١/٢ ، -١ ، ...) أوجد:
أ) حدها العاشر.
ب) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤
(١٨) متتابعة هندسية أساسها = ١/٢ وحدها الثالث = ٢٤ . أوجد هذه المتتابعة.
(١٩) أوجد المتتابعة الهندسية التى فيها ع_٣ = ١٢ ، ح_٨ = ٣٨٤.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

فى بند تفكير ناقد ص (٣٤)

يوضح مفهوم المتتابعة الثابتة باعتبارها متتابعة حسابية أساسها (صفر) ومتتابعة هندسية أساسها (١) وهى حالة خاصة يتساوى فيها الوسط الحسابى مع الوسط الهندسى.

إجابة تمارين (١-٥) ص (٣٤، ٣٥)

(١) ١٦٢ (٢) ٣(-٢)^(ن-١)
(٣) ١ (٤) ± ٨
(٥) ٢٥ (٦) (أ + جـ)/٢
(٧) ء (٨) ب
(٩) ب (١٠) أ

اخطاء شائعةمن (١١) إلى (١٥)

(١١) الصواب: التي تتبع الدالة الأسية.

(١٢) الخطأ: ع_ن / ع_ن+١ ليس أساس المتتابعة الهندسية

والصواب ر = ع_ن+١ / ع_ن .

(١٣) الخطأ: المتتابعة تناقصية والصواب تكون المتتابعة تذبذبية.

(١٤) و يمكن إيجادها متى عُلِم هذان الحدان وعدد هذه الأوساط.

(١٥) العبارة ينقصها عددان حقيقيان موجبان مختلفان.

(١٦) ع_ن+١ / ع_ن = ٥ × ٢^(ن+١) / ٥ × ٢^ن = ٢ (مقدار ثابت)
المتتابعة هى (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠)

(١٧) ع_١٠ = أ ر^٩ = ١/٨ (٢)^٩ = ٦٤
، ١٠٢٤ = ١٠٢ = ١/٨ (٢)^(ن-١) ، ن = ١٤

(١٨) المتتابعة هي (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

(١٩) المتتابعة هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

(٢٠) ع_ن+١ / ع_ن = ٢ (مقدار ثابت)، ع_٨ = ٩٦ ، ن = ١١

(٢١) الوسط الهندسي = ± ٢٨

(٢٢) العددان هما ١ ، ٩ (٢٣) العددان هما ٤ ، ٩

(٢٤) ر = ٣/٢ والأوساط هي (٤/٩ ، ٢/٣ ، ١ ، ٣/٢ ، ٩/٤)

(٢٥) عدد الأوساط = ٥

(٢٦) المتتابعة هي: (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

(٢٧) ∵ الوسط الحسابى لأى كميتين موجبتين مختلفتين أكبر

PDF Compressor Pro

من وسطهما الهندسى

∴ س + ع < ٢ ص ١

ص + ل < ٢ ع ٢

بجمع المتباينتان ١ ، ٢ ينتج أن

س + ع + ص + ل < ٢ص + ٢ ع

∴ (س + ل) < ص + ع

(٢٨) ل = ا $ر^{ن-١}$

∴ ١٥٣٦ = ١٢ × $٢^{ن-١}$

$٧٢ = ٢^{ن-١}$ ∴ ن = ٨

(٢٩) ل = ٦٠٠٠٠٠ $(١,٠٣)^{٤}$

ل ≃ ٦٧٥٣٠٥

(٣٠) ل = ١٢٠٠٠٠ $(٠,٧٨)^{٤}$ ل ≃ ٤٤٤١٨ جنيها

(٣١) ل = ١٢٠٠ $(١,٠٦)^{٦}$ ل ≃ ١٧٠٢ جنيه

التفكير الإبداعى: يعطى امكانية الطالب المتفوق فى حل مسائل البرهنة النظرية التى تتطلب مهارات خاصة لدى الطلاب الفائقين.

أ ا + ب + جـ = ١

ا + جـ = ١ - ب ، ا + ب = ١ - جـ ،

ب + جـ = ١ - ا

، ا ، ب كميتان موجبتان

$\frac{ا+ب}{٢} > \sqrt{ا\,ب}$ (١)

$\frac{ب+جـ}{٢} > \sqrt{ب\,جـ}$ (٢)

$\frac{ا+جـ}{٢} > \sqrt{ا\,جـ}$ (٣)

بضرب (١) ، (٢) ، (٣)

$(ب + جـ)(ا + جـ)(ا + ب) > ٨\sqrt{ا^{٢}\,ب^{٢}\,جـ^{٢}}$

$(ب + جـ)(ا + جـ)(ا + ب) > ٨\,ا\,ب\,جـ$

وبالتعويض من المعطى.

$(١ ، ا)(١ - ب)(١ - جـ) > ٨\,ا\,ب\,جـ$

ب نفرض أن س ، $\frac{١}{س}$ عددان $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢} > \sqrt{س \times \frac{١}{س}}$

∴ $س + \frac{١}{س} > ٢$

تمارين إثرائية:

(١) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها السادس يساوى٩٦ . [الإجابة: (٣، ٦، ١٢، ...)]

(٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدودها موجبة وحدها الرابع= $\frac{١}{٢}$ والنسبة بين حديها التاسع والسابع تساوى ١: ٤ [الإجابة: (٤، ٢، ١، ..)]

(٣) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٥ ومجموع الثلاثة حدود الأولى =٣٥ . أوجد المتتابعة ثم أوجد حدها الثامن .

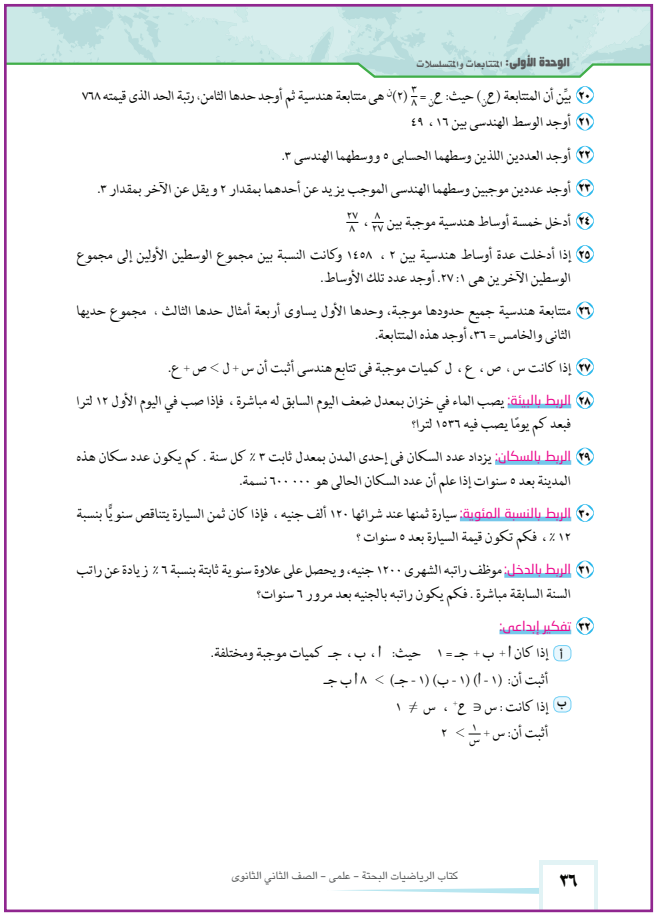
[الإجابة: (٣، ٦، ١٢، ...) ، ٨٤م]

(٤) ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ٧ وحاصل ضربها ٨. أوجد هذه الأعداد [الإجابة: ١، ٢، ٤]

(٥) عددان موجبان وسطهما الهندسى ٤ وأحدهما يزيد عن الآخر بمقدار ٦. فما هما العددان ؟ [الإجابة: ٢، ٨]

(٦) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٩، ٥٧٦ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هى ١:٨ فما عدد هذه الأوساط.

[الإجابة: ٥أوساط]



PDF Compressor Pro

٦ - ١ المتسلسلات الهندسية

Geometric Series


الوحدة الأولى

المتسلسلات الهندسية

٦ - ١

Geometric Series

سوف تتعلم
- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- تكوين المتتابعة الهندسية .
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر إعتيادى .

المصطلحات الأساسية
- متسلسلة هندسية Geometric Series
- متسلسلة هندسية غير منتهية Infinite Geometric Series

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية Graphical Programs

مجموع المتسلسلة الهندسية: Sum of the Geometric Series

نعلم أن المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية و يرمز لمجموع ن حدًا منها بالرمز جـن .

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of the First n Terms of a Geometric Series

أولا: إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت ا + ار + ار^{٢} + ... + ار$^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول ا، أساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع جـن لهذه المتسلسلة كما يلى:

جـن = ا + ار + ار^{٢} + ... + ار$^{ن-٢}$ + ار$^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر فإن:

رجـن = ار + ار^{٢} + ار^{٣} + ... + ار$^{ن-١}$ + ار^{ن} (٢)

وبطرح المعادلتين يكون:

جـن - رجـن = ا - ار^{ن}

أى أن: جـن(١ - ر) = ا(١ - ر^{ن})

وبقسمة الطرفين على (١ - ر) بشرط أن ١ - ر ≠ ٠

$جـن = \frac{ا(١-ر^{ن})}{١-ر}$ ، ر ≠ ١

تفكير ناقد: ماذا تكون قيمة المجموع عندما ر = ١؟ أوجد قيمة المجموع فى هذه الحالة.

مثال

١ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها: ا = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

الحل

$جـن = \frac{ا(١-ر^{ن})}{١-ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ_{٨} = \frac{٣(١-٢^{٨})}{٢-١}$ بالتعويض عن: ا = ٣، ر = ٢، ن = ٨

جـ$_{٨}$ = ٣ × ٢٥٥ = ٧٦٥ وبالتبسيط

حاول أن تحل

١ أوجد مجموع المتتابعتين الهندسيتين اللتين فيهما:

أ ا = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ ب ا = ١٠٠٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

٣٧ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

خلفية

سبق أن درست المتسلسلة الحسابية وعلمت أن المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدودها ويرمز لها بالرمز حـن، كذلك المتسلسلة الهندسية هي جمع حدود المتتابعة الهندسية ويرمز لمجموع ن حدًا منها بالرمز حـن وسوف ندرس في هذا الدرس مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية، وكذلك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذا للأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية بمعلومية الحد الأول والأساس.
- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.
- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.
- يحول الكسر العشري الدائري إلى كسر اعتيادي.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلات الهندسية

مفردات أساسية:

متسلسلة هندسية - رمز التجميع - مجموع متسلسلة هندسية - كسر عشري دائري.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - التعليم التعاوني.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من صفحة (٣٧) إلى صفحة (٤٥) - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

التهيئة:

استرجع مع طلابك مفهوم المتتابعة الهندسية ومجموع حدود المتتابعة الهندسية.

إجراءات الدرس:

ابدأ مع طلابك بإيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس.

توصل مع طلابك إلى القانون: $حـن = \frac{ا(١-ر^{ن})}{١-ر}$ بشرط ر ≠ ١

فسر الشرط ر ≠ ١ مع الطلاب.

إجابة تفكير ناقد ص(٣٧):

يؤكد هذا التفكير على مفهوم المتتابعة الهندسية الثابتة كحالة خاصة من المتتابعات الهندسية

في المتتابعة الهندسية عندما ر = ١ تصبح متتابعة ثابتة ويكون مجموع ن حدًا الأولى منها = ن × قيمة الحد.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

في بند حاول أن تحل ناقش مع طلابك ما ورد فى هذا البند واتباع إجابتهم:

(١) (أ) $جـ_{٦} = \frac{٤[(٣)^{٦} - ١]}{٣ - ١} = ١٤٥٦$

(ب) $جـ_{١٠} = \frac{١٠٠٠[(\frac{١}{٢})^{١٠} - ١]}{٣ - ١} = ١٩٩٨$

(٢) (أ) $جـ = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٩ - ٣ \times ٦٥٦١}{١ - ٣} = ٩٨٣٧$

(ب) $جـ = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٢٠٤٨ - \frac{١}{٢} \times ١٢٨}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٩٦٨$

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

(٣) (أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} (٢)^{ر-١} \times \frac{١}{٨} = ٨١٨٤$

(ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦ (\frac{١}{٢})^{ر-١} = \frac{٥١١}{٦٤}$

(٤) $\because ع_{ر} = جـ_{ر} - جـ_{ر-١} = (١٠٢٤ - ٢^{١٠-ن}) - (١٠٢٤ - ٢^{١٠-(ن-١)})$

$ع_{ر} = ٢^{١١-ن} - ٢^{١٠-ن}$

$\therefore ع_{١} = ٢^{١٠} - ٢^{٩} = ٥١٢$ ، $ر = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ المتتابعة هى (٥١٢، ٢٥٦، ١٢٨، ...)

(٥) $\because جـ = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ $\therefore \frac{٢٤٣ - ر}{١ - ر} = ٣٦٤$

$\therefore ٢٤٣ ر - ٣٦٤ ر = ٢٤٣$

$٣٦٣ ر = ١٢١$ $\therefore ر = \frac{١}{٣}$

المتتابعة هى (٢٤٣، ٨١، ٢٧، ...)

(٦) $جـ = \frac{٨٠٠[(٢)^{١٠} - ١]}{٢ - ١} = ٨١٨٤٠٠$

تمارين إثرائية :

(١) أوجد (٧ + ١٤ + ٢٨ + ... إلى ٦ حدود) [الإجابة: ٤٤١]

(٢) أوجد (٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦) [الإجابة: ٧٢٨]

(٣) متتابعة حدها الأول = ٩ ، $ع_{ر+١} = \frac{٢}{٣} ع_{ر}$ بين أنها هندسية وأوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها [الإجابة: $\frac{٢٠٥٩}{٨١}$]

فى بند فكر ص(٣٨)

$ع_{٥} = ٣ \times ٢^{٥-١} = ٤٨$

$ع_{١٢} = ٣ \times ٢^{١٢-١} = ٦١٤٤$

$حـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٦١٤٤ \times ٢ - ٤٨}{١ - ٢}$

$= ١٢٢٤٠$

ثانيا: إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن: $جـ_{ن} = \frac{أ - ر^{ن}}{١ - ر}$ (١)

وأن: $ل = أ ر^{ن-١}$ وبضرب الطرفين فى ر

فتكون $ل ر = أ ر^{ن}$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) فإن: $جـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

$جـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ = \frac{١ - ٣ \times ٦٥٦١}{٣ - ١}$ بالتعويض عن: أ = ١ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

$جـ = \frac{١٩٦٨٢}{٢} = ٩٨٤١$ بالتبسيط

حاول أن تحل

(٢) أوجد مجموع المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

(أ) أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ (ب) أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ل = ١٢٨

استخدام رمز التجميع *Using the Summation Notation*

مثال

(٣) أوجد $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ (٢)^{ر-١٠}$

الحل

$ع_{ر} = أ ر^{ر-١} = ٣(٢)^{٥-١٠} = ٤٨$ ، ر = ٢ ، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨

$جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ_{٨} = \frac{٤٨(١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$ بالتعويض عن: أ = ٤٨ ، ر = ٢ ، ن = ٨

$جـ_{٨} = ٤٨ \times ٢٥٥ = ١٢٢٤٠$ بالتبسيط

فكر هل يمكنك إيجاد المجموع فى المثال السابق بمعلومية أ ، ل ، ر ؟ كيف ذلك

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

(أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨} (٢)^{ر-١}$ (ب) $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦ (\frac{١}{٢})^{ر-١}$

مثال تكوين المتتابعة الهندسية

(٤) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون: $جـ_{ن} = ١٢٨ - ٢^{٧-ن}$

فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها السابع.

الحل

بوضع: ن = ١ ∴ $جـ_{١} = ١٢٨ - ٢^{٧-١} = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤$ أي أن $ع_{١} = ٦٤$

بوضع: ن = ٢ ∴ $جـ_{٢} = ١٢٨ - ٢^{٧-٢} = ١٢٨ - ٣٢ = ٩٦$

∵ $ع_{٢} + ع_{٣} = جـ_{٣}$ ∴ $٦٤ + ع_{٣} = ٩٦$ ∴ $ع_{٣} = ٩٦ - ٦٤ = ٣٢$

بوضع: ن = ٣ $جـ_{٣} = ١٢٨ - ٢^{٧-٣}$

أي أن $جـ_{٣} = ١٢٨ - ١٦ = ١١٢$

∵ $ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣} = جـ_{٣}$

أي أن $ع_{٣} = جـ_{٣} - جـ_{٢}$

∴ $ع_{٣} = ١١٢ - ٩٦ = ١٦$

∴ المتتابعة هى: (٦٤، ٣٢، ١٦، ...) ، $ع_{ر} = أ ر^{ر-١} = ٦٤ (\frac{١}{٢})^{ر-١}$

لاحظ أن: مما سبق يمكن استنتاج أن $ع_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١}$ ومنها نوجد قيمتى أ ، ر ومن ذلك فإن

$ع_{٧} = جـ_{٧} - جـ_{٦} = (١٢٨ - ٢^{٧-٧}) - (١٢٨ - ٢^{٧-٦}) = ١ + ٢ = ١$

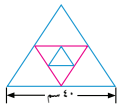
حاول أن تحل

(٤) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $جـ_{ن} = ١٠٢٤ - ٢^{١٠-ن}$ فأوجد المتتابعة .

(٥) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

مثال

(٥) **الربط بالهندسة** يبين الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



الحل

محيط المثلث الأكبر = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

محيط المثلث الأصغر التالى = ٣ × ٢٠ = ٦٠

محيط المثلث التالى للمثلث الأصغر = ٣ × ١٠ = ٣٠

أى أن النمط هو: ١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، .... إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ... وهى مجموع متسلسلة هندسية

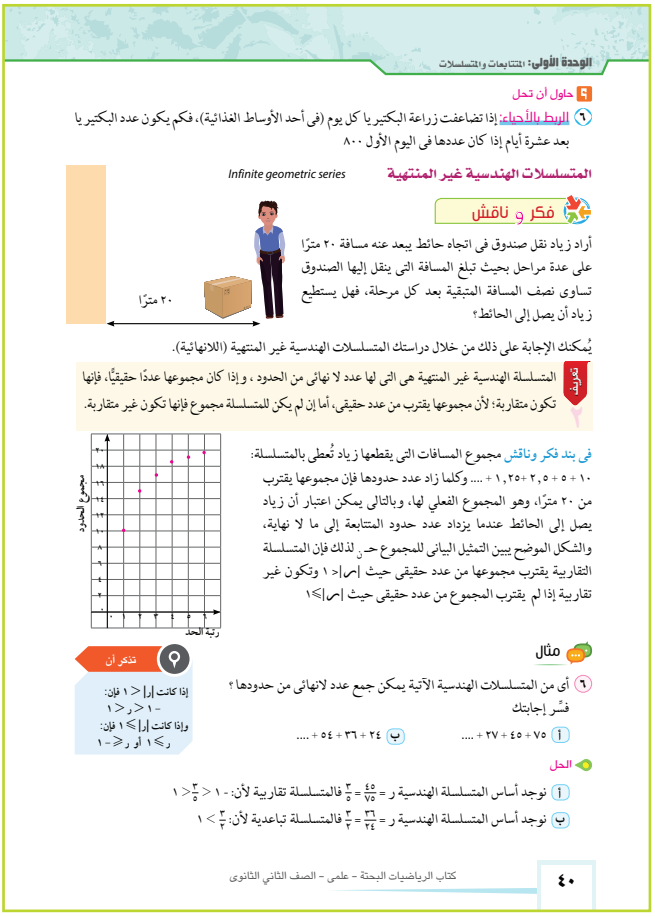
صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

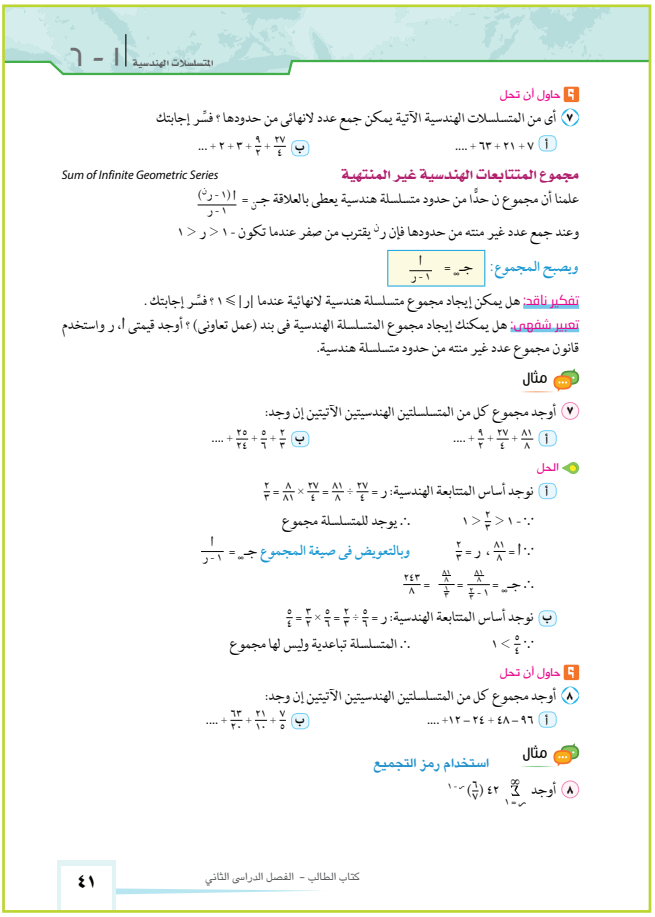
بالتعويض عن: أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

وبالتبسيط واستخدام الآلة الحاسبة $جـ_{١٠} = \frac{١٢٠(١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}} \simeq ٢٤٠$

تذكر أن محيط المثلث المتساوى الأضلاع = ٣ × طول ضلعه

PDF Compressor Pro





فى بند عمل تعاونى:

يهدف هذا العمل التعاونى إلى فكرة تكوين المتتابعة الهندسية اللا نهائية وتقدير مجموعها إلى ما لانهاية.

ذكر طلابك بالأتى:

- كيفية إيجاد محيط المربع
- علاقة طول القطعة المستقيمة الواصلة بمنتصفى ضلعين فى مثلث بطول الضلع الثالث.

إجابة اسئلة العمل التعاونى:

عدد المربعات الناتجة عدد لانهائى لايمكن حصره.

المتسلسلة الناتجة هى: ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ٨ + ... ∞

وهى تمثل متتابعة هندسية فيها ع_ن = ١٢٨ $(\frac{١}{٢})^{ن}$ وبمفهوم النهايات نجد أن:

مجموع محيطات المربعات الناتجة = ١٢٨

اكد علي طلابك بالمفاهيم الاتية:

شرط جمع متسلسلة هندسية

هو: -١ < ر < ١

أى ر ∈]-١، ١[

يمكن استنتاج قانون مجموع المتتابعة الهندسية الغير منتهية من قانون مجموع ن حدًا من متتابعة هندسية كالآتى:

$$حـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{أ ر^{ن}}{١ - ر}$$

وبملاحظة أن: $ر^{ن}$ = صفر بشرط: |ر| < ١

تكون: $حـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ حيث |ر| < ١

فى بند تكفير ناقد ص (٤١)

يهدف إلى التأكيدعلى الطالب بمعرفة شرط جميع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية .

الإجابة:

لايمكن إيجاد متسلسلة هندسية لانهائية إلا بشرط |ر| < ١

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

٧ أ |ر| < ١ لايمكن جمعها إلى ∞

ب |ر| < ١ يمكن جمع عدد لانهائى من حدودها

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول ان تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

(٨) أ $|ر| = \frac{١}{٢}$ ، $جـ_{\infty} = ٦٤$

(٩) أ $= ٥٦$، $ر = \frac{٣}{٤}$ ∴ $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ ∴ $جـ_{\infty} = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

(١٠) $٠,٦ = \frac{٢}{٣}$ ، $٠,٦٣ = \frac{٧}{١١}$ ، $٠,٤٦ = \frac{٤٦}{٩٩}$ ، $٠,٦٥٤ = \frac{٣٦}{٥٥}$

(١١) $جـ_{\infty} = \frac{١٢٥}{٢}$

اشر إلى الطلاب انه يمكن كتابة المتسلسلة السابقة بالصورة:

$$جـ_{\infty} = \sum_{ر=١}^{\infty} ٢٥ \times (\frac{٣}{٥})^{ن-١}$$

بند تفكير ناقد ص (٤٣)

يفرق الطالب بين متوسط الدخل الشهرى ومتوسط الدخل السنوى.

الإجابة:

نعم يمكن إيجاد المتوسط الشهرى لدخل العامل كالآتى:

المتوسط الشهرى لدخل العامل = $\frac{٣٧٩٨}{٥} = ٧٥٩,٦$ جنيهًا (لاحظ أننا اختصرنا ١٢ فى كل من البسط والمقام وبالتالى لا يتغير الناتج)

الأخطاء الشائعة:

الخطأ: عدم إمكانية الطالب علي التفرقة بين مجموع عدد منته من حدود متسلسلة هندسية ، مجموع عدد غير منته من حدود متسلسلة هندسية.

العلاج: مراجعة مفهوم مجموع المتابعة الهندسية ،مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية ص (٤١).

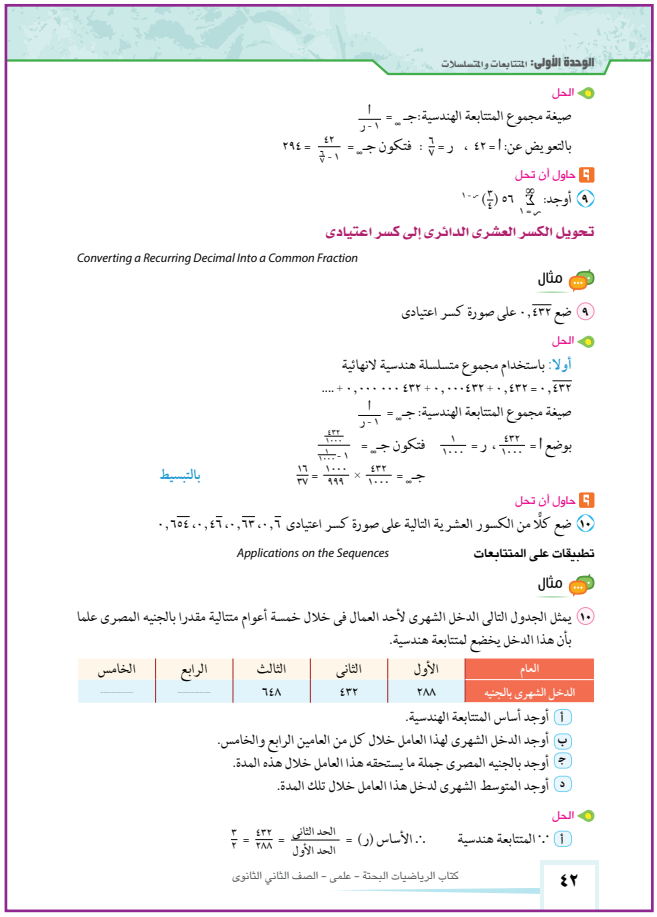
إجابات تمارين الدرس السادس:

(١) أ (٢) جـ (٣) جـ (٤) (٥) أ

تمارين إثرائية:

(١) صاروخ يتحرك فى الفضاء فإذا قطع فى الساعة الأولى من حركته ٦٥٦١ كم وكان ما يقطعه فى كل ساعة بعد ذلك يساوى $\frac{٢}{٣}$ ما يقطعه فى الساعة السابقة مباشرة. احسب بعد كم ساعة يقطع الصاروخ ١٨٩١٥ كم. [**الإجابة:** ٨ ساعات]

(٢) صهريج ماء سعته ٦٣٠٥ لترات كان فارغًا ثم ملىء على عدة أيام ، فإذا كان ماصب فيه فى اليوم الأول ١٢٨ لترًا وكان ما صب فيه فى كل يوم من الأيام التالية يساوى مرة ونصف قدر ماصب فيه فى اليوم السابق مباشرة. احسب بعد كم يومًا امتلأ الصهريج [**الإجابة:** ٨]



الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

بالتعويض عن: أ = ٤٢ ، $ر = \frac{٦}{٧}$: فتكون $جـ_{\infty} = \frac{٤٢}{١ - \frac{٦}{٧}} = ٢٩٤$

حاول أن تحل

(٩) أوجد: $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦ (\frac{٣}{٤})^{ر-١}$

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

Converting a Recurring Decimal Into a Common Fraction

مثال

(٩) ضع $٠,\overline{٤٣٢}$ على صورة كسر اعتيادى

الحل

أولا: باستخدام مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$٠,\overline{٤٣٢} = ٠,٤٣٢ + ٠,٠٠٠٤٣٢ + ٠,٠٠٠٠٠٠٤٣٢ + ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٤٣٢ + ...$

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

بوضع أ = $\frac{٤٣٢}{١٠٠٠}$ ، ر = $\frac{١}{١٠٠٠}$ فتكون $جـ_{\infty} = \frac{\frac{٤٣٢}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠٠}}$

$جـ_{\infty} = \frac{٤٣٢}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠٠}{٩٩٩} = \frac{١٦}{٣٧}$ بالتبسيط

حاول أن تحل

(١٠) ضع كلًا من الكسور العشرية التالية على صورة كسر اعتيادى $٠,\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٤٦}$ ، $٠,\overline{٦٣}$ ، $٠,\overline{٦٥٤}$

تطبيقات على المتتابعات *Applications on the Sequences*

مثال

(١٠) يمثل الجدول التالى الدخل الشهرى لأحد العمال فى خلال خمسة أعوام متتالية مقدرا بالجنيه المصرى علما بأن هذا الدخل يخضع لمتتابعة هندسية.

العام	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس
الدخل الشهرى بالجنيه	٢٨٨	٤٣٢	٦٤٨	.....	.....

(أ) أوجد أساس المتتابعة الهندسية.

(ب) أوجد الدخل الشهرى لهذا العامل كل من العامين الرابع والخامس.

(جـ) أوجد بالجنيه المصرى جملة ما يستحقه هذا العامل خلال هذه المدة.

(د) أوجد المتوسط الشهرى لدخل هذا العامل خلال تلك المدة.

الحل

(أ) ∵ المتتابعة هندسية ∴ الأساس (ر) = $\frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}} = \frac{٤٣٢}{٢٨٨} = \frac{٣}{٢}$



(ب) الدخل الشهرى خلال العام الرابع = $ع_٤ = ر \times ٦٤٨ = \frac{٣}{٢} \times ٦٤٨ = ٩٦٢$ جنيهًا،

الدخل الشهرى خلال العام الخامس = $ع_٥ = ر \times ٩٦٢ = \frac{٣}{٢} \times ٩٦٢ = ١٤٥٨$ جنيهًا

(جـ) جملة ما يستحقه العامل = ١٢ (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ... إلى ٥ حدود)

∵ $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

∴ $جـ_{ن} = \frac{٢٨٨ \times ١٢ [١ - (\frac{٣}{٢})^{٥}]}{١ - \frac{٣}{٢}} = ٤٥٥٧٦$ جنيه

ويستخدم ترتيب مفاتيح الآلة الحاسبة على النحو التالى:

(3) + 2) (3) + (1 = (1 2) (5) − 1 = (1 2) (1) − 2) (3) + (2 8 8 = 2 8 8 =

(د) المتوسط الشهرى لدخل العامل = $\frac{\text{جملة الدخل}}{\text{عدد الشهور}} = \frac{٤٥٥٧٦}{١٢ \times ٥} = ٧٥٩,٦$ جنيه

تفكير ناقد: هل يمكن إيجاد المتوسط الشهرى لدخل العامل وذلك بقسمة (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + .. إلى ٥ حدود) على ٥ سنوات؟ فسّر ذلك.

حاول أن تحل

(١١) الربط بالفيزياء: تم دحرجت كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترا ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة . فأوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف.

تمارين (١ - ٦)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....) هو:

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٠

(٢) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى:

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٣) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ٤٠ - ٥٣ \times ١٠^{-ن}$ فإن الحد الثالث منها يساوى:

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

PDF Compressor Pro

(٥) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى:
(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

اكتشف الخطأ:

(٦) يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهائية عندما تكون |ر| ≥ ١
(٧) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦، ٨، ٤، ....) أكبر من ضعف حدها الأول.

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٨) أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية:
(أ) (٦، ١٢، ٢٤، إلى ٦ حدود) (ب) (١٢٥، ٢٥، ٥، .... إلى ٦ حدود)
(جـ) (٣، -٦، ١٢، ...، ٧٦٨)

(٩) أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن:
(أ) (٢٤، ١٢، ٦، ....) (ب) (٣، -٦، ١٢، ....)
(جـ) $(\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, ...)$ (د) (2×5^{-n})

(١٠) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية:
(أ) (٣، $\sqrt{3}$، ١، ....) (ب) $(ع_ن) = (-3)^{-n}$

(١١) ضع كلا من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسور اعتيادية باستخدام المتتابعة الهندسية اللانهائية: $٠,\overline{٧}$ ، $٠,٢\overline{٤}$ ، $٠,\overline{٨٦٣}$

(١٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

(١٣) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣

(١٤) كم حدًا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣، ٦، ١٢، ....) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.

(١٥) أثبت أن المتتابعة $(ع_ن) = (١٠ \times ٢^{-ن})$ هى متتابعة هندسية، وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التى مجموعها ٢٥٥٥

(١٦) أوجد عدد حدود المتتابعة الهندسية التى مجموع حدودها $\frac{4}{5}$ ١٢١ وحدها الأول يساوى ٨١ وحدها الأخير يساوى $\frac{1}{3}$.

(١٧) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_٣ = ٦$ ، $ع_٣ - ع_١ = ٩$. أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها.

(١٨) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨. أوجد هذه المتتابعة.

(١٩) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{16}{3}$. فما مجموعها؟

(٢٠) إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{375}{4}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما.

(٢١) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥.

(٢٢) متتابعة هندسية غير منتهية، حدودها موجبة، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{135}{4}$. أوجد هذه المتتابعة.

(٢٣) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_١ + ع_٤ = ٧٠$ ، $ع_٣ + ع_٦ = ٦٠$ أثبت أنه توجد متتابعتان، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول.

(٢٤) $(ع_ن)$متتابعة هندسية فيها $ع_٣ - ع_٢ = ٤٥$ ، $جـ_١$ الأولى = ١٨٠ ، أوجد المتتابعة، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع.

(٢٥) متتابعة هندسية غير منتهية، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة.

(٢٦) متتابعة هندسية غير منتهية، وأى حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، إذا كان حدها الرابع = ٣. فأوجد هذه المتتابعة.

(٢٧) **الربط بالتعدين:** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى.

(٢٨) **الربط بالدخل:** بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٦,٠٪ من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه فى السنة السابعة، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى.

تطبيقات فى المشكلة السكانية:

نشاط



إذا كان عدد سكان إحدى المدن فى نهاية عام ٢٠٠٠ يساوى $\frac{1}{2}$ مليون نسمة، وأصبح عام ٢٠١٦ يساوى ٨ ملايين نسمة ، فإذا كانت الزيادة السكانية ثابتة وتخضع لمتتابعة حسابية.

احسب:

١- النسبة الثابتة للزيادة السكانية. ٢- المعادلة الخطية لتقدير عدد السكان.
٣- قدر عدد السكان عام ٢٠٢٠. ٤- قدر عدد السكان عام ٢٠٢٥.
٥- بالاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات. اكتب بحثا عن الزيادة المطردة فى عدد السكان فى مصر، ومدى تأثيرها على الدخل القومى والحلول المقترحة لمعالجة هذه المشكلة السكانية.

إجابة تمارين (١-٦) ص٤٣:

الأخطاء الشائعة:

(٦) **الخطأ:** |ر| ≥ ١ **الصواب:** |ر| < ١ أو -١ < ر < ١ أو ر ∈]-١، ١[

(٧) **الخطأ:** إيجاد مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية

الصواب: يساوى ضعف حدها الأول.

إجابات:

(٨) (أ) $جـ_٦ = ٣٧٨$ (ب) ١٥٦,٢٤ (جـ) ٥١٣

(٩) (أ) $-١ < \frac{1}{2} < ١$ يمكن جمعها إلى ما لانهاية ، $جـ_∞ = \frac{24}{1 - \frac{1}{2}} = ٤٨$

(ب) الأساس = -٢ لايحقق شرط جمع المتتابعة إلى ∞ .

(جـ) الأساس = -٢ لايحقق شرط جمع المتتابعة إلى ∞

(د) $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = \frac{2}{5}$ ، الأساس = $\frac{1}{5}$ لذلك يمكن جمعها إلى ∞ $جـ_∞ = \frac{2}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

(١٠) (أ) $جـ_∞ = \frac{3}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

(ب) $ع_١ = ٩$ ، $ر = \frac{1}{3}$ ، $جـ_∞ = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2}$

(١١) $٠,\overline{٧} = \frac{7}{9}$ ، $٠,٢\overline{٤} = \frac{11}{45}$ ، $٠,\overline{٨٦٣} = \frac{19}{22}$

(١٢) $٣٦٤ = \frac{٢٤٣ - ر}{ر - ١}$ ومنها $ر = \frac{1}{3}$ المتتابعة هى (٢٤٣، ٨١، ٢٧، ...)

(١٣) المتتابعة هى (١، ٣، ٩، ...) (١٤) ن = ٧ حدود

(١٥) عدد الحدود (ن) = ٩ حدود. (١٦) عدد الحدود (ن) = ٧ حدود

(١٧) المتتابعة هى (٣، ٦، ١٢، ...) ، $جـ_{١٢} = ١٢٢٨٥$.

(١٨) المتتابعة هى (٠,٢٥ ، ٠,٥ ، ١، ٢، ...)

(١٩) جـ = ٥٤ (٢٠) (٧٥، ١٥، ٣، ...) ، $(\frac{225}{2}, -\frac{45}{2}, \frac{9}{2}, ...)$

(٢١) (١٠، ٦، ٣,٦، ....) (٢٢) (٤٥، ١٥، ٥، ....)

(٢٣) المتتابعة الأولى (٥٤ ، ٣٦ ، ٢٤ ، ...) $جـ_∞ = ١٦٢$
المتتابعة الثانية (١٦، ٢٤، ٣٦، ...) لايمكن جمعها إلى ∞

(٢٤) المتتابعة هى (٩٦، ٤٨، ٢٤، ...) ، $جـ_∞ = ١٩٢$

(٢٥) المتتابعة هى (٦، ٣، $\frac{3}{2}$ ، ...)

(٢٦) المتتابعة هى (٨١، ٢٧، ٩، ...)

(٢٧) إنتاج الذهب يتبع المتتابعة التالية:
(٤٢٠٠، ٤٢٠٠(٠,٩)، ٤٢٠٠$(٠,٩)^٢$، ...)
$ع_٨ = أ_٧ = ٤٢٠٠(٠,٩)^٧ = ٢٠٠٨,٨$ كجم
$جـ_∞ = \frac{أ_١ (١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{٤٢٠٠(١ - (٠,٩)^٨)}{١ - ٠,٩} \simeq ٢٣٩٢٠$ كجم

(٢٨) $جـ_٧ = \frac{٧٢٠٠[١ - (١,٠٦)^{-٧}]}{١ - ١,٠٦}$

PDF Compressor Pro

معالجة بعض القضايا المرتبطة بالبيئة

نشاط: تطبيقات فى المشكلة السكانية

يحظى موضوع السكان باهتمام كبير لما له من دور فعال فى التأثير على حياة الإنسان من النواحى الاجتماعية والاقتصادية والجغرافية إلى جانب المتغيرات السكانية وارتباطها الوطيد بخصائص المجتمع وقيمة وتقاليده والسياسات التى تتخذها الحكومات للتدخل فى حل مشكلاتهأو تغيير اتجاهتها وتطوراتها. لذلك كان التزايد السكانى السريع خلال القرنين الماضيين من الأسباب الرئيسية التى أدت إلى انخفاض مستوى المعيشة لسكان تلك الدول التى تعانى من هذه الزيادة .

إجابة اسئلة النشاط:

(١) $٨ = \frac{١}{٢} + (١٦ - ١) \times د$ ومنها $د = \frac{١}{٢}$

(٢) $ع_{ن} = \frac{١}{٢} م$ (٣) $ع_{٢٠} = ٢٠ \times \frac{١}{٢} = ١٠ \times ١٠^{٦}$ نسمه

(٤) $ع_{٢٥} = ٢٥ \times \frac{١}{٢} = ١٢,٥ \times ١٠^{٦}$ نسمة

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز	يستطيع الطالب الإجابة على جميع أسئلة النشاط إجابة صحيحة دون أخطاء ونتائج نهائية صحيحة
جيد جدًا	يستطيع الطالب الإجابة على جميع أسئلة النشاط وهناك فقط خطأ فى الناتج النهائى لبعض الأسئلة.
جيد	يستطيع الطالب الإجابة على معظم أسئلة النشاط ولكن توجد بعض الأخطاء فى الإجابات.
مقبول	يستطيع الطالب الإجابة على بعض أسئلة النشاط ويخطىء فى البعض الآخر.
ضعيف	لا يستطيع الطالب إكمال حل أسئلة النشاط ويحتاج إلى المساعدة والتوجية.

(٥) كلف الطلاب باعداد تقرير عن المشكلة السكانية ومدى تأثيرها على الدخل القومى . وتناقش الإجابات للوصول إلى حلول مقترحة للتنفيذ.

(٦) أعطى الطلاب تقييمات فى ضوء سلم تقييم النشاط.

إجابة تمارين عامة على الوحدة

(١) جـ (٢) ب (٣) ب (٤) ب (٥) د

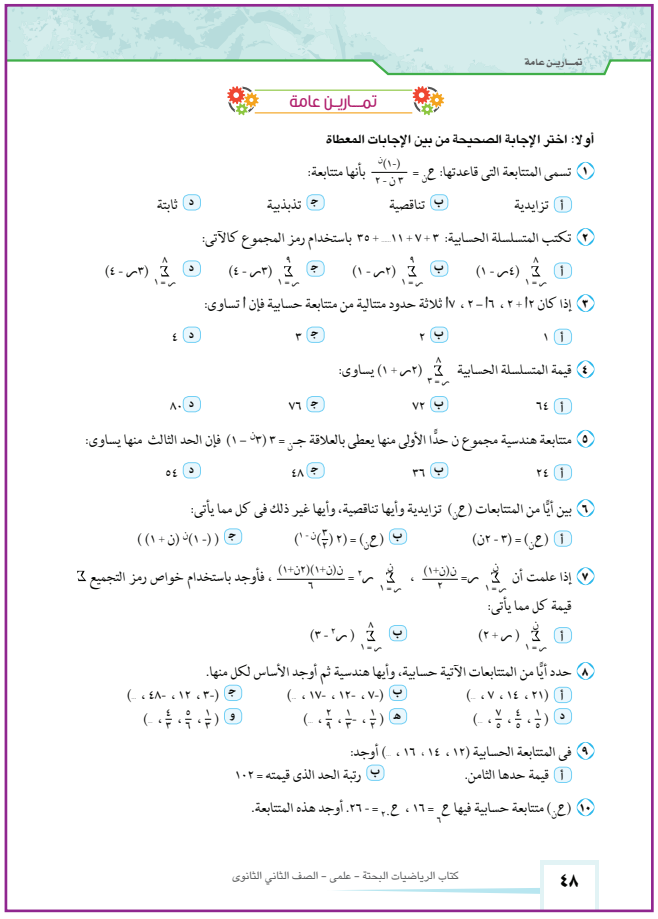
(٦) أ تناقصية. ب تزايدية. جـ تذبذبية

(٧) أ $\frac{ن}{٢}(٣ + ن)$ ب ١٨٠

(٨) أ هندسية ، $ر = \frac{٢}{٣}$ ب حسابية ، $ى = -٥$

جـ هندسية ، $ر = -٤$ د حسابية ، $ى = \frac{٣}{٥}$

هـ هندسية ، $ر = -\frac{٢}{٣}$ و ليست حسابية وليست هندسية.



تمـارين عامة

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) تسمى المتتابعة التى قاعدتها: $ع_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{٢ - ن٣}$ بأنها متتابعة:

أ تزايدية ب تناقصية جـ تذبذبية د ثابتة

(٢) تكتب المتسلسلة الحسابية: ٣ + ٧ + ١١ + ... + ٣٥ باستخدام رمز المجموع كالآتى:

أ $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٤ر - ١) ب $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٣ر - ١) جـ $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٣ر - ٤) د $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٣ر - ٤)

(٣) إذا كان أ٢ + ٢ ، أ٦ - ٢ ، أ٧ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى:

أ ١ ب ٢ جـ ٣ د ٤

(٤) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨}$ (٢ر + ١) يساوى:

أ ٦٤ ب ٧٢ جـ ٧٦ د ٨٠

(٥) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة جـن = ٣ (٢^ن - ١) فإن الحد الثالث منها يساوى:

أ ٢٤ ب ٣٦ جـ ٤٨ د ٥٤

(٦) بين أيًا من المتتابعات ($ع_{ن}$) تزايدية وأيها تناقصية، وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ $(ع_{ن}) = (٣ - ٢ن)$ ب $(ع_{ن}) = (٢)(\frac{٣}{٢})^{ن-١}$ جـ $(-١)^{ن}(ن + ١)$

(٧) إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر = $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر^{٢} = $\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع Σ قيمة كل مما يأتى:

أ $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ (ر + ٢) ب $\sum_{ر=١}^{٣٠}$ (ر^{٢} - ٣)

(٨) حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها هندسية ثم أوجد الأساس لكل منها.

أ (٢١ ، ١٤ ، ٧ ، ...) ب (-٧ ، -١٣ ، -١٧ ، ...) جـ (-٣ ، ١٢ ، -٤٨ ، ...)

د $(\frac{١}{٥}, \frac{٤}{٥}, ١, ...)$ هـ $(\frac{١}{٣}, \frac{١}{٣}, \frac{٢}{٣}, ...)$ و $(\frac{١}{٢}, \frac{٥}{٤}, \frac{٤}{٣}, ...)$

(٩) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) أوجد:

أ قيمة حدها الثامن. ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢

(١٠) ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ع_{٦}$ = ١٦ ، $ع_{١٠}$ = - ٢٦. أوجد هذه المتتابعة.



تمـارين عامة

(١١) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة.

(١٢) إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة.

(١٣) متتابعة هندسية حدها الأول = ٧، حدها الخامس = ١١٢. أوجد هذه المتتابعة.

(١٤) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين، ثم أوجد المتتابعتين.

(١٥) ($ع_{ن}$) متتابعة هندسية حيث $ع_{ن} = ٧ \times (٣)^{ن-١}$. أوجد الوسط الهندسى بين $ع_{٣}$ ، $ع_{٧}$

(١٦) إذا كانت ٤ ، ب ، جـ فى تتابع حسابى، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من ب ، جـ

(١٧) إذا كانت $\frac{١}{٢}$ أ ، ب ، جـ كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن ٤ب > أ + ٢جـ

(١٨) **الربط بالانتاج:** بئر إنتاجها من البترول فى السنة الأولى ٥٦٠ ألف برميل، وكان إنتاجها يتناقص سنويًا بمعدل ٤ ٪ عن إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد أقصى إنتاج لهذه البئر.

(١٩) **الربط بالهندسة:** مستطيل طوله ١٦ سم وعرضه ١٢ سم ، نصفت أضلاعه ثم نصفت أضلاع الشكل الحادث من توصيل منتصفات الأضلاع وهكذا بتكرار ما سبق إلى اللانهاية. أوجد مجموع محيطات الأشكال المرسومة.

(٢٠) **الربط بالصحة:** يتناول مريض نوعا من الدواء، وقد نصحه الطبيب أن يُقلّل عدد حبات هذا الدواء بمعدل ٣ حبات كل أسبوع عن الأسبوع الذى يسبقه مباشرة ، فإذا بدأ المريض بتناول ٢١ حبة من الدواء فى الأسبوع الأول، بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض تمامًا عن استخدام هذا الدواء؟

(٢١) **الربط بالأجور:** يتقاضى عامل راتبًا شهريًا قدرة ١٢٠٠ جنيه فى العام الأول ثم يزداد أجره بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من مرتب السنة السابقة لها مباشرة. اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات، ثم أوجد هذا المجموع.

(٢٢) **الربط بترشيد المياه:** تندفع المياه بمعدل ٢٥ لترا فى الدقيقة الأولى من صنبور للمياه، ثم تزداد بعد ذلك بمعدل لترين فى كل دقيقة تالية لها. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصب من الماء ٨٨٠ لترا؟

(٢٣) كرة إذا سقطت من ارتفاع معين عن سطح الأرض، فإنها ترتد إلى ثلثى الارتفاع الذى سقطت منه. فإذا أُسقطت من ارتفاع ٩٠ مترًا، فأوجد مجموع المسافات التى تقطعها حتى تسكن؟

(٢٤) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ ، حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

PDF Compressor Pro

اختبار تراكمى

١ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات:

أ $س^{٢} - ٣س - ٤ = صفر$.

ب $س + \frac{٢}{س} = ٣$.

٢ أوجد فى ع مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية:

أ $س + ٢ص = ٥ ، ٢س - ص = ٥$

ب $أ - ب = ١ ، أ + ٢ب = ١٠$

جـ $س - ص = ٢ ، س ص = ٣$

د $٣أ + ٥د = ٢١ ، ٢أ - ٧د = -١٧$

٣ حلل كلًا مما يأتى تحليلًا كاملًا:

أ $أ^{٢} - أر$

ب $س^{٣} ص + س ص^{٢} - ٢ س ص$

جـ $أ + أر + أ^{٢}$

د $١ + ر + ر^{٢} + ر^{٣}$

٤ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ $٢^{س - ١٠} = \frac{١}{٨}$

ب $(-\frac{١}{٢})^{ن + ٢} = \frac{١}{١٤}$

جـ $٢^{٥ن - ١} > ٧$

د $(\frac{١}{٢})^{ن + ٢} < ٠,٠١$

مقارنات: بين أوجه الشبه والاختلاف بين كل من:

٥ المتتابعات والمتسلسلات.

٦ الحد النونى للمتتابعة الحسابية والحد النونى للمتتابعة الهندسية.

٧ مجموع المتسلسلة الحسابية ومجموع المتسلسلة الهندسية.

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

أوجد قيمة الحد الأول (أ) فى كل من المتتابعات أو المتسلسلات الآتية:

٨ المتتابعة الحسابية التى فيها: ن = ٣ ، $ع_{٥}$ = ٣٢

٩ المتتابعة الهندسية التى فيها: $م = \frac{١}{٢}$ ، $ع_{٤} = \frac{١}{١٦}$

١٠ المتسلسلة الحسابية التى فيها: ن = ٦ ، $جـ_{١٦}$ الأولى = ١٢٨

١١ المتسلسلة الهندسية التى فيها: $م = ٢$ ، $جـ_{٨}$ الأولى = ٢٥٥

١٢ المتسلسلة الهندسية التى فيها: $م = \frac{١}{٢}$ ، $جـ_{٤٠}$ = ١٢٨

أسئلة ذات إجابات متعددة:

١٣ اكتب ثلاث متتابعات بحيث تكون إحداها حسابية والثانية هندسية والثالثة ليست حسابية أو هندسية وتبدأ كلٌّ منها كالاتى: ٢ ، ٦ ، ...

١٤ اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ١٦ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة، ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتابعات إلى مالانهاية.

١٥ اكتب المتسلسلة الهندسية ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ... بطريقتين مختلفتين باستخدام رمز المجموع.

١٦ تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع ومتى لا يكون لها مجموع؟ وضح تبريرك.

تطبيقات حياتية:

أسئلة ذات إجابات طويلة:

١٧ إذا كونت (١٥ ، ٣ك + ٢ ، ٤ ك - ٥ ، ...) متتابعة حسابية فأوجد قيمة ك.

١٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٠ ، حدها السابع يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع.

١٩ متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١، يزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد هذه المتتابعة.

٢٠ $(ع_{ن})$ متتابعة هندسية فيها $ع_{٣} = ٥$ ، $\frac{ع_{٣}}{ع_{١}}$ ، $\frac{١}{٢٥}$ أوجد هذه المتتابعة.

٢١ أ ، ٢ ب ، جـ ، ٥ ، ٥ ء كميات موجبة فى تتابع حسابى أثبت أن: $٢(ب^{٢} + جـ^{٢}) > أ جـ + ٥ ب ء$.

٢٢ متتابعة حسابية فيها $ع_{١٢} = ٣٨$ ، $ع_{٣٠} = ٢٤٥$. أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى منها.

٢٣ متتابعة حسابية فيها مجموع الحدين التاسع عشر والعشرين يساوى ١٤٤ ، مجموع الحدين العشرين والحادى والعشرين يساوى ١٥٢ أوجد:

أ الحد العشرين.

ب عدد الحدود اللازم أخذه من المتتابعة ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٦٠

٢٤ متتابعة حسابية حدودها موجبة، مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٥٠، وحاصل ضرب حديها الثانى والثالث يساوى ١٥٠. أوجد هذه المتتابعة، ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى منها.

٢٥ متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع الاثنى عشر حدًّا الأولى منها يساوى ٢٧٣ مرة. قدر مجموع الأربعة حدود الأولى منها. أوجد أساس المتتابعة، وإذا كان حدها الثامن = ٦٤٠. أوجد المتتابعة.

٢٦ إذا كان مجموع السبعة حدود الأولى من متتابعة هندسية هو ل، ومجموع السبعة حدود التالية لها هو م. فاثبت أن أساس المتتابعة = $\sqrt[٧]{\frac{م}{ل}}$

(٩) $ع_{٨} = ٢٦ ، ن = ٤٦$

(١٠) (٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ...)

(١١) (٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ...) ، $ن = ٢١$

(١٢) (٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)

(١٣) (٧ ، ± ١٤ ، ٢٨ ، ...)

(١٤) $(٥ ، ١ ، \frac{١}{٥} ، ...) ، (٥ ، -١ ، \frac{١}{٥} ، ...)$

(١٥) ± ٥٦٧

(١٦) ٧ ، ١٠

(١٧) ∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ $\frac{١}{٢}أ + جـ > ٢ب$

∴ $\frac{١}{٢}أ + جـ > ٢ب$ أى أن: $٤ب < أ + ٢جـ$

(١٨) $(٥٦٠٠٠٠ + ٥٦٠٠٠٠ (٠,٩٨) + ٥٦٠٠٠٠ (٠,٩٨)^{٢} \leftarrow \infty)$

$= \frac{٥٦٠٠٠٠}{١ - ٠,٩٨} = ٢٨٠٠٠٠٠٠$

(١٩) $جـ_{\infty} = (٥٦ + ٥٦ \times (\frac{١}{٢})^{٢} + \frac{١}{٢} ٥٦ + ... \leftarrow \infty) = \frac{٥٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ١١٢$

(٢٠) ∴ ن = ٨ ∴ الشخص يتوقف عن تناول الدواء بعد ٨ أسابيع.

(٢١) $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٠٠ (١,١)^{ر-١}$

$ع_{٥} = ١٢٠٠ (١,١)^{٤} = ١٧٥٦,٩٢$

$\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٠٠ (١,١)^{٤} = ٨٧٨٤,٦$

(٢٢) $٢٥ + ٢٧ + ٢٩ + ...$ إلى ن حدًّا = ٨٨٠

$\frac{ن}{٢} [٢ \times ٢٥ + (ن - ١) \times ٢] = ٨٨٠$

$ن^{٢} + ٢٤ ن - ٨٨٠ = ٠$ ن = ٢٠

(٢٣) ف = ٤٥٠ مترا

(٢٤) أ = ٨١ ، $ا ر ا = \frac{١}{٣}$ $|ر| = \frac{١}{٣} < ١$

جـ ∞ ابتداء من $ع_{٣} = \frac{ع_{٣}}{١ - ر} = \frac{٣ \times ٩}{٣} = \frac{٢٧}{٢}$

بعض إجابات الاختبار التراكمى

(٨) ٢٠ (٩) $\frac{١}{٢}$ (١٠) -٣٧

(١١) ١ (١٢) ٦٤ (١٧) ٣

(١٨) $(ع_{ن}) = (-٣ ، -١ ، ١ ، ....)$

(١٩) $(ع_{ن}) = (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....)$

(٢٠) $(ع_{ن}) = (١٥ ، ٥ ، \frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٩} ، ....)$

(٢١) $ب < \sqrt{٢ أ جـ}$ ، $جـ < \sqrt{٢ ب \times ٥ ء}$

$٤(ب^{٢} + جـ^{٢}) < ٢ أ جـ + ١٠ ب ء$

$٢(ب^{٢} + جـ^{٢}) < أ جـ + ٥ ب ء$

(٢٢) أ = -٦١ ، ء = ٩ ، $جـ_{١٥} = ٣٠$

(٢٣) أ ٧٤ ب ١٠

(٢٤) $(ع_{ن}) = (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ....)$ ، $جـ_{١٥} = ٦٠٠$

(٢٥) $ر = ٢$ ، $(ع_{ن}) = (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ....)$

PDF Compressor Pro



الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق

Permutations, Combinations

مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية فى الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج فى حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسى، ومن أهم تطبيقاته:

التباديل التى تستخدم فى معرفة عدد الطرق التى يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة.

التوافيق: وهى الاختيار دون مراعاة الترتيب.

ولقد كان للعلماء العظام مثل عمر الخيام وإسحق نيوتن وبسكال الدور الأكبر فى هذا المجال والذى لايزال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد الأساسى	*Fundamental Counting Principle*	شجرة بيانية	*Tree Diagram*	ترتيب	*Order*
مبدأ العد المشروط	*Conditional Principle of Counting*	مضروب	*Factorial*	لجنة	*Committee*
عملية	*Operation*	تباديل	*Permutations*	مجموعة جزئية	*Subset*
		توافيق	*Combinations*		
		عناصر	*Elements*		

التباديل - التوافيق

Permutation , Combination

مقدمة الوحدة

فى كثير من دراستنا لموضوع الاحتمالات نحتاج إلى العد وحساب عدد الطرق الممكنة لإجراء حدث ما. وفى هذه الوحدة نستعرض أهم طرق العد ومنها.

- مبدأ العد الأساسى.
- مضروب العدد.
- التباديل.
- التوافيق.

مخرجات الوحدة

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد (الاساسى-المشروط).
- يتعرف كل من التباديل والتوافيق.
- يتعرف مفهوم التوافيق.
- يستنتج العلاقة بين التبادل و التوافيق.
- يتعرف مضروب العدد.
- يستنتج مثلث باسكال.
- يستخدم الآله الحاسبة فى حساب التباديل و التوافيق لبعض العمليات الحسابية.
- يتعرف على بعض علماء الرياضيين فى المجال مثل بليز باسكال.
- يحل بعض المشكلات الرياضية باستخدام قواعد التباديل و التوافيق.
- يحل بعض المشكلات باستخدام مثلث باسكال.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد	*Principle of Counting*
عملية	*Operation*
شجرة بيانية	*Tree Diagram*
مضروب	*Factorial*
تباديل	*Permutations*
توافيق	*Combinations*
عناصر	*Elements*
ترتيب	*Order*
لجنة	*Committee*
مجموعة جزئية	*Subset*

PDF Compressor Pro



زمن تدريس الوحدة:

٦ حصص.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة

التفكير الناقد - التفكير الإبداعى فى الرياضيات - التفكير التحليلى - حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة:

- تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها ، واختبار تراكمى فى نهاية الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة

- يوضح المخطط المفاهيم الخاصة بما يسمى التباديل و التوافق، حيث نتناول مبدأ العد و الذى يشتمل مفهومان رئيسيان و هما مبدأ العد الأساسى ومبدأ العد المشروط. ثم ننتقل الى مفهوم مضروب العدد و منه الى مفهوم التباديل حيث تشتمل الوحدة على بعض التطبيقات الرئيسة على التباديل. و يرتبط بذلك مفهوم التوافيق الذي يعتمد بشكل كبير علي التباديل. و أيضا يحتوى على عدد كبير من التطبيقات الحياتيه.

PDF Compressor Pro

١ - ٢ مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

خلفية

سبق أن درس الطالب الحاصل الديكارتى لمجموعتين (س × ص)، وعرف أنه يتكون من جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من عناصر المجموعة س ومسقطها الثانى عنصر من عناصر المجموعة ص. وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب كيفية إيجاد عدد نواتج (عدد طرق) محدد لتجربة ما.

مخرجات الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مبدأ العدد الأساسى.
- يتعرف مبدأ العد المشروط.

مفردات أساسية

مبدأ العد - عملية - شجرة بيانية

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص ٥٤ إلى ص ٥٦ الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئة:

- اطلب إلى طلابك الإجابة عن ماورد فى بند فكر وناقش ص ٥٤، وتابع إجاباتهم للوصول إلى عدد الطرق لجميع الاختيارات الممكنة. كرر نفس المثال ولكن بزيادة قميص وزيادة بنطلون وتابع إجاباتهم للوصول إلى عدد الطرق، ثم اعرض سؤال عصف ذهنى هل يمكن الوصول لعدد الطرق



الوحدة الثانية

مبدأ العد

١ - ٢

Fundamental Principle of Counting

فكر و ناقش

قميص أ قميص ب

بنطلون س بنطلون ص بنطلون ع

إذا طلب منك ارتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و٣ بنطلون. فكم عدد طرق الاختيار؟

مثال

① كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

فى هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار، فمثلا يمكننا اختيار أشرف ، سمر أو أشرف ، منى أو محمد ، منى أو حسن ، سمر... الخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البيانى التالى ويسمى بمخطط الشجرة البيانية:

الطلاب	الطالبات	الأختيار
اشرف	سمر	اشرف ، سمر
	منى	أشرف ، منى
محمد	سمر	محمد ، سمر
	منى	محمد ، منى
حسن	سمر	حسن ، سمر
	منى	حسن ، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق

عدد طرق اختيار طالبة من طالبتين = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

حاول أن تحل

① فى فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

② كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

سوف تتعلم

- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسى.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى Fundamental Counting Principle
- عملية Operation
- شجرة بيانية Tree Diagram

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

٥٤ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

دون الحاجة لإيجاد جميع النواتج الممكنة.

- استعن بالشجرة البيانية فى بند فكر وناقش لمساعدة الطلاب للوصول لمفهوم مبدأ العد.

اجراءات الدرس

- **فى مثال (١)** لم يضع شروطاً محددة لعملية الأختيار و يمكن إنشاء الشجرة البيانية بحيث يكون العنصر الأول بنتاً (سمر أو مني) و العنصر الثاني ولداً (أشرف أو محمد أو حسن) و يكون عدد طرق الأختيار واحداً في الحالتين.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

- تابع مع طلابك ما ورد فى بند فكر وناقش ودعهم يتوصلوا إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

① عدد الطرق الممكنة = ٢ × ٣ = ٦

في بند تعلم: وضح إلى الطلاب أن استخدامنا حرف العطف (و) للربط بين عدد طرق العمل م١، م٢، م٣،.....مn لذلك يكون عدد الطرق الممكنة لهذه الأعمال هو حاصل ضربها.

PDF Compressor Pro

٢ - ١ مبدأ العد

- وضح لطلابك مفهوم مبدأ العد المشروط من خلال حل مثال صـ(٥٥)
- ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل(٥٥)،(٥٦) و توصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

(٢) عدد الطرق = ٦ × ٤ × ٣ = ٧٢

(٣) يفضل فى هذا التمرين عمل جدول لتوضيح منازل الأرقام كالآتى:

آحاد	عشرات	مئات	آلاف
١	٢	٢	٣

- ويمكنك توضيح الأعداد على النحو الآتى:

٧٤٢٣	٣٤٢٧	٧٣٤٢	٧٢٤٣
٤٧٢٣	٧٣٢٤	٣٧٤٢	٢٣٤٧
٤٣٢٧	٣٧٢٤	٢٧٤٣	٣٢٤٧

- عدد الأعداد الناتجة = ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢

إجابات تمارين (٢-١) ص٦٠:

(١) د (٢) جـ (٣) د

(٤) $٣^{٣} = ٢٧$ (٥) ٦

(٦)

الأرقام			الحروف		
٧	٨	٩	٢٦	٢٧	٢٨

عدد اللوحات = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٩ × ٨ × ٧

= ٩٩٠٦٦٢٤

(٧)

آحاد	عشرات	مئات
٢	٣	٣

اشر إلى الطلاب بأن رقم المئات يأخذ الأرقام الآتية فقط ٢ أو ٥ أو ٨ أى ثلاث طرق:

عدد الأعداد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨

(٨) عدد الأرقام = $(١٠)^{٨}$ = ١٠٠٠٠٠٠٠٠

لاحظ عمليات تكرار الرقم الواحد لأكثر من مرة فى العدد الممثل لرقم المحمول.

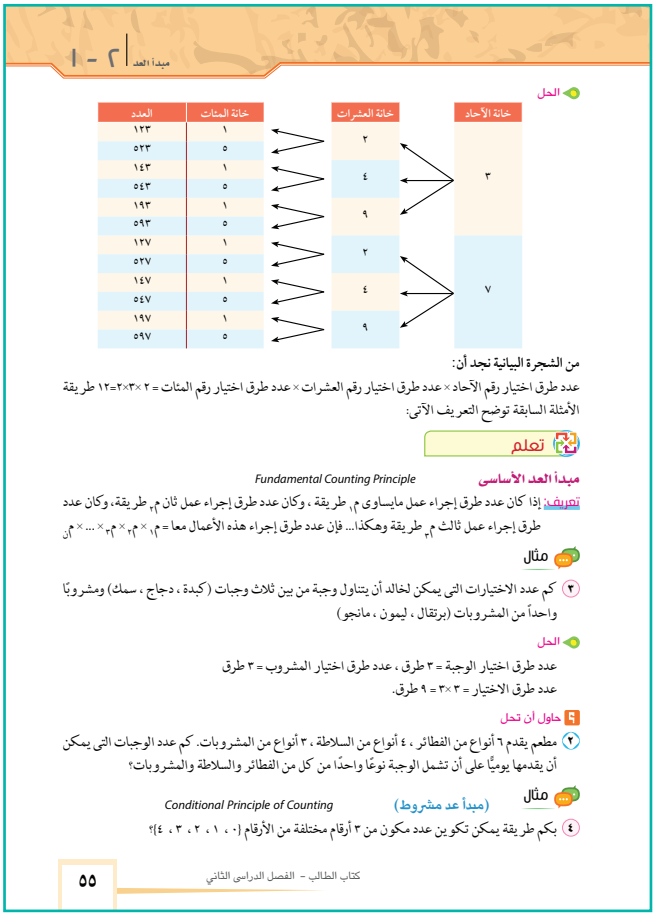
فى مثال (٢):

- يمكن إيجاد عدد الأعداد الممكنة في هذا المثال و ذلك بإنشاء جدولاً نوضح فيه خانات (منازل) العدد كالآتي:

آحاد	عشرات	مئات
٢	٣	٢

- لذلك فإن عدد الطرق الممكنه لاختيار العدد

= ٢ × ٣ × ٢ = ١٢.



مبدأ العد ٢ - ١

الحل

العدد	خانة المئات	خانة العشرات	خانة الآحاد
١٢٣	١	٢	٣
٥٢٣	٥		
١٤٣	١	٤	
٥٤٣	٥		
١٩٣	١	٩	
٥٩٣	٥		
١٢٧	١	٢	٧
٥٢٧	٥		
١٤٧	١	٤	
٥٤٧	٥		
١٩٧	١	٩	
٥٩٧	٥		

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد × عدد طرق اختيار رقم العشرات × عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة

الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتى:

تعلم

مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل مايساوى $م_{١}$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_{٢}$ طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_{٣}$ طريقة وهكذا... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا = $م_{١} \times م_{٢} \times م_{٣} \times ... \times م_{ن}$

مثال

(٢) كم عدد الاختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحداً من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو)

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق ، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق

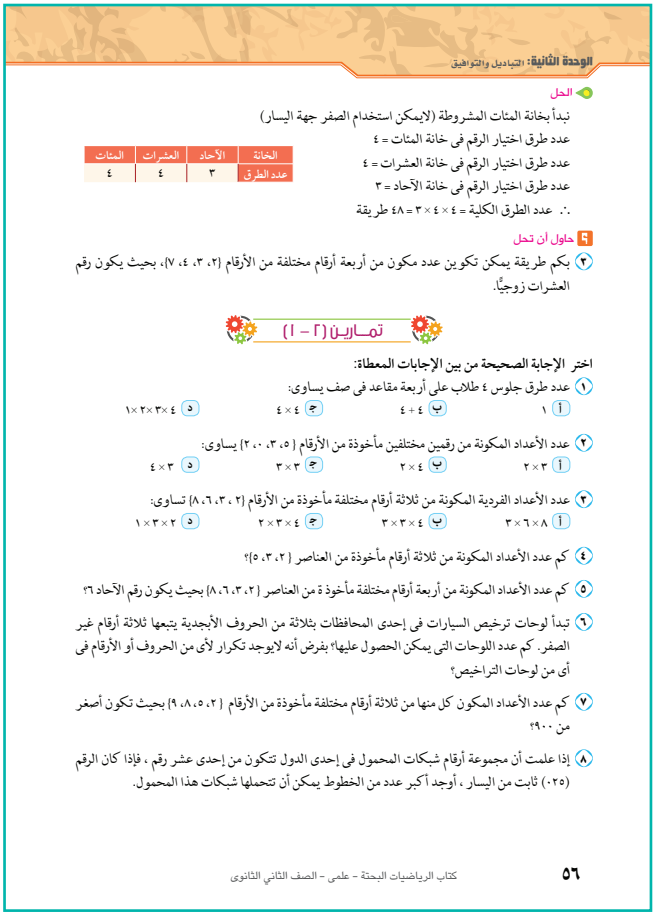
عدد طرق الاختيار = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

حاول أن تحل

(٢) مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطة ، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلاطة والمشروبات؟

مثال (مبدأ عد مشروط) *Conditional Principle of Counting*

(٤) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}؟



الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لايمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

حاول أن تحل

(٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا.

تمـارين (٢ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى:

أ) ١ ب) ٤ + ٤ ج) ٤ × ٤ د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٥، ٣، ٠، ٢} يساوى:

أ) ٣ × ٢ ب) ٤ × ٢ ج) ٣ × ٣ د) ٤ × ٣

(٣) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢، ٣، ٦، ٨} تساوى:

أ) ٨ × ٦ × ٣ ب) ٤ × ٣ × ٣ ج) ٤ × ٣ × ٢ د) ٢ × ٣ × ١

(٤) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٥}؟

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

(٦) تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لايوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص؟

(٧) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

(٨) إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار ، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

PDF Compressor Pro

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations


الوحدة الثانية

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations

سوف تتعلم
- مضروب العدد
- التباديل

فكر و ناقش

استعن بما درسته فى الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) كم عدد طرق جلوس أربعة طلاب على ثلاثة مقاعد فى صف؟

٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم

تعريف ١ المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة ⌊ن ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

⌊ن = ن (ن - ١) (ن - ٢)... ٣ × ٢ × ١

المصطلحات الأساسية
- مضروب العدد Factorial of a Number
- التباديل Permutatuins
- التباديل الجزئية Sub-Permutatuins

لاحظ أن:

عندما ن = ٠ فإن ⌊ن = ١ عندما ن = ١ فإن ⌊١ = ١

⌊٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤ ⌊٣ ،

⌊٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ ⌊٥

وبوجه عام فإن: ⌊ن = ن ⌊ن - ١ حيث ن ∈ ص+

مثال

١) أ) أوجد ⌊١٠ / ⌊٨ ب) إذا كان ⌊ن = ١٢٠ فما قيمة ن

الحل

أ) ⌊١٠ / ⌊٨ = ٩ × ١٠ × ⌊٨ / ⌊٨ = ٩٠

ب) ⌊ن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ ⌊ن = ⌊٥ لذلك فإن ن = ٥

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

حاول أن تحل

١) أوجد: أ) ⌊١٥ / ⌊١٢ ب) ⌊٧ / ⌊٥ + ⌊٩ / ⌊٧

مثال

٢) أوجد مجموعة حل المعادلة: ⌊ن / ⌊ن-٢ = ٣٠

خلفية

سبق للطالب دراسة مبدأ العد، كما استخدم مخطط الشجرة البيانية لإيجاد عدد طرق جميع الاختيارات الممكنة لعمل ما، كما تعرف على مبدأ العد المشروط وأوجد عدد عناصره، وفى هذا الدرس واستكمالا لما سبق سوف يدرس الطالب مفهوم مضروب العدد كى يستخدمه فى دراسة التباديل فى هذا الدرس والتوافيق فى الدرس اللاحق له مباشرة.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم مضروب العدد.
- يتعرف مفهوم التباديل.
- يحل تطبيقات حياتية على التباديل.

مفردات أساسية

- مضروب العدد – تباديل.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص (٥٧) إلى ص (٦٠) الشبكة الدولية للمعلومات

التهيئه

فى بند فكر وناقش

- يمكنك عمل الجداول التالية لتوضيح البنود الآتية:

جلوس أربعة طلاب علي ثلاثة مقاعد فى صف

المقعد(١)	المقعد (٢)	المقعد (٣)
٤	٣	٢

- حيث أن فى المقعد الأول يستطيع الطلاب الجلوس فيه بعدد (٤) طرق.
- بعد جلوس احد الطلاب فى المقعد الأول يتبقى ٣ طلاب يستطيع أحدهم أن يجلس على المقعد الثانى.
- بعد انشغال المقعدين الأول والثانى يتبقى طالبان لشغل المقعد الثالث.

عدد الطلاب = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

اجراءات الدرس

- يمكن تمثيل وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام السباحة كالآتى:

الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس
٥	٤	٣	٢	١

عدد الطرق = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

- اكد على مدى اتقان طلابك لمفهوم المضروب من خلال أمثلة بسيطة يمكن إعطائها للطلاب

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

أ) $\frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ١٢} = \frac{١٢ \rfloor ١٣ \times ١٤ \times ١٥}{\lfloor ١٢} = ٢٧٣٠$

ب) $\frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥} + \frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٧} = \frac{٥ \rfloor ٦ \times ٧}{\lfloor ٥} + \frac{٧ \rfloor ٨ \times ٩}{\lfloor ٧}$

= ٧ × ٦ + ٨ × ٩ = ١١٤

PDF Compressor Pro

- يمكنك اعطاء المثال الآتى لتوضيح مفهوم التباديل لدى الطلاب.

مثال: من بين أربعة طلاب يراد اختيار طالب للجنة الرياضية وطالب أخر للجنة الثقافية - كم عدد طرق الأختيار؟

الحل:

نفرض أن الطلاب هم أ ، ب ، جـ ، د وطبقًا لمبدأ العد يكون:

عدد طرق أختيار طالب للجنة الرياضية = ٤ طرق

عدد طرق اختيار طالب للجنة الثقافية = ٣ طرق

عدد طرق الاختيار = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

كما يمكنك توضيح هذا المفهوم بالسرد كالآتى:

(أ، ب) ، (أ، جـ) ، (أ، د) ، (ب ، أ)، (ب، جـ)، (ب ، د) ،

(جـ، أ)، (جـ، ب) ، (جـ ، د) ، (د ، أ) ، (د ، ب) ، (د ، جـ)

- **اكد على الطلاب بأن:** (أ، ب)≠ (ب، أ) لأن عند اختيار أ للجنة الرياضية ، ب للجنة الثقافية يختلف عن اختيار ب للجنة الرياضية ، أ للجنة الثقافية.

عدد التباديل = ٤ × ٣ = ١٢ تبديله

يرمز اليها بالرمز $ل^{٤}_{٢}$

- درب طلابك علي كيفية استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد قيمة مضروب العدد وقيمة التبديلة.

الأخطاء الشائعة:

اكد الى الطلاب على الآتي:

- مبدأ العد يسمح بتكرار العناصر (حسب شروط المسألة)
- التباديل لاتسمح بتكرار عناصرها.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

(٢) $\frac{١}{ن!} + \frac{٢}{(ن+١)!} = \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)!}$

وبالتبسيط

(ن +٢) (ن+١) + ٢ (ن +٢) = ٥٦

$ن^{٢}$ + ٥ ن - ٥٠ = ٠ أى ن = ٥

(٣) أ ١٤٠ ب ١

(٤) $ل^{٢٨}_{٥}$ = ١١٧٩٣٦٠٠

(٥) عدد الطرق = $\frac{٩!}{٩}$ = $\frac{٨!}{٩}$ = ٤٠٣٢٠

في بند تفكير ناقد:

- أ = ٠ ، أ = ١
- عدد التباديل المختلفة $ن!$ من العناصر مرتبة على شكل دائرة دون نقطة مرجع ثابتة تساوى: $\frac{ن!}{ن}$ = $(ن-١)!$



الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

الحل

$\frac{ل^{ن}_{٢}}{ل^{ن}_{٢}} = \frac{ن(ن-١)}{ن(ن-١)(ن-٢)}$ ∴ ٣٠ = $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ ∴ ٥ × ٦ = ن (ن-١) ∴ ن = ٦

حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\frac{١}{ل^{ن}_{٢}} + \frac{٢}{ل^{ن+١}_{٢}} = \frac{٥٦}{ل^{ن+٢}_{٢}}$ فأوجد قيمة ن

تفكير ناقد: إذا كان: $ل^{ل}_{ل}$ = $ل^{ن}_{ن}$ فما قيمة أ؟

التباديل *Permutations*

مثال تمهيدى: من مجموعة الأرقام (٢، ٣، ٥) كم عدد الأعداد التى يمكن تكونها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟

الأعداد هى: ٢٣٥ ، ٣٥٢ ، ٥٢٣ ، ٢٥٣ ، ٣٢٥ ، ٥٣٢ يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام

وعددها = ٣ × ٢ × ١ وتكتب $ل^{٣}_{٣}$ وتقرأ (٣ لام ٣).

والجدول التالى يوضح ذلك:

الأحاد	العشرات	المئات
١	٢	٣

لذلك فإن التبديلة لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

تعريف يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $ل^{ن}_{ر}$ حيث:

$ل^{ن}_{ر}$ = ن(ن-١) (ن-٢) ... (ن-ر+١) حيث ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ صـ$^{+}$

$ل^{ن}_{ن}$ = ١

فمثلا:

$ل^{٦}_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = $\frac{٦!}{٢!}$ = $\frac{١ \times ٢ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣}$ = $\frac{٦!}{(٦-٤)!}$

$ل^{٧}_{٣}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\frac{٧!}{(٧-٥)!}$

نستنتج مما سبق أن:

$ل^{ن}_{ر}$ = $\frac{ن!}{(ن-ر)!}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ صـ$^{+}$ ، ر ≤ ن

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح (Shift) (×) لحساب قيمة $ل^{٥}_{٣}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح

(5) (Shift) (×) (2) (=)

الجواب = ٦٠

مثال

(٢) أوجد قيمة كل من:

أ $ل^{٧}_{٤}$ ب $ل^{٤}_{٤}$ جـ $ل^{٤}_{٠}$

الحل

أ $ل^{٧}_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ ب $ل^{٤}_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

جـ $ل^{٤}_{٠}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ ماذا تلاحظ من العبارتين ب ، جـ؟



حاول أن تحل

(٢) احسب قيمة كل من: أ $ل^{٥}_{٣} + ل^{٦}_{٣}$ ب $\frac{ل^{٥}_{٥}}{ل^{٥}_{٤}}$

مثال

(٤) أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق = $ل^{٧}_{٥}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٢٥٢٠

استخدام الآلة الحاسبة: (=) (5) (npr) (×) (SHIFT) (7)

حاول أن تحل

(٤) كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال (الترتيب فى دائرة)

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٤ أشخاص فى أربعة مقاعد على شكل دائرة ؟

الحل

فى هذه الحالة يجلس الشخص الأول بطريقة واحدة ، أما الشخص الثانى فيجلس بطرق عددها ٣ الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٢ والأخير يجلس بطريقة وحيدة

عدد طرق ترتيبهم = ٣ × ٢ × ١ = $ل^{٣}_{٣}$ = ٦

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج عدد طرق ترتيب ن من الاشخاص فى دائرة؟

حاول أن تحل

(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب ٩ أشخاص فى تسعة مقاعد على شكل دائرة؟

مثال

(٦) إذا كان $ل^{٧}_{ر}$ = ٨٤٠ فأوجد قيمة $ل^{ر}_{٤}$

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمه ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥ وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

∴ العدد ٨٤٠ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = $ل^{٧}_{٤}$

∴ $ل^{٧}_{ر}$ = $ل^{٧}_{٤}$ ∴ ر = ٤ ∴ $ل^{ر}_{ر}$ = $ل^{ر}_{٠}$ = ١

حاول أن تحل

(٦) إذا كان $ل^{٩}_{ر+١}$ = ٥٠٤ فأوجد قيمة $ل^{ر+١}_{٢}$

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⑤ $ل_{ر-١}^{٩} = ل_{٣}^{٩}$ لتكون: ر - ١ = ٣ ، ر = ٤

$\frac{|٤}{|١ \times |٣} = \frac{|٤}{|٥} = ١٢٠$

تفكير ناقد:

الهدف منه هو الربط بين $ل_{٣}^{٧}$ ، $|٧$

حيث $ل_{٣}^{٧} = \frac{|٧}{|٤ \times |٣} = ٥٠٤٠$

وبوجه عام: لعدد ن من الأشياء المراد ترتيبها دون تكرار

يكون: $ل_{ن}^{ن} = |ن$

إجابات تمارين (٢-٢) ص٦٠،٦١:

① د	② ب	③ أ	④ د
⑤ جـ	⑥ جـ	⑦ ب	⑧ ٦
⑨ ١٦	⑩ $ل_{٣}^{٤} = ١٢$		

⑪

آحاد	عشرات
٢	٣

عدد الأعداد الزوجية = ٦

⑫ عدد الطرق = ٣ × ٤ = ١٢

⑬ عدد طرق الاختيار = ١٥

⑭ أ $ل_{١}^{٦} = ٦$ ب $ل_{٣}^{٦} = ٣٠$

⑮ أ ٤٢ ب صفر جـ ١٢٠ د ١٢

هـ ٦٤ و ٥٠٤١

⑯ أ ٤ ب ٦ جـ ن = ٣ د ٧

⑰ أ $ل_{ن}^{٧} = ل_{٣}^{٧}$ ، ن = ٣ ب $\frac{|ن}{|٢} = ٢٤$ ، ن = ٢

⑱ ن = ٧ أو ن = ٨

⑲ $ل_{٣}^{١٠} = ٧٢٠$ ⑳ $ل_{٣}^{٨} = ٣٣٦$

㉑ الأيمن = (ن + ٢) (ن + ١) = $ل_{٣}^{ن+٢}$

في بند نشاط:

- يؤكد هذا النشاط على ترسيخ مفهوم مبدأ العد ، التباديل لدى الطالب.

إجابة اسئلة النشاط:

أ $ل_{٣}^{٥} = ٢٠$ ب ٥ × ٥ = ٢٥

جـ $ل_{٣}^{٥} = ٦٠$

د عدد الأعداد = ٢ × $ل_{٣}^{٤}$ = ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤

- يمكنك عمل سلم لتقييم النشاط كما سبق و ذلك لتحديد مستوى أداء الطلاب

تفكير ناقد: ١) أوجد قيمة كلاً من: $ل_{٣}^{٧}$ ، $|٧$ ماذا تلاحظ؟

تمـاريـن (٢ - ٢)

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات:

① لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة
أ ٢ ب ٢٣ جـ ٦٦ د ١٣٢

② إذا كان $ل_{ر}^{٥} = ٦٠$ فإن ر تساوى
أ ٤ ب ٣ جـ ٢ د ٥

③ إذا كانت $ل_{٣}^{٧} = ١٢٠$ فإن قيمة ب:
أ ٦ ب ٥ جـ ٤ د ٣

④ عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى
أ ٤ ب ٩ جـ ١٠ د ٢٤

⑤ عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى
أ ٤٨ ب ٣٠ جـ ١٢ د ٤

⑥ عدد طرق ترتيب ٧ أطفال في دائرة يساوى
أ ١ ب ٧ جـ ٧٢٠ د ٥٠٤٠

⑦ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل | | | | | | | | جـ | ٩ |
جـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣، ٤، ٥، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة؟
أ ٤٩٩٩٩٩ ب ٤٠٠٠٠٠٠ جـ ٤٩٩٩٩٩٩ د ١٠٠٠٠٠٠٠

⑧ بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية)

⑨ كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

⑩ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

⑪ كم عددًا زوجيًا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

⑫ بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و ٤ سيدات؟



⑬ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات (صغير ، متوسط ، كبير) (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة)
كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

⑭ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و} أوجد
أ عدد طرق اختيار حرف واحد
ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

⑮ أوجد قيمة كلٍّ من:
أ $\frac{|٧}{|٥}$ ÷ $\frac{|٥}{|٢}$ ب $|٣ \times |٢$ جـ $ل_{٣}^{٥} \times |٢$
د $ل_{٣}^{٢} \times ل_{٣}^{٢}$ هـ $ل_{٣}^{٨} + ل_{٣}^{٨}$ و $ل_{٣}^{٧} + ل_{٣}^{٧}$

⑯ أوجد قيمة ن التى تحقق كل من:
أ $|ن = ٢٤$ ب $\frac{|ن+١}{|ن-١} = ٤٢$
جـ $ل_{٣}^{١٥} = ٢٧٣٠$ د $ل_{٣}^{ن} + ل_{٣}^{ن} = ٥٠$

⑰ أوجد قيمة ن إذا كان:
أ $ل_{ن}^{٧} = ٢١٠$ ب $ل_{ن-١}^{٢} = ١٢$

⑱ إذا كان $ل_{٤}^{ن} = ١٤ \times ل_{ن-٢}^{٣}$ فأوجد قيمة ن.

⑲ أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

⑳ من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للاشتراك فى فرق كرة القدم، وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

㉑ أثبت أن: $\frac{|ن+٢}{|ن} = ن^{٢} + ن$ $ل_{٣}^{ن+٢}$

نشاط

١- إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
أ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
ب كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
جـ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
د كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟
هـ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

PDF Compressor Pro

٢ - ٣ التوافيق
Combinations


الوحدة الثانية

٢ - ٣ التوافيق

Combinations

سوف تتعلم
- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية
- توافيق Combinations
- عناصر Elements
- ترتيب Order
- لجنة Committee
- مجموعة جزئية Subset

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية - حاسب آلى

أضف إلى معلوماتك
يمكن أن نكتب التوافيق على الصورة $^{ن}ق_{ر} = \left(\begin{matrix} ن \\ ر \end{matrix}\right)$

تمهيد

يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب جـ ، د} فى إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هى:
(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، د) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ) ، (ب ، د) ، (جـ ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، د) ، (د ، أ) ، (د ، ب) ، (د ، جـ).
نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار (أ ، ب) يختلف عن الاختيار (ب ، أ) وهكذا...
فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هى:
(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، د) ، (ب ، جـ) ، (ب ، د) ، (جـ ، د).
ويسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقة"

التوافيق Combinations

تعاريف: عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $^{ن}ق_{ر}$ حيث ، ر ∈ ص ، ن ∈ ص$^{+}$

فى التمهيد السابق نجد أن:
يرمز لعدد توافيق ٤ عناصر مأخوذة منها ٢ فى كل مرة بالرمز $^{٤}ق_{٢}$ وتقرأ (٤ قاف ٢) أو بالرمز $(^{٤}_{٢})$ وتقرأ (٤ فوق ٢)
ونلاحظ فى هذا التمهيد أن عدد طرق الاختيار = ٦ طرق

أى أن: $^{٤}ق_{٢} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} = ٦$ أى $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$

مثال

١ أوجد ناتج كل من
أ $^{٧}ق_{٥}$ ب $^{٧}ق_{٢}$ (ماذا تلاحظ)

الحل
أ $^{٧}ق_{٥} = \frac{^{٧}ل_{٥}}{\lfloor ٥} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢١$
ب $^{٧}ق_{٢} = \frac{٦ \times ٧}{١ \times ٢} = ٢١$

٦٢ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

خلفية

سبق أن درس الطالب التباديل وعرف أنها اختيار مع ترتيب، وفى هذا الدرس سوف يدرس إيجاد عدد طرق الاختيار دون مراعاة الترتيب.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يتعرف مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- يتعرف مثلث باسكال (كنشاط).

مفردات اساسية:

توافيق - عناصر - ترتيب - لجنة - مجموعة جزئية.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص ٦٢ إلى ص ٦٦ - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئه:

وضح لطلابك الفرق بين مفهوم المجموعة ومفهوم الزوج المرتب.

أكد إلى الطلاب من خلال التمهيد بأن:
(أ، ب) ≠ (ب ، أ) وبالتالى الأزواج المرتبة تخضع لمفهوم التباديل ، وأن { أ ، ب} = { ب ، أ} فأى منها يمثل عنصرًا واحدًا فى مفهوم التوافيق.

- اكد على العلاقة بين التباديل والتوافيق حيث $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$
- اطلب إلى طلابك الإجابة عن السؤال فى بند فكر وناقش ص ٦٢.

إجراءات الدرس

- **ابدأ بمثال:** أوجد عدد التبديلات المكونة من ٣ عناصر من { أ ، ب، ج ، د} والجواب يكون $^{٤}ل_{٣}$ ثم اسرد هذه التبديلات (أ ، ب، جـ)، (أ، جـ ، ب)،...
- إذا كان الترتيب غير مهم فإن كل التبديلات المكونة من نفس عدد العناصر يكون عددها $\lfloor ٣$ ، لذلك نقسم عدد جميع التبديلات على $\lfloor ٣$ فنحصل على عدد الاختيارات المختلفة التى لاتعتمد على ترتيب العناصر، ويسمى هذا بالتوافيق.

عصف ذهنى:
- ما الفرق بين $^{٥}ل_{٢}$ ، $^{٥}ق_{٢}$ وما العلاقة بينهما ؟
- $^{٥}ل_{٢}$ تمثل عدد الترتيبات المكونة من عنصرين مأخوذين من ٥ عناصر (مع مراعاة الترتيب).
- $^{٥}ق_{٢}$ تمثل عدد الاختيارات المكونة من عنصرين مأخوذين من ٥ عناصر (دون مراعاة الترتيب)
وتكون العلاقة بينهما $^{٥}ق_{٢} = \frac{^{٥}ل_{٢}}{\lfloor ٢}$ (حيث عدد الترتيبات المكونة من عنصرين يساوى $\lfloor ٢$)

PDF Compressor Pro

استخدام التكنولوجيا:

لاحظ أنه يوجد العديد من انواع الآلات الحاسبة لدى الطلاب والنشاط المقابل يعرض أحد أنواع هذه الآلات الأكثر انتشارًا، ولكن توجد بعض الآلات يختلف فيها ترتيب المفاتيح المستخدمة، لذلك يراعى عند التدريس مراعاة ذلك.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

① $\frac{{}^{١٢}ق_{٩}}{{}^{١٧}ق_{١٤}} = \frac{\boxed{١٢}\ \boxed{٩}}{\boxed{٣}} \div \frac{\boxed{١٧}\ \boxed{١٤}}{\boxed{٣}} = \frac{١١}{٣٤}$

② إما ٢ر - ٥ = ر ومنها ر = ٥

أو: ر + ٢ ر - ٥ = ٢٨ ومنها ر = ١١

③ عدد المباريات = ${}^{٧}ق_{٢}$ = ٢١

④ عدد طرق الانتخاب = ${}^{١٠}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٣}$ = ٣٣٦٠

فى بند تفكير ناقد ص (٦٤)

مثال (٤) وبند حاول أن حل (٤) تعتمد فى تشكيل اللجان على استخدام حرف العطف (و) لذلك نضرب ناتج الاختيارين ، بينما فى بند تفكير ناقد يعتمد فى الربط علي استخدام حرف العطف (أو) لذلك نجمع ناتج الاختيارين.

الإجابة:

عدد الطرق = ${}^{٦}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣}$ = ١٥ + ١٠ = ٢٥

فى بند نشاط:

يهدف هذا النشاط إلى ربط مثلث بسكال بإيجاد عدد نواتج التوافيق.

اجابة اسئلة النشاط:

① يبدأ المثلث بالعدد (١) قمة المثلث وهو يشكل السطر الصفرى أما السطر الأول فيكرر العدد (١) مرتين والسطر الثانى يتكون من ثلاث عناصر والسطر الثالث من أربع وهكذا....

② كل عدد فى أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.

③ يخضع المثلث لتماثل الأعداد المكتوبة علي ساقى المثلث.

إجابة تطبيق علي النشاط:

السطر الخامس: $(١ + ١)^{٥}$ = ٥٢



نلاحظ أن: ${}^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ (لاحظ أن: ٥ + ٢ = ٧)

نتائج هامة: ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\text{ل}^{ن}}{\text{ل}^{ر} \times \text{ل}^{ن-ر}}$ ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

حاول أن تحل

① أوجد قيمة ${}^{١٢}ق_{٩}$: ${}^{١٧}ق_{١٤}$ بدون استخدام الحاسبة.

نشاط استخدام الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح ÷ SHIFT من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $({}^{n}C_{r})$

١) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة ${}^{٥}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٣}$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع 5 SHIFT ÷ 4 + 7 SHIFT ÷ 2 = ⟵ ابدأ

الناتج = ٢٦

مثال

② إذا كان: ${}^{٣٨}ق_{ر} = {}^{٣٨}ق_{٢ر-٤٧}$

الحل

∵ ${}^{٣٨}ق_{ر} = {}^{٣٨}ق_{٢ر-٤٧}$

اما: ر = ٢ ر - ٤٧ أى أن: ر = ٤٧

وهى اكبر من قيمة ن ، لذلك هى ترفض

أو: ر + ٢ ر - ٤٧ = ٢٨ ∴ ٣ ر = ٧٥ ∴ ر = ٢٥

حاول أن تحل

② إذا كانت ${}^{٣٨}ق_{ر} = {}^{٣٨}ق_{٣ر-٥}$ فأوجد قيمة ر.

مثال

③ بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث أن الاختيار لايعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقا.

عدد الاختيارات = ${}^{٩}ق_{٤} = \frac{\text{ل}^{٩}}{\text{ل}^{٤} \times \text{ل}^{٥}}$ = ١٢٦

حاول أن تحل

③ اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال مبدأ عد

④ بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات؟

الحل

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال = ${}^{٧}ق_{٢}$ = ٢١

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات = ${}^{٥}ق_{١}$ = ٥

وطبقا لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = ٥×٢١ = ١٠٥ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦رجال و٥ سيدات؟

حاول أن تحل

④ فصل دراسى به ١٠ طلاب، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

نشاط مثلث باسكال



بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢):

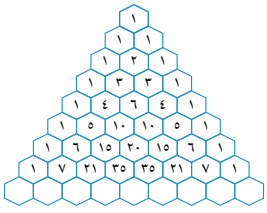
هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى قدم نظرية الاحتمالات، وصمم تنظيمًا ثلاثيًّا من الأرقام سمى مثلث بسكال فى حساب الاحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

تأمل مثلث الأعداد المقابل ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث؟

٢- هل توجد علاقة بين عدد عناصر كل صف والصف الذى يليه مباشرة؟

٣- هل يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبي ضلعى المثلث؟



بعد أجراء النشاط يمكن ملاحظة مايلى:

- الصف الأول: يمثل (ن =١) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١

وبالتالى فإن: ${}^{١}ق_{١} = {}^{١}ق_{٠} = ١$

- الصف الثانى: يمثل (ن =٢) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١ أو ر = ٢ فى كل مرة.

فيكون: ${}^{٢}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{٢}ق_{١} = ٢$ ، ${}^{٢}ق_{٢} = ١$ وهكذا

PDF Compressor Pro

كما نلاحظ أن:

- كل صف يبدأ بالواحد لأن $^{ن}ق_{ن} = ١$ ، وينتهي بالواحد لأن $^{ن}ق_{ن} = ١$
- كل عدد في أي صف باستثناء الصف الأول يساوي مجموع العددين الموجودين أعلاه في الصف الذي يعلوه مباشرة.
- ففي الصف الثالث نجد: ١ ، ١+٢ ، ٢+١ ، ١
- وفي الصف الرابع نجد: ١ ، ١+٣ ، ٣+٣ ، ٣+١ ، ١ وهكذا.
- يوجد تماثل حول العدد الذي يتوسط الصف (إذا كانت $ن$ زوجية)
- وتماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت $ن$ فردية)
- وهذا مايطابق العلاقة السابقة $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥}$

تمـارين (٢ - ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوي.....

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٣٥

٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط في امتحان يحتوي على ٦ أسئلة يساوي.....

أ) ٣٠ ب) ١٥ ج) ٢٤ د) ١٠

٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء يساوي.....

أ) ١٥ ب) ٨ ج) ٦٠ د) ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

٤) احسب قيمة $^{٦}ق_{٣}$ ، $^{٩}ق_{٥}$ ، $^{١٢}ق_{١١}$ ، $^{١٠٠}ق_{٠}$

٥) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{ن-٣}$

٦) إذا كان $^{ن+١}ق_{٤} = \frac{٥}{٦}\ ^{ن}ق_{٣}$ فأوجد قيمة $ن$.

٧) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣٠}\ ^{ن}ق_{٤}$ فأوجد قيمة $ن$.

٨) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟

٩) يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

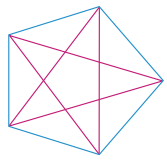
١٠) اكتب بدلالة التباديل كل من:

أ) $^{٨}ق_{٣}$ ب) $^{١٩}ق_{٣}$ ج) $^{٥}ق_{٠}$ د) $^{س}ق_{س-ص}$

١١) اكتب مستخدمًا الصورة $^{ن}ق_{ر}$ كل مما يأتي:

أ) $\frac{^{٨}ل_{٣}}{٢}$ ب) $\frac{^{٩}ل_{٣}}{٣}$ ج) $\frac{^{١٠}ل_{٤}}{٤}$ د) $\frac{^{٨}ل_{٠}}{٠}$

نشاط



سبق أن درست أن قطر الشكل الهندسي هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليتين وعلمت أن:

عدد أقطار المثلث = صفر

عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥

فهل يمكنك إيجاد عدد أقطار الأشكال الآتية:

١) الشكل السداسي ، الشكل الثماني ، شكل هندسي ذو عشرة أضلاع.

٢) هل يمكنك استخدام التوافيق لكتابة قاعدة توجد من خلالها عدد أقطار أي شكل هندسي ؟ ابحث ذلك مع معلمك ومن خلال الشبكة الدولية للمعلومات.

ملخص الوحدة

مبدأ العد الأساسي: إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوي ن طريقة ، وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوي م طريقة فإن عدد طرق اجراء العمل الأول والعمل الثاني معًا = م × ن طريقة.

التباديل: إذا كانت $س$ مجموعة عدد عناصرها $ن$ فإن كل ترتيب لبعض أو كل عناصر هذه المجموعة يسمى تبديلًا.

التباديل الجزئية: لتكن $س$ مجموعة عدد عناصرها ن، فإن كل ترتيب عدد عناصره $ر$ يمكن تكوينه من المجموعة $س$ يسمى تبديلاً ، حيث $٠ \leq ر \leq ن$ ، ويرمز لعدد التبديلات الجزئية المكونة من $ر$ عنصر المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها $ن$ بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ (وتقرأ ن لام ر)

$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)...(ن-ر+١)$ حيث $٠ \leq ر \leq ن$

نظرية: عدد التبديلات الممكنة من مجموعة عدد عناصرها $ن$ يساوي $ن(ن-١)(ن-٢)... \times ٣ \times ٢ \times ١$ ويرمز لحاصل الضرب السابق بالرمز $ن!$ (ويقرأ مضروب ن)

التوافيق: إذا كانت $س$ مجموعة عدد عناصرها $ن$ ، فإن كل اختيار عدد عناصره $ر$ حيث $(٠ \leq ر \leq ن)$ يمكن أخذه من عناصر المجموعة $س$ دون مراعاة للترتيب يسمى توفيقًا.

ويرمز لعدد التوفيقات المكونة من $ر$ عنصر المأخوذة من $ن$ عنصر بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ (ويقرأ ن قاف ر)

اجابة تمارين (٣-٢) ص٦٥،٦٦:

١) ب ٢) ب ٣) أ

٤) ٢٠ ، ٩ ، ١٢ ، ١

٥) ١٠ ٦) ٩ ٧) ١٥

٨) $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣} = ١٦$

٩) $^{١٠}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٣} = ٣٣٦٠$

١٠) أ) ٥٦ ب) ١٧١ ج) ١ د) $\frac{س ل ص}{ص}$

١٢) أ) ٢٨ ب) ٨٤ ج) ٢١٠ د) ١

فى بند نشاط ص (٦٦)

يهدف هذا النشاط إلى ربط المفهوم الهندسي الخاص بعدد أقطار الشكل الهندسي بعدد أضلاع هذا الشكل.

إجابة اسئلة النشاط: آليات تنفيذ النشاط

- اعرض مع طلابك النشاط.
- تأمل مع طلابك الأعداد المدونه على المثلث.
- ناقش مع طلابك الأسئلة الخاصة بالنشاط.
- توصل الى الإجابات صـ٦٤

١) ٩ ، ٢٠ ، ٣٥

٢) بفرض أن عدد أضلاع الشكل يساوي (ن) ضلعًا ، فتكون عدد جميع القطع المستقيمة الممثلة في الشكل هي $^{ن}ق_{٢}$ (حسب التعريف)

وباستثناء عدد أضلاع الشكل من عدد هذه القطع المستقيمة نجد أن عدد أقطار الشكل الهندسي = $^{ن}ق_{٢} - ن$

سلم تقييم النشاط:

التقدير	اداء الطالب
ممتاز	يجيب علي جميع اسئلة النشاط
جيد جدا	يجيب علي معظم اسئلة النشاط ويحتاج إلى مساعدة طفيفة
جيد	يجيب علي معظم اسئلة النشاط ويخطأ في بعضها ويحتاج إلى مساعدة
مقبول	يجيب علي بعض اسئلة النشاط ويحتاج إلى مساعدة كبيرة
ضعيف	لايستطيع الإجابة على اسئلة النشاط ويحتاج إلى المساعدة والتوجية

PDF Compressor Pro

حلول تمارين عامة ص(٦٧،٦٨)

(١) ${}^{4}ل_{٣} = ٤ \times ٣ = ١٢$

(٢) $٣^{٩} = ٧٢٩$

(٣) ${}^{4}ق_{٠} + {}^{4}ق_{١} + {}^{4}ق_{٢} + {}^{4}ق_{٣} + {}^{4}ق_{٤} = ٢^{ن}$

${}^{4}٢ = ٢^{ن}$ ∴ ن = ٤

(٤) ∵ $\frac{ل ن}{ل ١} = ١$ ، ∴ ن = ٠ أو ن = ١

(٥) ب (٦) ج

(٧) ج (٨) أ

(٩) ب (١٠) د

(١١) ب

(١٢) أ ١ ب ٧٢٠ ج ٢٣

د ٥٠ هـ $\frac{١}{١٤}$ و ٢٤

(١٣) ن = ٥ ، $\frac{ل ن}{ل ن-٥} = ١$ (١٤) ر = ٢ ، ${}^{٢}ق_{٤} = ١$

(١٥) م = ٣ ، ن = ١٠ (١٦) ${}^{١٠}ق_{٧} = ١٢٠$

(١٧) ن = ٥

(١٨) ${}^{٧}ق_{١} \times {}^{٥}ق_{٢} = ٧ \times ١٠ = ٧٠$

(١٩) ١٢ (٢٠) ${}^{١٢}ل_{٢} = ١٣٢$

(٢١) أ ن = ٤ ب ن = ٢ ج ن = ٩

د ن = ٥ أو ن = ٦ هـ ن = ٩ و ر = ٣

حلول الاختبار التراكمى ص (٦٨،٦٩)

(١) ج (٢) ب

(٣) ج (٤) د

(٥) ج

تمـارين عامة

أكمل مايأتى:

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ يساوى .....

(٢) إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٣ أرقام ليس بينها الصفر، فإن عدد الطرق يساوى .....

(٣) إذا كان ${}^{4}ق_{.} + {}^{4}ق_{١} + {}^{4}ق_{٢} + {}^{4}ق_{٣} + {}^{4}ق_{٤} = ٢^{ن}$ فإن ن = ...

(٤) إذا كان $\frac{ل ن}{ل ن-١} = ل ن$ فإن ن = ...

اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات (أ، ب، جـ) وأراد أن يختار لونها من بين الألوان: (أبيض، أحمر، فضى، أسود) بكم طريقة يمكن أختيار السيارة.

أ ٧ ب ١٢ ج ١٤ د ٢٤

(٦) كم عدد يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١، ٣، ٦، ٧

أ ٩ ب ١٢ ج ٢٤ د ٦٤

(٧) إذا كانت س = {س: س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥} وكانت ص = {(أ، ب): أ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} كم عدد عناصر ص

أ ٧ ب ١٠ ج ٢٠ د ٢٥

(٨) ${}^{١٢}ق_{٤} + {}^{١٢}ق_{٣}$ يساوى

أ ٧١٥ ب ٧١٠ ج ٧١٦ د ٧٢٠

(٩) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٣٣٦$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} = ٥٦$ فإن ن ، ر هما

أ (٣، ٢) ب (٨، ٣) ج (٧، ٤) د (٧، ٣)

(١٠) شخص له ٨ أصدقاء، عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء

أ ٢٥٠ ب ٢٠٠ ج ٢٥٥ د ٢٥٦

(١١) إذا كان ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن ${}^{٥}ق_{ن}$ يساوى

أ ٢٤ ب ٢٥ ج ١ د ٤٩

(١٢) احسب قيمة كل من:

أ ${}^{٥}ق_{٥}$ ب ٦! ج ${}^{٣٣}ل_{١}$

د ${}^{٥٠}ق_{٤٩}$ هـ $\frac{١٣!}{١٤!}$ و ${}^{4}ل_{٤}$

(١٣) إذا كان ${}^{٢}ق_{ن} = ٨٤$ فما قيمة $\frac{ل ن}{ل ن-٥}$

(١٤) إذا كان ${}^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦$ فما قيمة ${}^{٣}ق_{٤}$

(١٥) إذا كان ${}^{٣}ل_{م} = ٢١٠$ ، ${}^{ن}ق_{٤} = ٧١٥$ فأوجد قيمة كل من م ، ن

(١٦) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية.

(١٧) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد(ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب

(١٨) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجل وسيدتين من بين ٧ رجال و٥ سيدات؟

(١٩) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. أوجد عدد طرق الأختيار؟

(٢٠) يبلغ عدد فرق الدورى الممتاز لكرة القدم ١٢ فريقًا، فإذا كان كل فريق يلعب مباراتين مع كل فريق من باقى الفرق. أوجد عدد مباريات الدورى بأكمله.

(٢١) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ $\frac{ل ن+٣}{ل ن+١} = ٤٢$ ب $١٢ \times \frac{ل ن}{ل ن+٢} = ل ن$ ج $\frac{ل ن}{ل ن-٤} = ١٢٠$

د $\frac{ل ن}{ل ن-٥} = ١$ هـ ${}^{ن}ق_{٣} = ٨٤$ و ${}^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{ر+٣}$

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(١) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣، ٤، ٥ هو .....

أ ٦ ب ٣ ج ١ د صفر

(٢) عدد طرق تكوين العدد ٥٤٧٦ من الأعداد ٤، ٥، ٦، ٧ هو .....

أ ٢٤ ب ١٦ ج ١ د صفر

(٣) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٥ أرقام غير الصفر هو .....

أ ٥ × ٤ × ٣ ب ٥ + ٤ + ٣ ج ٥ × ٥ × ٥ د ٣ × ٢ × ١

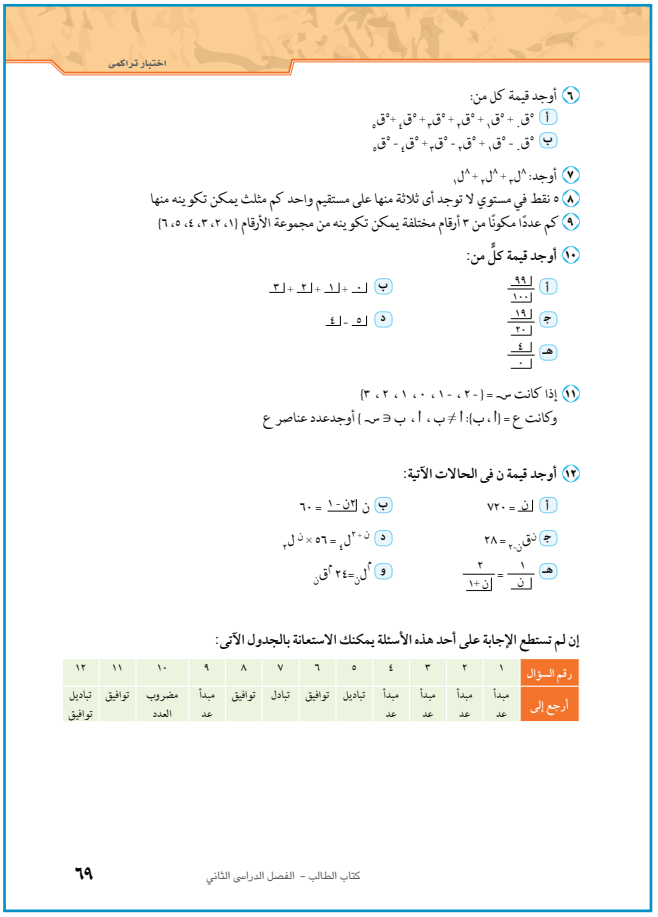
(٤) إذا استخدمت حروف كلمة سلم فى كتابة كلمة من ثلاثة حروف مختلفة فإن عدد الكلمات الناتجة يساوى

أ ٣ ب ٦ ج ٩ د ١

(٥) ${}^{٩}ل_{٩}$ تساوى

أ ٩ × ٨ × ٧ ب ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ج ٩! د ٦!

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمي

٦ أوجد قيمة كل من:
أ $\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٠}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{١}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٢}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٣}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٤}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٥}}$
ب $\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٠}} - \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{١}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٢}} - \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٣}} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٤}} - \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{٥}}$

٧ أوجد: $\text{ل}_{\text{٣}}^{\text{٨}} + \text{ل}_{\text{٢}}^{\text{٨}} + \text{ل}_{\text{١}}^{\text{٨}}$

٨ ٥ نقط في مستوي لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد كم مثلث يمكن تكوينه منها

٩ كم عددًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦)

١٠ أوجد قيمة كلٍّ من:
أ $\frac{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٩٩}}}{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{١٠٠}}}$
ب $\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{ن}} + \text{ل}_{\text{ن}}^{\text{١}} + \text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٢}} + \text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٣}}$
ج $\frac{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{١٩}}}{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٢٠}}}$
د $\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٥}} - \text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٤}}$
هـ $\frac{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٤}}}{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{٠}}}$

١١ إذا كانت س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣}
وكانت ع = {(أ، ب): أ ≠ ب، أ، ب ∈ س} أوجد عدد عناصر ع

١٢ أوجد قيمة ن فى الحالات الآتية:
أ $\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{ن}} = ٧٢٠$
ب $\text{ن} \, \text{ل}_{\text{ن}}^{\text{ن}-١} = ٦٠$
ج $\text{ن} \, \text{ق}_{\text{٢}}^{\text{ن}} = ٢٨$
د $\text{ن}^{٢} \, \text{ل}_{\text{٤}}^{\text{ن}} = ٥٦ \times \text{ن} \, \text{ل}_{\text{٣}}^{\text{ن}}$
هـ $\frac{١}{\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{ن}}} = \frac{٢}{\text{ل}_{\text{ن}+١}^{\text{ن}+١}}$
و $\text{ل}_{\text{ن}}^{\text{ن}} = ٢٤ \, \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{ن}}$

إن لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
أرجع إلى	مبدأ العد	مبدأ العد	مبدأ العد	مبدأ العد	تباديل	توافيق	تبادل	توافيق	مبدأ العد	مضروب العدد	توافيق	تباديل توافيق

٦ ج
٧ ب
٨ ب
٩ أ ٣٢
ب ٠
١٠ ٤٠٠
١١ ١٠
١٢ ١٢٠
١٣ أ $\frac{١}{١٠٠}$
ب ١٠
ج $\frac{١}{٢٠}$
د ٩٦
هـ ٢٤
١٤ $\text{ق}_{\text{٢}}^{\text{٦}} = ١٥$
١٥ أ ن = ٦
ب ن = $\frac{٥}{٢}$
ج ن = ٨
د ن = ٦
هـ ن = ١
و ن ∈ صـ$^{+}$
١٦ أ م.ح = {(١، ٢)}
ب م.ح = {٢ + $\sqrt{٣}$، -٢ + $\sqrt{٣}$}

PDF Compressor Pro



الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل

Calculus

مقدمة الوحدة

ابتكر اسحاق نيوتن (١٦٤٢م - ١٧٢٧م) حساب التفاضل والتكامل ، ونافسه فى ذلك ليبنتز (١٦٤٦م - ١٧١٦م) مستقلاً عنه - حيث نشأ علم التفاضل (Differentiation) أو الاشتقاق مرتبطا بمشكلة إيجاد مماسات لمنحنيات وحساب قيم عظمى وصغرى لدوال رياضية بحتة أو دوال تنمذج مشكلات مجتمعية واقتصادية . أما التكامل (Integration) فقد رأى نيوتن أنه عملية عكسية للتفاضل بينما رآه ليبنتز كنهاية مجاميع، وينسب له استخدام حرف S للتعبير عن التكامل (من Summation) ثم تحول إلى الرمز المعروف حاليًا ∫ والقريب من S ، وقد تقدم علم التفاضل والتكامل على أيدى كثيرين منهم بيركلى ، لاجرانج، لابلاس ، جاوس ، وايرشتراس - كما ساعد ابتكار الهندسة التحليلية فى تطور هذا العلم.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (المشتقة اليمنى - المشتقة اليسرى).
- يستنتج العلاقة بين الاشتقاق و الاتصال .
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
  - مشتقة الدالة الثابتة.
  - مشتقة الدالة د: د(س) = س^{ن}
  - مشتقة الدالة د : د(س) = س
  - مستقة الدالة د: د(س) = أ س^{ن}
  - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما.
  - مشتقة حاصل ضرب دالتين.
  - مشتقة خارج قسمة دالتين.
  - مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
  - مشتقة الدالة ص = (د(س))^{ن}
  - مشتقة الدوال المثلثية.
- يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس والعمودي لمنحنى عند نقطة عليه.
- يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يتعرف ويستنتج قواعد التكامل الآتية:
  - $\int س^{ن}\,و\,س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ -١
  - $\int د(س)\,و\,س = أ\int د(س)\,و\,س$. حيث أ ثابت
  - $\int [د(س) \pm ر(س)]\,و\,س = \int د(س)\,و\,س \pm \int ر(س)\,و\,س$
  - $\int (أ س + ب)^{ن}\,و\,س = \frac{١}{أ(ن+١)}(أ س + ب)^{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ -١
  - $\int جا\,أ س\,و\,س = -\frac{١}{أ}$ جتا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int جتا\,أ س\,و\,س = \frac{١}{أ}$ جا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int قا^{٢}\,أ س\,و\,س = \frac{١}{أ}$ ظا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int د(س)\,[د(س)]^{ن}\,و\,س = \frac{١}{ن+١}[د(س)]^{ن+١} + ث$

٧٠ كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى

مقدمة الوحدة:

سبق وأن درس الطالب مفهوم نهاية الدالة واتصالها عند نقطة كذلك عند اللانهاية ثم على فترة، وسوف يدرس فى هذه الوحدة مفهوم الاشتقاق وإيجاد المشتقة الأولى للدالة في حالات مختلفة وتطبيقات عليها كما سيدرس مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل، ويدرس بعض قواعد التكامل من خلال عدة دروس بيانها كالآتي:

الدرس الأول: معدل التغير.

الدرس الثاني: الاشتقاق.

الدرس الثالث: قواعد الاشتقاق.

الدرس الرابع: مشتقات الدوال المثلثية.

الدرس الخامس: تطبيقات على المشتقة.

الدرس السادس: التكامل.

مخرجات التعلم:

في نهاية هذه الوحدة وتنفيذًا للأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط معدل التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (المشتقة اليمنى - المشتقة اليسرى).
- يستنتج العلاقة بين الاشتقاق و الاتصال.
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق.
  - مشتقة الدالة الثابتة.
  - مشتقة الدالة د: د(س) = س^{ن}
  - مشتقة الدالة د: د(س) = س
  - مستقة الدالة د: د(س) = أ س^{ن}
  - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما.
  - مشتقة حاصل ضرب دالتين.
  - مشتقة خارج قسمة دالتين.
  - مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
  - مشتقة الدالة ص = (د(س))^{ن}
  - مشتقة الدوال المثلثية.
- يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية.
- يوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة.
- يوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة.
- يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يتعرف قواعد التكامل الآتية:
  - $\int س^{ن}\,و\,س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ -١
  - $\int د(س)\,و\,س = أ\int د(س)\,و\,س$. حيث أ ثابت
  - $\int [د(س) \pm ر(س)]\,و\,س = \int د(س)\,و\,س \pm \int ر(س)\,و\,س$
  - $\int (أ س + ب)^{ن}\,و\,س = \frac{١}{أ(ن+١)}(أ س + ب)^{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ -١
  - $\int جا\,أ س\,و\,س = -\frac{١}{أ}$ جتا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int جتا\,أ س\,و\,س = \frac{١}{أ}$ جا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int قا^{٢}\,أ س\,و\,س = \frac{١}{أ}$ ظا أ س + ث حيث أ ثابت
  - $\int د(س)\,[د(س)]^{ن}\,و\,س = \frac{١}{ن+١}[د(س)]^{ن+١} + ث$

PDF Compressor Pro



المصطلحات الأساسية

التغير	Variation	دالة قابلة للاشتقاق	Differintable Functions
متوسط التغير	Average Rate of Change	حاصل الضرب	Product
معدل التغير	Rate of Change	خارج القسمة	Quotient
المشتقة الأولى	First Derivative	قاعدة السلسلة	Chain Rule
المشتقة اليسرى	Left Derivative	الدوال المثلثية	Trigonometric Functions
المشتقة اليمنى	Right Derivative	تكامل	Integration
الاشتقاق	Differentiation	مشتقة عكسية	Antiderivative

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جاسب آلي – برامج رسومية.

دروس الوحدة

الدرس (٣ – ١): معدل التغير.

الدرس (٣ – ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ – ٣): قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ – ٤): مشتقات الدوال المثلثية.

الدرس (٣ – ٥): تطبيقات على المشتقة.

الدرس (٣ – ٦): التكامل.

مخطط تنظيمي للوحدة

زمن تدريس الوحدة:

١٨ حصة.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

آلة حاسبة علمية - حاسب آلي - برامج رسومية - السبورة التعليمية.

طرق التدريس المقترحة:

المناقشة - المحاضرة - العصف الذهني - التعلم التعاوني - الطريقة الاستقرائية - الطريقة الاستنباطية - تعلم بالاكتشاف الموجه.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير التحليلي - التفكير الإبداعي - حل المشكلات - التفكير المنطقي.

طرق التقييم المقترحة:

تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء الدرس والأسئلة المتضمنة في بند حاول أن تحل كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة على كل درس في الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة:

يوضح المخطط المفاهيم الخاصة بكل من التفاضل والتكامل، حيث يتناول التفاضل المفاهيم الخاصة بدالة التغير ومتوسط معدل التغير ثم مفهوم المشتقه الأول للدالة وقابلية الاشتقاق والعلاقة بين الاشتقاق والاتصال وتطبيقات هندسية لكل من معادلة المماس والعمودى. بينما فى موضوعات التكامل فيتم توضيح مفهوم التكامل والمشتقة العكسية وقواعد التكامل.

PDF Compressor Pro

٣ - ١ معدل التغير
Rate of Change

خلفية

معدل التغير هو المدخل الطبيعي لمفهوم مشتقة الدالة، وفي هذا الدرس سوف يتعرف الطالب على دالة التغير ومتوسط معدل التغير، ومنها يوجد معدل التغير الذي يعبر عن المشتقة الأولى للدالة.

مخرجات الدرس:

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير.
- يتعرف متوسط معدل التغير.
- يتعرف مفهوم معدل التغير.

مفردات أساسية:

دالة التغير - متوسط معدل التغير - معدل التغير.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - حاسب آلي - برامج رسومية - حاسبة بيانية.

طرق التدريس المقترحة:

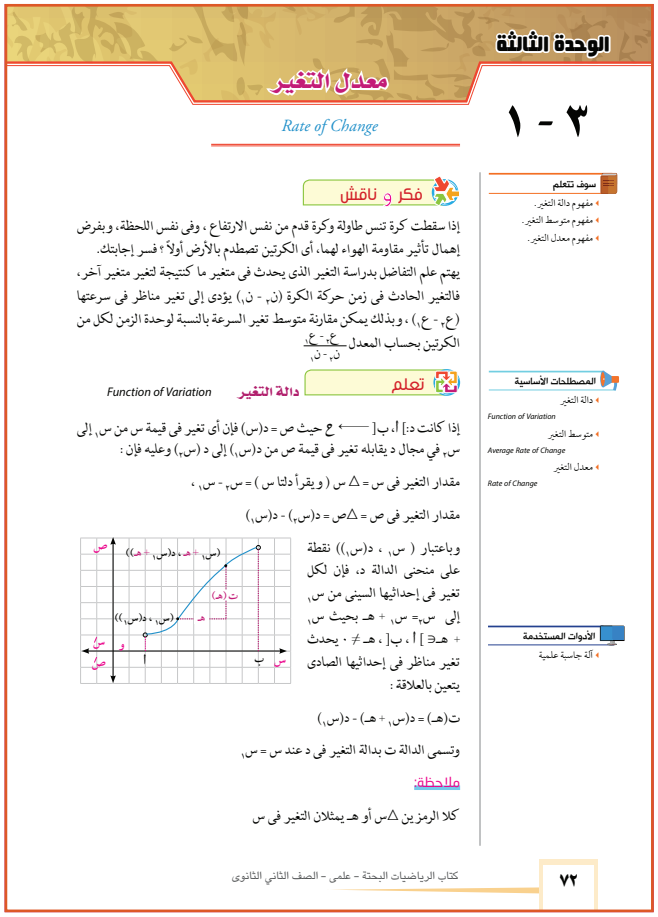
المحاضرة - العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - حل المشكلات - التعلم التعاوني.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من صفحة ٧٢ إلى صفحة ٧٩.



الوحدة الثالثة

معدل التغير
Rate of Change

٣ - ١

سوف تتعلم
- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية
- دالة التغير
Function of Variation
- متوسط التغير
Average Rate of Change
- معدل التغير
Rate of Change

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

إذا سقطت كرة تنس طاولة وكرة قدم من نفس الارتفاع ، وفي نفس اللحظة، وبفرض إهمال تأثير مقاومة الهواء لهما، أي الكرتين تصطدم بالأرض أولاً؟ فسر إجابتك.

يهتم علم التفاضل بدراسة التغير الذي يحدث في متغير ما كنتيجة لتغير متغير آخر، فالتغير الحادث في زمن حركة الكرة (ن٢ - ن١) يؤدي إلى تغير مناظر في سرعتها (ع٢ - ع١) ، وبذلك يمكن مقارنة متوسط تغير السرعة بالنسبة لوحدة الزمن لكل من الكرتين بحساب المعدل $\frac{ع_2 - ع_1}{ن_2 - ن_1}$

تعلم — دالة التغير — *Function of Variation*

إذا كانت د:]أ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) فإن أي تغير في قيمة س من س١ إلى س٢ في مجال د يقابله تغير في قيمة ص من د(س١) إلى د (س٢) وعليه فإن :

مقدار التغير في س = Δ س (ويقرأ دلتا س) = س٢ - س١ ،

مقدار التغير في ص = Δص = د(س٢) - د(س١)

وباعتبار (س١ ، د(س١)) نقطة على منحنى الدالة د، فإن لكل تغير في إحداثيها السيني من س١ إلى س٢= س١ + هـ بحيث س١ + هـ ∈]أ ، ب[، هـ ≠ ٠ يحدث تغير مناظر في إحداثيها الصادي يتعين بالعلاقة :

ت(هـ) = د(س١ + هـ) - د(س١)

وتسمى الدالة ت بدالة التغير في د عند س = س١

ملاحظة:

كلا الرمزين Δس أو هـ يمثلان التغير في س

التهيئة:

في بند فكر وناقش.

- بين إلى الطلاب أنه عند سقوط الأجسام تحت تأثير وزنها فقط ودون أي مؤثرات (قوى) خارجية فإنها تصل إلى سطح الأرض في نفس اللحظة، وأن معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن هو عجلة الحركة.

إجراءات الدرس:

أشر إلى الطلاب في بند تعلم بأن:

Δ س أو هـ ترمز إلى التغير في س عندما تتغير س من س١ إلى س٢ حيث س٢ = س١ + هـ، Δ ص هو التغير في ص أي التغير في الدالة عندما تتغير (تبعاً لتغير س) من د(س١) إلى د(س١ + هـ) حيث:

Δ ص = ت(هـ) = د(س١ + هـ) - د(س١)

- ناقش مع طلابك مثال (١) وأوجد دالة التغير (ت) بدلالة (هـ).
- درب طلابك علي مهارة فك الأقواس وإيجاد المقدار الجبرى في أبسط صورة ثم التعويض عن قيم (هـ) المعطاة.

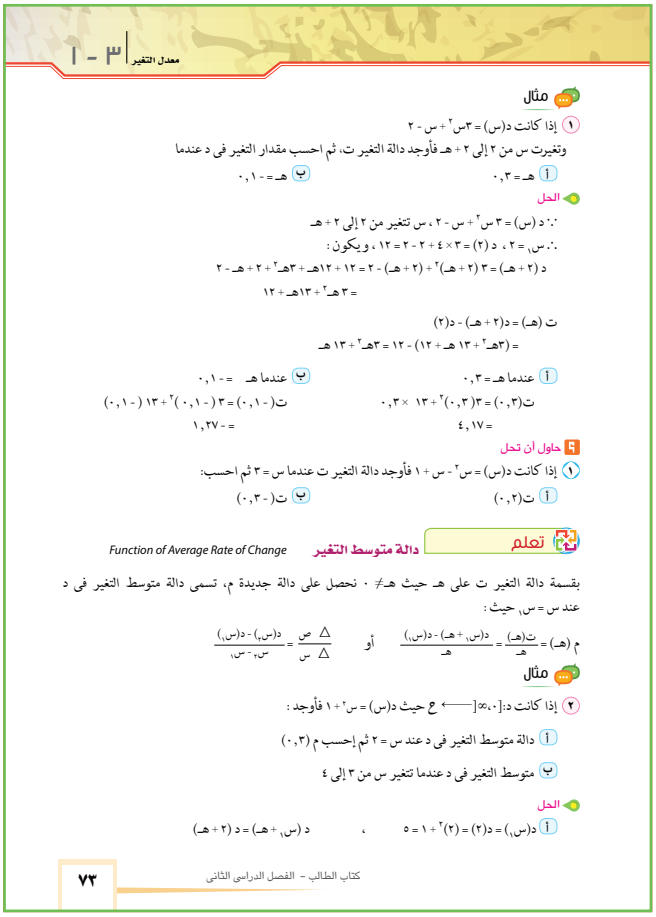
متوسط التغير: $م(هـ) = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

ويعرف متوسط معدل التغير بأنه ميل القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$

بينما معدل التغير يعرف بأنه ميل المماس عند النقطة (س١ ، د(س١))

حيث معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

PDF Compressor Pro



٣ - ١ | معدل التغير

مثال

(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} + س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت، ثم احسب مقدار التغير فى د عندما

(أ) هـ = ٠,٣ (ب) هـ = - ٠,١

الحل

∵ د (س) = ٣ س^{٢} + س - ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ س$_{١}$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ - ٢ = ١٢ ، ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^{٢} + (٢ + هـ) - ٢ = ١٢ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} + ٢ + هـ - ٢

= ٣ هـ^{٢} + ١٣هـ + ١٢

ت (هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

= (٣هـ^{٢} + ١٣ هـ + ١٢) - ١٢ = ٣هـ^{٢} + ١٣ هـ

(أ) عندما هـ = ٠,٣ (ب) عندما هـ = - ٠,١

ت(٠,٣) = ٣(٠,٣)^{٢} + ١٣ × ٠,٣ ت(- ٠,١) = ٣ (- ٠,١)^{٢} + ١٣ (- ٠,١)

= ٤,١٧ = - ١,٢٧

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} - س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

(أ) ت(٠,٢) (ب) ت(- ٠,٣)

تعلم دالة متوسط التغير *Function of Average Rate of Change*

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م، تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = س$_{١}$ حيث :

م (هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$ أو $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

مثال

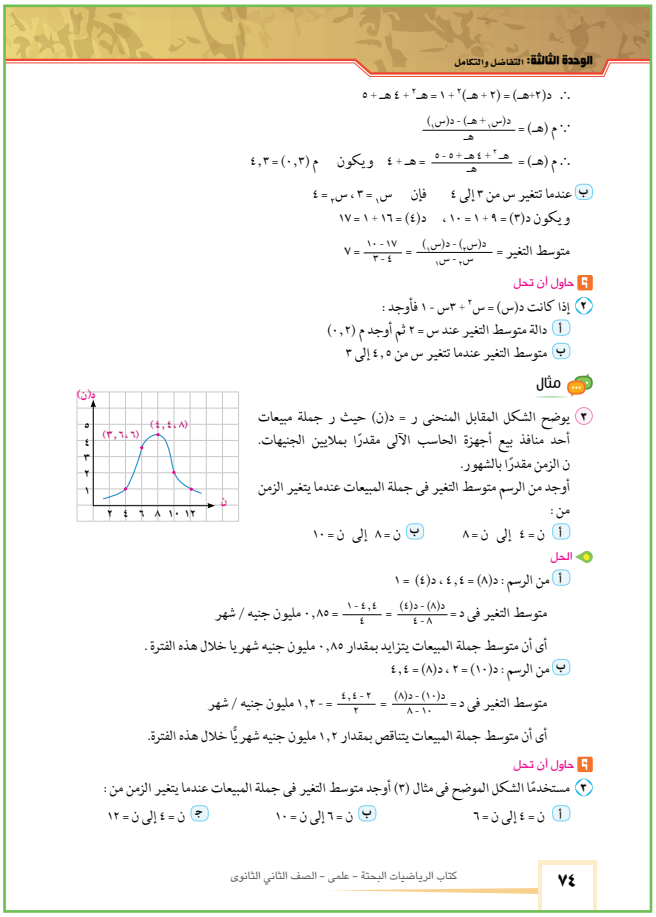
(٢) إذا كانت د:]-∞، ٠[⟵ ع حيث د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم إحسب م (٠,٣)

(ب) متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

الحل

(أ) د(س$_{١}$) = د(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، د (س$_{١}$ + هـ) = د (٢ + هـ)



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

∴ د(٢+هـ) = (٢ + هـ)^{٢} + ١ = هـ^{٢} + ٤ هـ + ٥

∵ م (هـ) = $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

∴ م (هـ) = $\frac{هـ^{٢} + ٤هـ + ٥ - ٥}{هـ}$ = هـ + ٤ ويكون م (٠,٣) = ٤,٣

(ب) عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ فإن س$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = ٤

ويكون د(٣) = ١ + ٩ = ١٠ ، د(٤) = ١٦ + ١ = ١٧

متوسط التغير = $\frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١٧ - ١٠}{٤ - ٣}$ = ٧

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س - ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

(ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

مثال

(٣) يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات. ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

(أ) ن = ٤ إلى ن = ٨ (ب) ن = ٨ إلى ن = ١٠

الحل

(أ) من الرسم : د(٨) = ٤,٤ ، د(٤) = ١

متوسط التغير فى د = $\frac{د(٨) - د(٤)}{٨ - ٤} = \frac{٤,٤ - ١}{٤}$ = ٠,٨٥ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه شهريا خلال هذه الفترة .

(ب) من الرسم : د(١٠) = ٢ ، د(٨) = ٤,٤

متوسط التغير فى د = $\frac{د(١٠) - د(٨)}{١٠ - ٨} = \frac{٤,٤ - ٢}{٢}$ = - ١,٢ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة.

حاول أن تحل

(٣) مستخدمًا الشكل الموضح فى مثال (٣) أوجد متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

(أ) ن = ٤ إلى ن = ٦ (ب) ن = ٦ إلى ن = ١٠ (ج) ن = ٤ إلى ن = ١٢

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (٧٣)، (٧٤) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

(١) ∵ د(س) = س^{٢} - س + ١ عند س = ٣

∴ د(٣) = ٩ - ٣ + ١ = ٧

د(٣ + هـ) = (٣ + هـ)^{٢} - (٣ + هـ) + ١

= هـ^{٢} + ٦ هـ + ٩ - ٣ - هـ + ١

= هـ^{٢} + ٥ هـ + ٧

ت(هـ) = د(٣ + هـ) - د(٣) = هـ^{٢} + ٥ هـ

(أ) ت (٠,٢) = ١,٠٤ (ب) ت (- ٠,٣) = - ١,٤١

(٢) ∵ د(س) = س^{٢} + ٣س - ١

(أ) عند س = ٢ ∴ د(٢) = ٤ + ٦ - ١ = ٩

د(٢ + هـ) = (٢ + هـ)^{٢} + ٣(٢ + هـ) - ١

= هـ^{٢} + ٤ هـ + ٤ + ٦ + ٣ هـ - ١

= هـ^{٢} + ٧ هـ + ٩

م(هـ) = $\frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ = هـ + ٧ ، م(٠,٢) = ٧,٢

(ب) س$_{١}$ = ٤,٥ ، س$_{٢}$ = ٣

△ س = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ٣ - ٤,٥ = - ١,٥

△ ص = د(٣) - د(٤,٥) = ١٧ - ٣٢,٧٥ = - ١٥,٧٥

متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{- ١٥,٧٥}{- ١,٥}$ = ١٠,٥

(٣) متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta ر}{\Delta ن} = \frac{د(ن_{٢}) - د(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$

(أ) $\frac{د(٦) - د(٤)}{٦ - ٤} = \frac{٣,٦ - ١}{٢}$ = ١,٣

(ب) $\frac{د(١٠) - د(٦)}{١٠ - ٦} = \frac{٣,٦ - ٢}{٤}$ = - ٠,٤

(ج) $\frac{د(١٢) - د(٤)}{١٢ - ٤} = \frac{١ - ١}{٨}$ = صفر

- وضح إلى الطلاب بأن معدل تغير الدالة نهـــا $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ وهي مشتقة الدالة د (س) هـ ← ٠

- وضح إليهم كذلك بأن ميل المماس لمنحنى الدالة عند أي نقطة عليه هو المعنى الهندسي للمشتقة الأولى للدالة.

PDF Compressor Pro

فى بند تفكير ناقد :

الهدف هو عدم وقوع الطالب فى خطأ أن متوسط التغير يكون ثابتًا ، فى الفترة]٦،∞[فقط (أى الفترة التى تكون الدالة فيها ثابتة).

إجابة تفكير ناقد:

متوسط معدل التغير = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ويكون ثابتًا لأنه يمثل ميل المستقيم ، متوسط معدل التغير يكون ثابتًا فى الفترات] - ٢، ٠[،]٢، ٤[،]٦، ∞[

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(٧٨)

٤) $د(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ، س تتغير من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

$\therefore د(س_١ + هـ) - د(س_١) = \frac{٣}{س_١ + هـ - ٢} - \frac{٣}{س_١ - ٢}$

$ت(هـ) = \frac{٣س_١ - ٦ - ٣س_١ - ٣هـ + ٦}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$

$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{-٣}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \frac{-٣}{(س_١ - ٢)^٢}$

عندما $س_١ = ٥$ ∴ معدل التغير = $\frac{-٣}{(٣-)^٢} = \frac{-١}{٣}$

٥) يجب التأكيد على الطلاب عند حل هذا التمرين على أنه لايمكن حساب معدل التغير عندما س = ٥ لأن النهاية غير موجودة.

الإجابة: مجال د =]٥ ، ∞[

$م(هـ) = \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ - ٥} + \sqrt{س_١ - ٥}}$

$\lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \frac{١}{٢\sqrt{س_١ - ٥}}$ ، $س_١ > ٥$

التقييم المستمر: (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل (٧٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

وضح لطلابك أهمية نمذجة المسائل ودورها فى الوصل إلى الحل بصورة صحيحة.

٦) نمذجة المسألة

نفرض أن طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها تساوى م سم^٢ فيكون م = د(س) = س^٢ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

∴ دالة متوسط معدل التغير = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$م(هـ) = \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س^٢}{هـ} = ٢س_١ + هـ$



تفكير ناقد:

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س). حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك

تعلم

دالة معدل التغير *Function of Rate of Change*

إذا كانت د:]أ ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) ، س$_١$ ، س$_١$ + هـ ∈]أ ، ب[فإن :

دالة معدل التغير فى د عند س = $س_١$ نهـا $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = نهـا $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

٤) أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = $س_١$ لكل مماياتى، ثم أوجد هذا المعدل عند قيم س المعطاة

أ) د(س) = ٣س^٢ + ٢ عندما س = ٢ ب) د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ عندما س = ٣

الحل

أ) ∵ د(س) = ٣س^٢ + ٢ ∴ عندما س = $س_١$ فإن د($س_١$) = ٣$س_١^٢$ + ٢،

د($س_١$ + هـ)^٢ = ٣ ($س_١$ + هـ)^٢ + ٢ = ٣$س_١^٢$ + ٦ $س_١$ هـ + ٣ هـ^٢ + ٢

دالة معدل التغير فى د = نهـا $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= نهـا $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٦س_١ هـ + ٣هـ^٢}{هـ}$ = نهـا $\lim_{هـ \to ٠}$ (٦$س_١$ + ٣ هـ) = ٦$س_١$

عند س = ٢ ∴ $س_١$ = ٢ ويكون معدل التغير فى د = ٦ × ٢ = ١٢

ب) ∵ د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ ∴ عندما س = $س_١$ فإن :

د($س_١$ + هـ) - د($س_١$) = $\frac{٢}{س_١ + هـ - ١} - \frac{٢}{س_١ - ١}$

= $\frac{٢س_١ - ٢ - ٢س_١ - ٢هـ + ٢}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$ = $\frac{-٢هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$

دالة معدل التغير فى د = نهـا $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= نهـا $\lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \times \frac{-٢هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$ = $\frac{-٢}{(س_١ - ١)^٢}$

عند س = ٣ ∴ $س_١$ = ٣ ويكون معدل التغير فى د = $\frac{-٢}{(٣-١)^٢} = -\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٤) أوجد دالة المتوسط التغير فى د حيث د(س) = $\frac{٣}{س - ٣}$ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥

مثال

٥) أوجد دالة المتوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ عند س = $س_١$ ثم أوجد معدل التغير فى د عندما:

أ) س = ٦ ب) س = - ٢

الحل

أ) ∵ د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ ∴ مجال د =]- ٣ ، ∞[

عند س = $س_١$ فإن : د($س_١$) = $\sqrt{س_١ + ٣}$ ، د($س_١ + هـ$) = $\sqrt{س_١ + هـ + ٣}$

ويكون:

دالة المتوسط التغير فى د = م(هـ) = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ}$

، دالة معدل التغير فى د = نهـا م(هـ) = نهـا $\frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ}$

= نهـا $\frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} - \sqrt{س_١ + ٣}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}}{\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}}$

= نهـا $\frac{س_١ + هـ + ٣ - س_١ - ٣}{هـ[\sqrt{س_١ + هـ + ٣} + \sqrt{س_١ + ٣}]}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{س_١ + ٣}}$ حيث $س_١ > -٣$

أ) عند س = ٦ ∴ معدل التغير فى د = $\frac{١}{٢\sqrt{٦ + ٣}} = \frac{١}{٦}$

ب) عند س = - ٢ ∴ معدل التغير فى د = $\frac{١}{٢\sqrt{-٢ + ٣}} = \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٥) أوجد دالة المتوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = $س_١$ ثم استنتج معدل التغير فى د عندما س = ٩

هل يمكن حساب معدل التغير فى د عندما س = ٥ ؟ فسر إجابتك

تطبيقات حياتية

مثال

٦) سقط حجر فى ماء ساكن، فتكونت موجة دائرية تتسع بانتظام، بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى . أوجد معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ٣,٥ سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

PDF Compressor Pro

عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٤ ∴ س = ٣ ، هـ = ٠,٤

م(٠,٤) = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

دالة معدل التغير = $\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0}$ $\frac{\text{م}(\text{هـ}) - \text{م}(\text{س}_1 + \text{هـ})}{\text{هـ}}$ = ٢س$_1$

عندما س = س$_1$ = ٥

معدل التغير فى مساحة الصفيحة = ٢ × ٥ = ١٠

(٧) د(ن) = ٢ن^3 + ١٠٠ ، عند ن = ٥

∴ معدل النمو اللحظى = معدل التغير

$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(٥ + \text{هـ}) - \text{د}(٥)}{\text{هـ}}$

$= ٢ \text{ نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{(٥ + \text{هـ})^3 - (٥)^3}{\text{هـ}} = ٢ \times ٣ (٥)^2 = ١٥٠$ ملليجرام / دقيقة

تمارين اثرائية

ارسم مثلث النسبة بين طول قاعدته إلى ارتفاعه كنسبة ٨: ٣ بأحد البرامج الرسومية، فإذا كانت أبعاده تتغير محتفظة بنفس النسبة فأوجد:

(١) معدل تغير مساحة المثلث بالنسبة لطول قاعدته.

(٢) معدل تغير مساحة المثلث بالنسبة لارتفاعه.

الأخطاء الشائعة

فى مسألة رقم (١١) اكتشف الخطأ:

الخطأ: وضع الطول أو العرض بالمتغير المستقل (س)

الصواب: هو وضع العرض فقط بالمتغير المستقل (س) لأن المطلوب هو حساب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى عرضها وليس طولها.

إجابات تمارين (٣-١) ص(٧٨،٧٩):

إجابات:

(١) ب (٢) د (٣) د (٤) أ

(٥) ٢س$_1$ هـ + هـ^2 + ٢هـ

أ) -٢ ب) ١

(٦) عند س = س$_1$

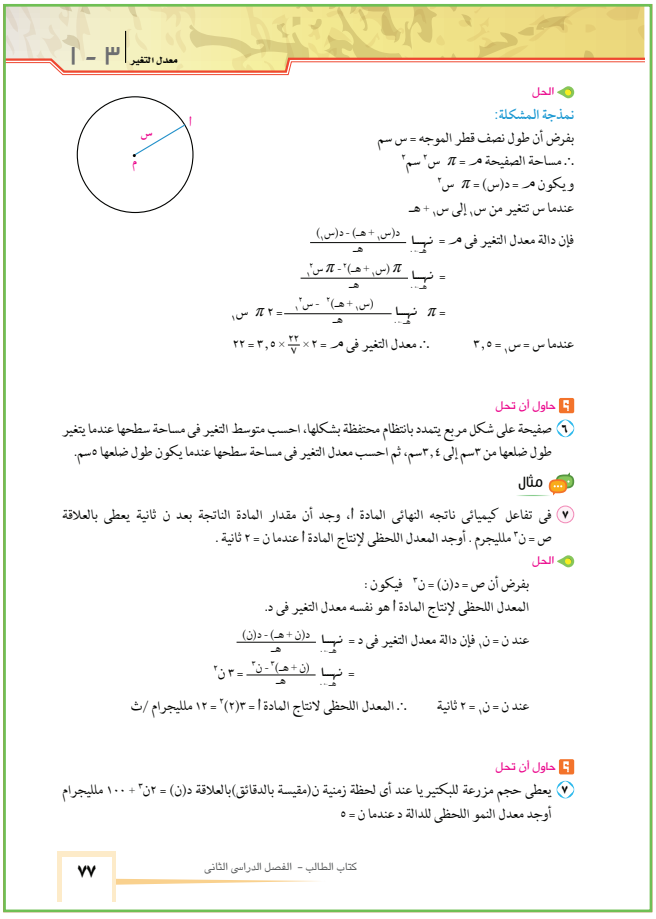
∴ دالة معدل التغير $= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

أ) ∵ د(س) = ٢س^3

∴ دالة معدل التغير $= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{٢(\text{س}_1 + \text{هـ})^3 - ٢\text{س}_1^3}{\text{هـ}}$

$= ٢ \text{ نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^3 - \text{س}_1^3}{\text{هـ}} = ٢ \times ٣\text{س}_1^3 = ٦\text{س}_1^3$

عندما س = س$_1$ = ٢ ∴ معدل التغير = ٦(٢)^2 = ٢٤



الحل

نمذجة المشكلة:

بفرض أن طول نصف قطر الموجه = س سم

∴ مساحة الصفيحة مـ = π س^2 سم^2

ويكون مـ = د(س) = π س^2

عندما س تتغير من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ

فإن دالة معدل التغير فى مـ = $\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\pi (\text{س}_1 + \text{هـ})^2 - \pi \text{س}_1^2}{\text{هـ}}$

$= \pi \text{ نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 - \text{س}_1^2}{\text{هـ}} = \pi ٢ \text{ س}_1$

عندما س = س$_1$ = ٣,٥ ∴ معدل التغير فى مـ = $٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣,٥ = ٢٢$

حاول أن تحل

(٦) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣سم إلى ٣,٤سم، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥سم.

مثال

(٧) فى تفاعل كيميائى ناتجه النهائى المادة أ، وجد أن مقدار المادة الناتجة بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ص = ن^3 ملليجرم . أوجد المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ عندما ن = ٢ ثانية .

الحل

بفرض أن ص = د(ن) = ن^3 فيكون :

المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ هو نفسه معدل التغير فى د.

عند ن = ن$_1$ فإن دالة معدل التغير فى د = $\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{ن} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{ن})}{\text{هـ}}$

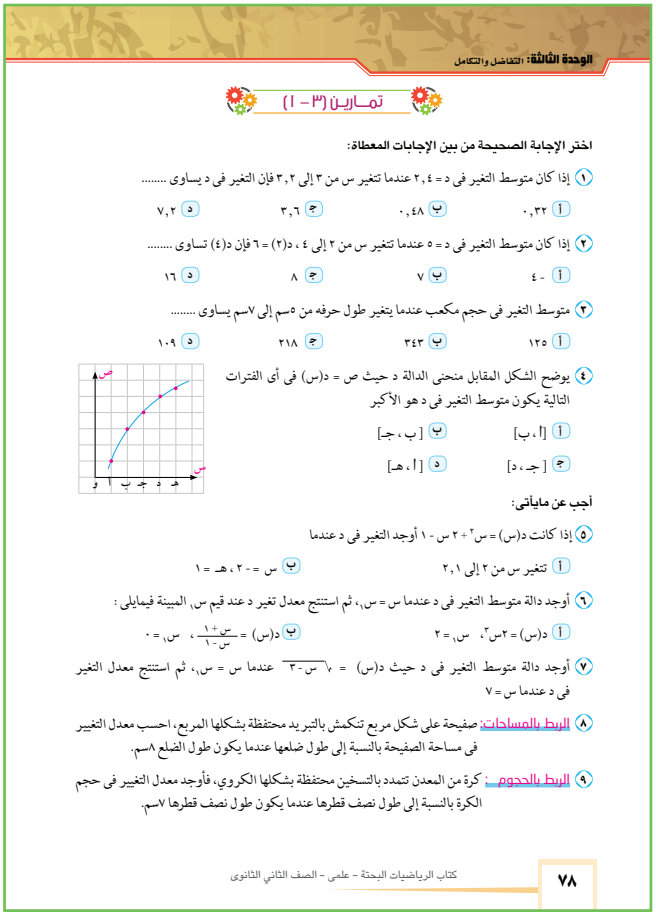
$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{ن} + \text{هـ})^3 - \text{ن}^3}{\text{هـ}} = ٣ \text{ ن}^2$

عند ن = ن$_1$ = ٢ ثانية ∴ المعدل اللحظى لانتاج المادة أ = ٣(٢)^2 = ١٢ ملليجرام /ث

حاول أن تحل

(٧) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن(مقيسة بالدقائق)بالعلاقة د(ن) = ٢ن^3 + ١٠٠ ملليجرام

أوجد معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥



تمـارين (٣ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى .....

أ) ٠,٣٢ ب) ٠,٤٨ ج) ٣,٦ د) ٧,٢

(٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د(٢) = ٦ فإن د(٤) تساوى .....

أ) -٤ ب) ٧ ج) ٨ د) ١٦

(٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم يساوى .....

أ) ١٢٥ ب) ٣٤٣ ج) ٢١٨ د) ١٠٩

(٤) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س) فى أى الفترات التالية يكون متوسط التغير فى د هو الأكبر

أ) [ا ، ب] ب) [ب ، جـ]

ج) [جـ ، د] د) [ا ، هـ]

أجب عن مايأتى:

(٥) إذا كانت د(س) = س^2 + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ) تتغير س من ٢ إلى ٢,١ ب) س = -٢ ، هـ = ١

(٦) أوجد دالة متوسط التغير فى د عندما س = س$_1$، ثم استنتج معدل تغير د عند قيم س$_1$ المبينة فيمايلى :

أ) د(س) = ٢س^3، س$_1$ = ٢ ب) د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ، س$_1$ = ٠

(٧) أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ عندما س = س$_1$، ثم استنتج معدل التغير فى د عندما س = ٧

(٨) الربط بالمساحات: صفيحة على شكل مربع تتمدد بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

(٩) الربط بالحجوم : كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي، فأوجد معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧سم.

PDF Compressor Pro

ب ∵ د(س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$

د(س$_١$ + هـ) - د(س$_١$) = $\frac{س_١ + هـ + ١}{س_١ + هـ - ١} - \frac{س_١ + ١}{س_١ - ١}$

ت(هـ) = $\frac{- ٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$

م(هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{- ٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$

دالة معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠}$ م(هـ) = $\frac{- ٢}{(س_١ - ١)^٢}$

عندما س = س$_١$ = ٠

∴ معدل التغير = - ٢

٧ م(هـ) = $\frac{١}{هـ}$ ($\sqrt{س_١ + هـ - ٣} - \sqrt{س_١ - ٣}$)

$\lim_{هـ \to ٠}$ م(هـ) = $\frac{١}{٢\sqrt{س_١ - ٣}}$، عند س = ٧

معدل التغير = $\frac{١}{٤}$

٨ معدل التغير فى مساحة الصفيحه = ٢ ل

عندما يكون طول ضلع الصفيحة ٨سم

معدل التغير = ١٦

٩ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ ن^٣

معدل تغير فى الحجم = ٦١٦

١٠ **اكتشف الخطأ:** ساعد طلابك فى اكتشاف الخطأ بعد عرض الحلول المختلفة.

معالجة القضايا المرتبطة بالبيئة

فى المسائل من (١١) ، (١٣) تناول القضايا المتضمنة والمرتبطة بالبيئة.

١١ ٧

١٢ نمذجة المسألة

مساحة سطح الفقاعة م = د(ن) = $\frac{٤}{٣}\pi$ ن^٣

عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_٢$

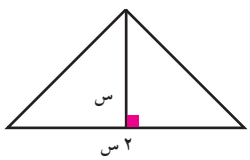
∴ متوسط معدل التغير = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

∵ ن تتغير من ٠,٥ سم إلى ٠,٦ سم

∴ متوسط التغير = $\frac{د(٠,٦) - د(٠,٥)}{٠,٦ - ٠,٥}$

= ١٠ × ٤ π [(٠,٦)^٣ - (٠,٥)^٣] = ١٣,٨

١٣ **نمذجة المسألة**



المساحة تتغير بتغير الارتفاع فيكون المتغير المستقل س يمثل الارتفاع وطول القاعدة عندئذ = ٢ س

مساحة الصفيحة م = $\frac{١}{٢}$ × ٢س × س = س^٢ = د(س)

عندما تتغير س من ٨ إلى ٨,٤

∴ س$_١$ = ٨ ، س$_٢$ = ٨,٤

متوسط التغير فى م = $\frac{د(٨,٤) - د(٨)}{٨,٤ - ٨}$

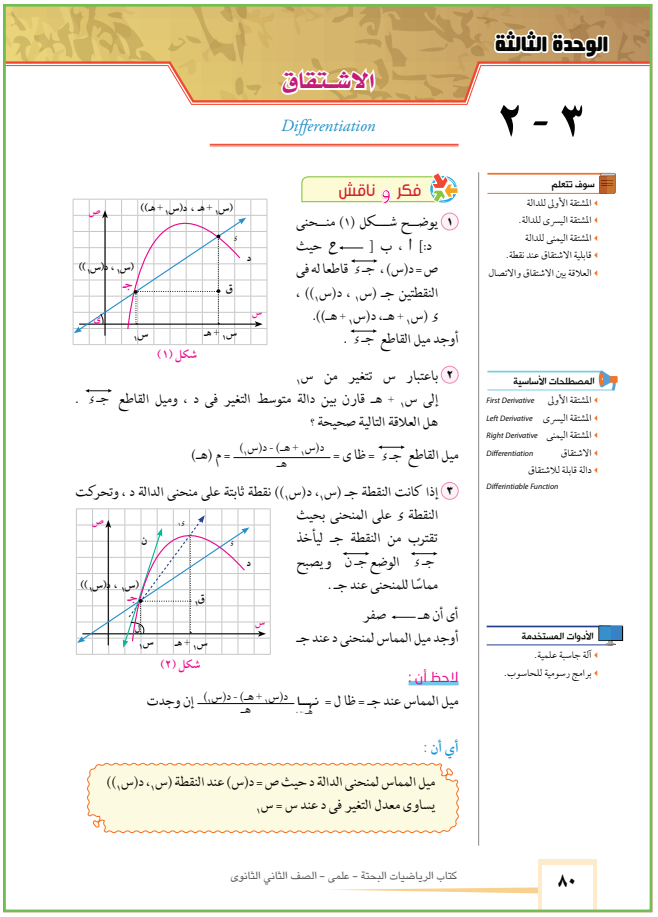
= $\frac{١٠}{٤}$ [(٨,٤)^٢ - (٨)^٢]

= $\frac{١٠}{٤} \times \frac{٤}{١٠}$ × ١٦,٤ = ١٦,٤



PDF Compressor Pro

٢ - ٣ الاشتقاق
Differentiation


الوحدة الثالثة

الاشتقاق

Differentiation

٢ - ٣

سوف تتعلم
- المشتقة الأولى للدالة.
- المشتقة اليسرى للدالة.
- المشتقة اليمنى للدالة.
- قابلية الاشتقاق عند نقطة.
- العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

المصطلحات الأساسية
- المشتقة الأولى First Derivative
- المشتقة اليسرى Left Derivative
- المشتقة اليمنى Right Derivative
- الاشتقاق Differentiation
- دالة قابلة للاشتقاق Differintiable Function

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

١ يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] ⟶ ع حيث ص = د(س) ، جـ ؤ قاطعا له فى النقطتين جـ (س، ، د(س،)) ، ؤ (س، + هـ ، د(س، + هـ)).
أوجد ميل القاطع جـ ؤ .

شكل (١)

٢ باعتبار س تتغير من س، إلى س، + هـ قارن بين دالة متوسط التغير فى د ، وميل القاطع جـ ؤ .
هل العلاقة التالية صحيحة ؟
ميل القاطع جـ ؤ = ظا ى = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ = م (هـ)

٣ إذا كانت النقطة جـ (س، ، د(س،)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت النقطة ؤ على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ لأخذ جـ ؤ الوضع جـ ن ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ.
أى أن هـ ⟶ صفر
أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ

شكل (٢)

لاحظ أن:
ميل المماس عند جـ = ظا ل = نهـا $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ إن وجدت
هـ ⟶ ٠

أي أن :
ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة (س، ، د(س،)) يساوى معدل التغير فى د عند س = س،

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ٨٠

خلفية

في الدرس السابق تعرف الطالب على معدل التغير (المشتقة الأولى للدالة) وسوف يتعلم قواعد اشتقاق الدالة حتى يتمكن من إيجاد المشتقة الأولى للدالة بطرق أكثر اختصارًا من طريقة معدل التغير في الدرس السابق.

مخرجات الدرس:

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف المشتقة اليسرى للدالة.
- يتعرف المشتقة اليمنى للدالة.
- يبحث قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة.
- يتعرف العلاقة بين الاتصال والاشتقاق.

مفردات أساسية:

المشتقة الأولى - المشتقة اليسرى - المشتقة اليمنى - الاشتقاق - قابلية الاشتقاق.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - الحاسب الآلي - البرامج الرسومية - حاسبة بيانية.

طرق التدريس المقترحة:

المحاضرة - العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهني - التعلم التعاوني.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من صفحة ٨٠ إلى صفحة ٨٥

التهيئة:

إبدأ مع طلابك من خلال بند فكر وناقش.

ناقش مع طلابك من خلال الرسم الأسئلة المحورية الخاصة لإيجاد ميل القاطع جـ ؤ

- ناقش مع طلابك بند (٢)، (٣)
- توصل إلى التعريف المدون فى ص٨٢

إجراء الدرس:

أشر إلى الطلاب أنه من الرسم يمكن استنتاج أن:

التغير فى الدالة = د(س، + هـ) - د(س،) ويظهر على المحور الرأسى.

- ذكر الطلاب بأن ميل القاطع = $\frac{\text{التغير فى الدالة}}{هـ}$

طا ى = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ وهو مايعرف بمتوسط التغير.

- عندما هـ ⟶ ٠ فإن نقطة د تنطبق على نقطة جـ وبالتالى فإن طاى = طا ل

طا ل = نهـا $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$
هـ ⟶ ٠

وهو مايعرف بالمشتقة الأولى للدالة ويكون ميل المماس لمنحنى الدالة يساوى معدل التغير فى د عند س = س،

PDF Compressor Pro

- اكد إلى الطلاب ما ورد فى بند تعلم الخاص بقابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة تنتمى إلى الفترة المحددة وتكون د`(أ) لها وجود حيث د`(أ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$
- بين إلى الطلاب بأن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للأشتقاق على ح.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

- ناقش مع طلابك ما جاء فى فقرة حاول أن تحل ص(٨١)، (٨٢) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات

(١) ∵ د(١) = ١ - ٤ = - ٣

∴ النقطة أ تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند أ (١، - ٣) = معدل التغير فى د عند أ (١، - ٣)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(١ + هـ)^{٣} - (١)}{هـ} = ٣(١)^{٢} = ٣$

ويكون ظا ل = ٣ ∴ ل = ظا$^{-١}$ (٣) ≃ ٧١ ٣٤°

(٢) ∵ د(س) = ٣س^{٢} + ٤س + ٧

∴ د(س + هـ) = ٣ (س + هـ)^{٢} + ٤ (س + هـ) + ٧

، د(س + هـ) - د(س) = ٦ س هـ + ٣ هـ^{٢} + ٤ هـ

∵ د`(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(٦س + ٤٣ هـ + ٤)}{هـ} = ٦س + ٤$

ميل المماس عند النقطة (- ١، ٦) = ٦(- ١) + ٤ = - ٢

- وضح إلى طلابك مفهوم المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدالة وأكد أن الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة إذا تساوت هاتين المشتقتين عند نفس النقطة.
- ناقش مع طلابك نظرية الاشتقاق والاتصال ووضح العلاقة بينهما.

(٣) مجال د = ح كثيرة حدود

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١ ∴ د(١) = ١

، د(١ + هـ) = (١ + هـ)^{٢} - (١ + هـ) + ١

د(١ + هـ) - د(١) = هـ^{٢} + هـ

∵ د`(١) $= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٢} + هـ}{هـ} = ١ \in$ ح

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ (٢، ٧) تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير فى د عند (س = ٢)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

∴ ميل المماس = $\lim_{هـ \to 0} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٥ - ٧}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{١٢ هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$

ويكون ظا ل = ١٢ ∴ ل = ظا$^{-١}$ (١٢) ≃ ٨٥ ٩٤°

حاول أن تحل

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٤ عند النقطة أ (١، - ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

تعلم الدالة المشتقة *The Derivative Function*

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د ، وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة" أو : المشتقة الأولى للدالة" أو " المعامل التفاضلى الأول"

تذكر

إذا كانت د :] أ، ب [⟶ ع ، س ∈] أ، ب [فإن الدالة المشتقة د`:

د`(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

رموز الدالة المشتقة:

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

ص` أو د` وتقرأ " مشتقة ص" أو " مشتقة د"

$\frac{ء ص}{ء س}$ وتقرأ " دال ص دال س " أو " مشتقة ص بالنسبة إلى س"

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س، د(س)) هو د`(س)

مثال

(٢) أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^{٢} - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (- ٢، ٧)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)^{٢} - (س + هـ) + ١ = س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} - س - هـ + ١ ،

د(س + هـ) - د(س) = (٢س + هـ - ١) هـ

∵ د`(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ ∴ د`(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{(٢س + هـ - ١) هـ}{هـ}$

د`(س) = $\lim_{هـ \to 0} (٢س + هـ - ١)$ د`(س) = ٢س - ١

∵ د(- ٢) = (- ٢)^{٢} - (- ٢) + ١ = ٧ ∴ النقطة (- ٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (- ٢، ٧) = د`(- ٢) = ٢(- ٢) - ١ = - ٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} + ٤س + ٧ فأوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (- ١، ٦)

تعلم قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة *Differentiable at a Point*

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمى إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت د`(أ) لها وجود حيث د`(أ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

و إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة] جـ ، ء [نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

فى مثال (٢) : نجد أن لكل س ∈ ع يوجد مشتقة للدالة د حيث د`(س) = ٢س - ١ ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للاشتقاق على ع

مثال

(٣) أثبت ان د(س) = $\frac{س - ١}{س + ١}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع - {- ١} ∴ د معرفة عند س = ٢ ، د (٢) = $\frac{١}{٣}$

د`(٢) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{٢ + هـ - ١}{٢ + هـ + ١} - \frac{١}{٣}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٣ + ٣هـ - ٣ - هـ}{٣(٣ + هـ)} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٢ هـ}{٣هـ(٣ + هـ)}$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ∈ ع $\frac{٢}{٩}$

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما جاء فى فقره حاول أن تحل (٨٣) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات: فى مثال (٤): د(٢⁺) = د(٢⁻) = ٤ أى أن الدالة متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق.

فى بند تفكير ناقد ص (٨٣)

يؤكد هذا التفكيرعلى العلاقة بين اشتقاق دالة عند نقطة واتصالها عند نفس النقطة.

فى حاول أن تحل ص (٨٣):

الدالة د متصلة حيث د(٢⁺) = د(٢⁻) = - ١ ، الدالة قابلة للأشتقاق كذلك حيث: د(٢⁺) = د (٢⁻) = ٤

فى البند الثانى:

دالة المقياس متصلة عن س = ٢ ولكنها غير قابلة للأشتقاق عند نفس النقطة.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

(٤) ∵ د(س) = { س² - ٥ عندما س > ٢ ؛ ٤س - ٩ عندما س ≤ ٢ }

مجال د = ح ، الدالة معرفة عند س = ٢

حيث د(٢) = ٤(٢) - ٩ = - ١

د′(٢⁻) = نهـا (د(٢ + هـ) - د(٢)) / هـ = نهـا (هـ(٢ + هـ)) / هـ = ٢

د′(٢⁺) = نهـا (د(٢ + هـ) - د(٢)) / هـ

= نهـا (٤ (٢ + هـ) - ٩ - (- ١)) / هـ = ٤

∵ د′(٢⁻) ≠ د′(٢⁺) ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل (٥)

(٥) د(س) = { س² + ٢ عندما س ≤ ١ ؛ ٢س + ١ عندما س > ١ }

ابحث الاتصال عند س = ١

د(١) = (١)² + ٢ = ٣ ، د(١⁺) = ٣ ، د(١⁻) = ٣

∵ د(١⁻) = د(١⁺) = د(١) ∴ نهـا د(س) = د(١)

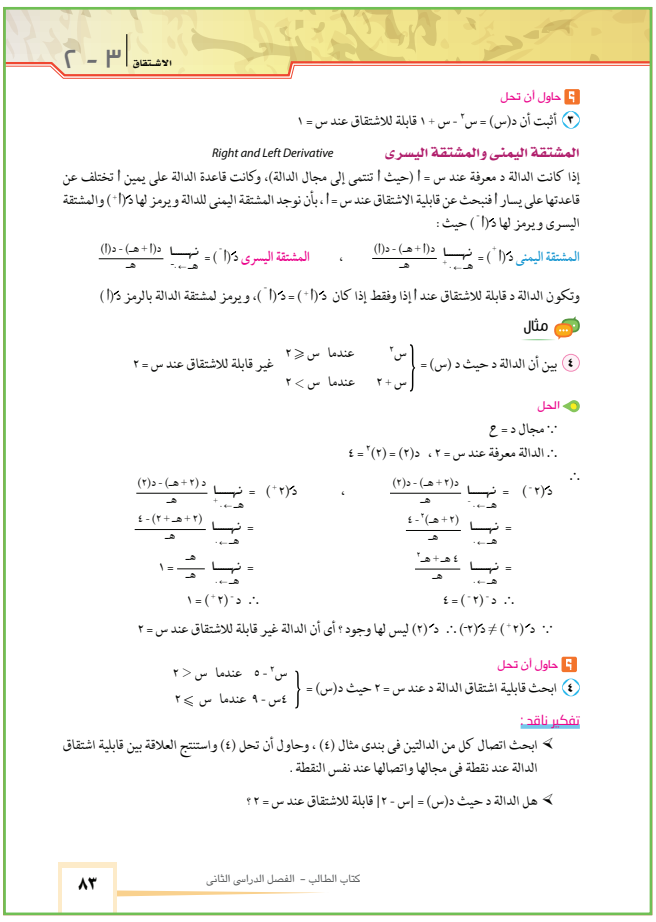
هـ ← ٠

د متصلة عند س = ١ وقد تقبل الاشتقاق

بحث قابلية الاشتقاق

د′(١⁻) = نهـا (د(١ + هـ) - ١ + ٣) / هـ = ٢

هـ ← ٠



حاول أن تحل

(٣) أثبت أن د(س) = س² - س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى *Right and Left Derivative*

إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ (حيث أ تنتمى إلى مجال الدالة)، وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فنبحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ ، بأن نوجد المشتقة اليمنى للدالة و يرمز لها د′(أ⁺) والمشتقة اليسرى و يرمز لها د′(أ⁻) حيث :

المشتقة اليمنى د′(أ⁺) = نهـا (د(أ + هـ) - د(أ)) / هـ ، المشتقة اليسرى د′(أ⁻) = نهـا (د(أ + هـ) - د(أ)) / هـ

وتكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند أ إذا وفقط إذا كان د′(أ⁺) = د′(أ⁻)، و يرمز لمشتقة الدالة بالرمز د′(أ)

مثال

(٤) بين أن الدالة د حيث د (س) = { س² عندما س ≥ ٢ ؛ س + ٢ عندما س < ٢ } غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع

∴ الدالة معرفة عند س = ٢ ، د(٢) = (٢)² = ٤

∴ د′(٢⁻) = نهـا (د(٢ + هـ) - د(٢)) / هـ = نهـا ((٢ + هـ)² - ٤) / هـ

= نهـا (٤ هـ + هـ²) / هـ = نهـا (هـ) / هـ = ١

∴ د′(٢⁻) = ٤

، د′(٢⁺) = نهـا (د(٢ + هـ) - د(٢)) / هـ = نهـا ((٢ + هـ) + ٢ - ٤) / هـ

∴ د′(٢⁺) = ١

∵ د′(٢⁺) ≠ د′(٢⁻) ∴ د′(٢) ليس لها وجود ؟ أى أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل

(٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢ حيث د(س) = { س² - ٥ عندما س > ٢ ؛ ٤س - ٩ عندما س ≤ ٢ }

تفكير ناقد:

- ابحث اتصال كل من الدالتين فى بندى مثال (٤) ، وحاول أن تحل (٤) واستنتج العلاقة بين قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة فى مجالها واتصالها عند نفس النقطة .
- هل الدالة د حيث د(س) = |س - ٢| قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟

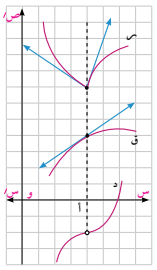
الاشتقاق والاتصال *Derivative and Continuity*

تذكير: إذا كانت الدالة د حيث ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

يوضح الشكل المقابل أن:

١ - اتصال دالة عند نقطة لايعنى بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة كما فى الدالتين ر ، ق

٢ - إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = أ كما فى الدالة د



ملاحظة هامة: عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، يفضل بحث اتصالها عند هذه النقطة أولاً، فإذا كانت متصلة نبحث الاشتقاق و إذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للأشتقاق)

مثال

(٥) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٣ حيث د(س) = { ٢س - ١ عندما س > ٣ ؛ ٧ - س عندما س ≤ ٣ }

الحل

بحث الاتصال عند س = ٣

(١) د(٣) = ٧ - ٣ = ٤

(٢) د(٣⁻) = نهـا (٢ س - ١) = ٥ ، د(٣⁺) = نهـا (٧ - س) = ٤

∵ د(٣⁻) ≠ د(٣⁺) ∴ نهـا د(س) غير موجودة ، د غير متصلة عند س = ٣

∵ د غير متصلة عند س = ٣ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

حاول أن تحل

(٥) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = { س² + ٢ عندما س ≤ ١ ؛ ٢س + ١ عندما س > ١ } عند س = ١

(٦) إذا كانت د(س) = { س² + أ عندما س ≥ ٢ ؛ أس + ب عندما س < ٢ } قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن أ + ب يساوى:

أ ٤ ب - ٤ ج - ٨ د ٨

PDF Compressor Pro

$د'(١^+) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{د(١+هـ)^٢ + ٢ - ٣}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢+هـ)}{هـ} = ٢$

∵ $د'(١^-) = د'(١^+)$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

اكد إلى الطلاب ما جاء فى بند تعلم ص (٨٥) الخاص بقابلية اشتقاق الدالة على فترة مغلقة وناقش معهم مثال (٧) الذى يوضح ذلك.

الأخطاء الشائعة

الخطأ: عند بحث قابلية اشتقاق الدالة

$د(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، س \leqslant ٢ \\ ٢س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

يوجد الطالب: $د'(٢^-) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٢(٢+هـ) + ١ - ٣}{هـ}$

الخطأ: د(٢) = ٥ **الصواب:** لإيجاد: د(٢) = ٣

لأن س = ٢ معرفة فى القاعدة العليا للدالة

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل (٨٥) وتابع إجاباتهم

٦ ∵ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + أ & \text{عندما } س \geqslant ٢ \\ أس + ب & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ د متصلة عند س = ٢ ويكون $د(٢^-) = د(٢^+) = د(٢)$

، ٤ + أ = ٢ أ + ب ∴ أ + ب = ٤

إجابات تمارين الدرس الثانى:

١ $د'(٣) = ٦$ = ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٣، ٤)

٢ $د'(-١) = ١$ ، ل = $ظا^{-١}(١) = ٤٥°$

٣ أ $د'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٣س + ٣هـ + ١} - \sqrt{٣س + ١}}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٣}{\sqrt{٣س + ٣هـ + ١} + \sqrt{٣س + ١}}$

$د'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٣}{٢\sqrt{٣س + ١}}$

ب $د'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{س+هـ} - \frac{١}{س}}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(س+هـ)^{-١} - س^{-١}}{هـ} = -س^{-٢}$

$د'(س) = \frac{-١}{س^٢}$



الاشتقاق | ٣ - ٢

تمـارين (٣ - ٢)

أجب عن مايأتى:

١ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ - ٥ عند س = ٣ وبين المعنى الهندسى لمشتقة الدالة عند س = ٣

٢ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = ١ - ٥س - ٣$س^٢$ عند النقطة (- ١، ٣)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب دقيقة.

٣ أوجد مستخدمًا التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\sqrt{٣س + ١}$ ب د(س) = $\frac{١}{س}$

٤ ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤ - س^٢ & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

٥ أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ حيث

د(س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } س > ٢ \\ أس^٢ + ٨س - ١٠ & \text{عندما } س \leqslant ٢ \end{cases}$

٦ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} أس^٢ + ١ & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ ٤س - ٣ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة

الثابت أ ثم ابحث قابليتها اشتقاق الدالة عند س = ٢

٧ إذا كان د(س) = أ$س^٢$ + ب حيث أ و ب ثابتان أوجد :

أ المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س، ص).

ب قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢، -٣) الواقعة عليه يساوى ١٢.

٨ قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية، وأثبت أن كلًا منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١.

د ج ب أ

٤ د(س) $\begin{cases} ٤ - س^٢ & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

د(١) = ٣ ، $د'(١^-) = د'(١^+) = ٣$

د متصلة عند س = ١ وقد تقبل الاشتقاق

∵ $د'(١^+) = ٢$ ، $د'(١^-) = -٢$

∴ $د'(١^+) \neq د'(١^-)$

لذلك فإن د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

٥ أ = -٢

٦ أ = ١ ، قابلة للاشتقاق عند س = ٢

PDF Compressor Pro

⑦

$د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ا(س + هـ)^٢ + ب - اس^٢ - ب}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢اس هـ + اهـ^٢}{هـ}$

$د'(س) = ٢اس$

$\therefore د'(٢) = ١٢$ $\quad \therefore ٤ا = ١٢$ $\quad \therefore ا = ٣$

النقطة (٢، -٣) تنتمي لمنحنى الدالة

$\therefore د(٢) = -٣$ $\quad \therefore ٤ا + ب = -٣$

ويكون $١٢ + ب = -٣$ $\quad \therefore ب = -١٥$

تمارين إثرائية

① إذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ٢ وكان

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ)}{هـ} = ٥$ فأوجد د(١)، $د'(١)$

② إذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ٢ وكان

$\lim_{هـ \to ٢} \frac{س^٣ د(س) - ٢٤}{س - ٢} =$ صفر فأوجد د(٢)، $د'(٢)$

إجابة التمارين الإثرائية

① $د'(١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ)}{هـ} = ٥$ $\quad \therefore د(١) = ٠$، $د'(١) = ٥$

② $د(٢) = ٣$

$\therefore \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٣ د(س) - ٣س^٣ + ٣س^٣ - ٢٤}{س - ٢} = ٠$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٣ [د(س) - ٣]}{٢ -} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣س^٣ - ٢٤}{س - ٢} = ٠$

$\lim_{هـ \to ٠} س^٣ \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} + ٣ \lim \frac{س^٣ - ٣٢}{س - ٢}$

$٢(٢) \times ٣ - = ٨ \times د'(٢)$

$د'(٢) = \frac{٩ -}{٢}$

PDF Compressor Pro

٣ - ٣ قواعد الاشتقاق

Rules of differentiation

خلفية

سبق أن درس الطالب التغير في قيمة الدالة د حيث ص = د(س) عندما تتغير س من س١ إلى س٢ حيث س٢ > س١ كذلك متوسط هذا التغير ومعدل التغير عند قيمة معينة للمتغير س وكذلك درس المفهوم الهندسي لمعدل التغير

وفي هذا الدرس سوف يدرس الطالب قواعد الاشتقاق للدالة كثيرة الحدود وحاصل ضرب دالتين وقسمة دالتين وقاعدة الاشتقاق لدالة الدالة وذلك باستخدام قواعد الاشتقاق.

مخرجات الدرس:

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}.
- يتعرف مشتقة الدالة د(س) = س.
- يتعرف مشتقة الدالة د(س) = أ س^{ن}.
- يتعرف مجموع دالتين والفرق بينهما.
- يتعرف مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- يتعرف مشتقة خارج قسمة دالتين.
- يتعرف دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- يتعرف مشتقة ص = [د(س)]^{ن}

مفردات أساسية:

المشتقة الأولى - قاعدة السلسلة.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة - طباشير ألوان - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - العصف الذهني - التعلم التعاوني - المناقشة.

مكان التدريس:

الفصل الدراسي.

مصاد التعلم:

كتاب الطالب من ٨٦ إلى ٩٢ ، الشبكة الدولية للمعلومات.



الوحدة الثالثة

قواعد الاشتقاق

٣ - ٣

Rules of Differentiation

استكشف

١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقة الأولى للدالة مشتقة كلاً من :

د(س) = س^{٣} ، د(س) = س^{٥}

٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^{٧} دون استخدام التعريف؟

٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{ن} ؟

تعلم

مشتقة الدالة *Derivative of a Function*

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = ٠

لاحظ أن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

$\therefore \frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$ = صفرًا (هـ ≠ ٠)

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}

إذا كانت ص = س^{ن} حيث: ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = ن س$^{ن-١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = ١

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث: أ ، ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = أ ن س$^{ن-١}$

مثال

١ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

أ ص = - ٣ ب ص = س^{٤} جـ ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ ص = ٧$\sqrt{س^{٣}}$

الحل

أ ∵ ص = - ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٠ ب ∵ ص = س^{٤} ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ س^{٣}

سوف تتعلم

- مشتقة الدالة الثابتة.
- مشتقة د(س) = س^{ن}
- مشتقة د(س) = س
- مشتقة د(س) = أ س^{ن}
- مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما.
- مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- مشتقة خارج قسمة دالتين.
- مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) .
- مشتقة ص = [د(س)]^{ن}.

المصطلحات الأساسية

- المشتقة الأولى — First Derivative
- حاصل ضرب — Product
- خارج قسمة — Quotient
- قاعدة السلسلة — Chain Rule

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب.

التهيئة:

- ابدأ مع طلابك ببند استكشف ص٨٦
- تابع مع طلابك إيجاد د(س) = س^{٣} د(س) = س٥ باستخدام التعريف، ومنها استخدم د(س) = س^{٧}
- ساعد طلابك للوصول إلى قاعدة مشتقة الدالة بدون استخدام التعريف.
- توصل مع طلابك إلى اكتشاف قاعدة لمشتقه الدالة د(س)= س^{ن}.

إجراءات الدرس:

قواعد الاشتقاق:

ناقش مثال(١) ص ٨٦ ثم انتقل إلى بند حاول أن تحل (١) ص ٨٩

إجابات

أ $\frac{د ص}{د س}$ = صفر. ب $\frac{د ص}{د س} = ٣ \times \frac{٤}{٣} \pi$ س^{٢} = ٤ π س^{٢}

جـ ∵ ص = - ٤ س$^{-٥}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢٠ س$^{-٦}$ = $\frac{٢٠}{س^{٦}}$

د ∵ ص = س$^{\frac{٥}{٣}}$ ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{٥}{٣}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$

PDF Compressor Pro

ناقش مع طلابك مفاهيم مشتقات العمليات الآتية:

مجموع دالتين أو الفرق بينهما ثم انتقل بعد ذلك لتعميم عدد محدود من الدوال.

مشتقة حاصل ضرب دالتين

مشتقة خارج قسمة دالتين مع توضيح الشرط اللازم لذلك.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(٨٧)، ص(٩٠) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

(٢) $\frac{د ص}{د س} = ٢٤ س^{٧} - ١٠ س^{٤} + ٦$

ب - ص = ٥س$^{-١}$ + س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\sqrt{٣}$ س - ٤

$\frac{د ص}{د س} = -٥ س^{-٢} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + \sqrt{٣}$

$= -س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢} \sqrt{٣} س + \sqrt{٣}$

(٣) $\frac{د ص}{د س} = (٤س^{٢} - ١)(٢١س^{٢} + ١) + (٧س^{٣} + س) \times ٨ س$

$[\frac{د ص}{د س}]_{س = ١} = (٤ - ١)(٢١ + ١) + (٧ + ١) \times ٨ = ١٣٠$

(٤) ∵ ص = $\frac{س^{٣} + ٢س - ١}{س + ٥}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{(س + ٥)(٣س^{٢} + ٢) - (س^{٣} + ٢ س - ١)}{(س + ٥)^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣س^{٣} + ١٥س^{٢} + ١١}{(س + ٥)^{٢}}$

تمارين إثرائية:

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١- ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س [٦س^{٢} - ٦س + ٢]

٢- ص = س(س^{٣} - ٣س^{٢} + ١) [٤س^{٢} - ٩س^{٢} + ١]

٣- ص = (س - ٣) (س + ٥) [٢س + ٢]

٤- ص = $\frac{٢س + ١}{س + ٣}$ [$\frac{٥}{(س+٣)^{٢}}$]

الأخطاء الشائعة:

الخطأ: عند بحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث

د(س) = { ٢س - ١ ، س ≤ ٢ ؛ ٢ س + ١ ، س > ٢ عند س = ٢

باستخدام قواعد الأشتقاق د$'$(٢$^{+}$) = ٢ ، د$'$(٢$^{-}$) = ٢

وبالتالى فإن: د$'$(٢$^{+}$) = د$'$(٢$^{-}$) = ٢

فالدالة قابلة للاشتقاق



٣ - ٣ قواعد الاشتقاق

ج) ∵ ص = ٥ س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥

د) ∵ ص = $\frac{٣}{س}$ = ٣ س$^{-٢}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = -٦ س$^{-٣}$

هـ) ∵ ص = $\sqrt{س^{٣}}$ = س$^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{س}$ حيث س ≠ ٠

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى:

أ) ص = -٧ ب) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣} ج) ص = $\frac{-٤}{س}$ د) ص = $\sqrt{٧ س^{٣}}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س، فإن ع ± ق تكون أيضًا قابلة بالنسبة إلى س ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع ± ق) = $\frac{د ع}{د س}$ ± $\frac{د ق}{د س}$ وبصفة عامة، فإن:

إذا كانت د$_{١}$، د$_{٢}$، .....، د$_{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$\frac{د}{د س}$ (د$_{١}$ ± د$_{٢}$ ± د$_{٣}$ ± ... ± د$_{ن}$)(س) = د$'_{١}$(س) ± د$'_{٢}$(س) ± د$'_{٣}$(س) ± ... ± د$'_{ن}$(س)

مثال

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى:

أ) ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$ ب) ص = $\frac{\sqrt{٧ س} - ٢ س}{\sqrt{٧ س}}$

الحل

أ) ∵ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ١٢ س^{٥} - ٩ س$^{-١٠}$

ب) ∵ ص = $\frac{\sqrt{٧ س} - ٢ س}{\sqrt{٧ س}}$ = ١ - ٢ $\sqrt{٧ س}$ = ١ - ٢ س$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٠ - ٢ × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = -س$^{-\frac{١}{٢}}$

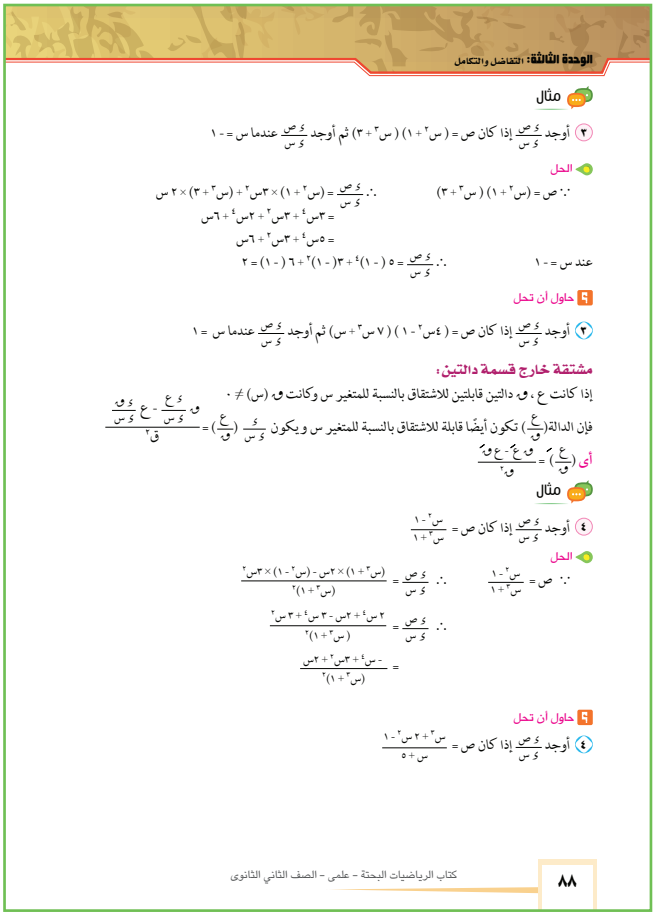
حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ) ص = ٣ س^{٨} - ٢ س^{٥} + ٦س + ١ ب) ص = $\frac{٥}{س}$ + س $\sqrt{٧ س}$ + $\sqrt{٣ س}$ - ٤

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت ع ، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س، فإن الدالة (ع . ق) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{د}{د س}$ (ع . ق) = ع $\frac{د ق}{د س}$ + ق $\frac{د ع}{د س}$



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

مثال

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (س^{٢} + ١) (س^{٢} + ٣) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = -١

الحل

∵ ص = (س^{٢} + ١) (س^{٢} + ٣) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = (س^{٢} + ١) × ٣س^{٢} + (س^{٢} + ٣) × ٢ س

= ٣س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س^{٤} + ٦س

= ٥س^{٤} + ٣س^{٢} + ٦س

عند س = -١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ (-١)^{٤} + ٣(-١)^{٢} + ٦ (-١) = ٢

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (٤س^{٢} - ١) (٧ س^{٣} + س) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت ع ، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت ق (س) ≠ ٠

فإن الدالة ($\frac{ع}{ق}$) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{د}{د س}$ ($\frac{ع}{ق}$) = $\frac{ق \frac{د ع}{د س} - ع \frac{د ق}{د س}}{ق^{٢}}$

أى ($\frac{ع}{ق}$)$'$ = $\frac{ق ع' - ع ق'}{ق^{٢}}$

مثال

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$

الحل

∵ ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(س^{٣} + ١) \times ٢س - (س^{٢} - ١) \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢س^{٤} + ٢س - ٣س^{٤} + ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ١}{س + ٥}$

PDF Compressor Pro

الصواب: استخدام قواعد الأشتقاق فى الحل خطأ لأن الدالة غير متصلة حيث ان:

د(٢⁺) = ٣ ، د(٢⁻) = ٥

فالدالة غير متصلة وبالتالى غير قابلة للأشتقاق.

كذلك: باستخدام التعريف نجد أن:

$$د'(٢) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{د(٢+هـ)+١-٣}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ+٢}{هـ}$$ غير معرفة.

فى بند عمل تعاونى:

- ذكر طلابك بمفهوم تركيب الدوال وأكد على أن:
  (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)
- تواصل مع طلابك لتأكيد مفهوم قاعدة السلسلة.
- درب الطلاب على استخدام مشتقة الدالة [د(س)]ⁿ فى حل التمارين بسرعة وسهولة باستخدام هذه الطريقة.
- توصل مع طلابك إلى منطوق النظرية ص٩١.

التقييم المستمر (المناقشة والحل)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل (٩٠) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

(٥) ∵ ص = (٢س³ - ١)⁴

$$\therefore \frac{ك ص}{ك س} = ٤ (٢س^{٣} - ١)^{٣} \times ٦س^{٢}$$

$$= ٢٤س^{٢} (٢س^{٣} - ١)^{٣}$$

(٦) ∵ ص = ٣ $(\frac{٥}{س})^{٢}$ - ١ = ٧٥ س$^{-٢}$ - ١

$$\frac{ك ص}{ك س} = -١٥٠ س^{-٣} = \frac{-١٥٠}{س^{٣}}$$

التقييم المستمر (المناقشة و الحوار)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص٩٣ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

(٨) أ د'(س) = ٣س^{٢} - ٥ = ٧ ∴ ٣س^{٢} = ١٢

ويكون س = ± ٢

ب د'(س) = ٧ (س - ٥)^{٦} = ٧

(س - ٥)^{٦} = ١ ∴ س - ٥ = ± ١

أى أن س = ٤ أو س = ٦

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (Chain rule)

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

إذا كانت ص = (٣س^{٢} - ١)^{٤} أوجد $\frac{ك ص}{ك س}$

هل تحتاج إلى عمليات حسابية مطولة؟ ، هل وجدت صعوبة فى إيجاد الدالة المشتقة؟

سبق لك دراسة تركيب الدوال وعلمت أن :

(د ∘ ر) (س) = د[ر (س)]

فإذا كان د، ر دالتين حيث ص = د(ع)، ع = د(س) فإن ص = د[ر (س)]

ونقول أن ص دالة الدالة س

نظرية إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، كانت ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

ويكون: $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{ك ص}{ك ع} \times \frac{ك ع}{ك س}$

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

(٥) إذا كانت ص = (س^{٢} - ٣س + ١)^{٥} **فأوجد** $\frac{ك ص}{ك س}$

الحل

بفرض ع = س^{٢} - ٣س + ١ ∴ ص = ع^{٥}

واضح أن ص قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع (كثيرة حدود فى ع) ويكون $\frac{ك ص}{ك ع}$ = ٥ ع^{٤}

وكذلك ع قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س (كثيرة حدود فى س) ويكون $\frac{ك ع}{ك س}$ = ٢ س - ٣ ،

بتطبيق قاعدة السلسلة ∴ $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{ك ص}{ك ع} \times \frac{ك ع}{ك س}$ = ٥ ع^{٢} × (٢س - ٣) ،

بالتعويض عن ع

∴ $\frac{ك ص}{ك س}$ = ٥ (س^{٢} - ٣س + ١)^{٤} × (٢ س - ٣)

حاول أن تحل

(٥) أوجد $\frac{ك ص}{ك س}$ باستخدام قاعدة السلسلة فى عمل تعاونى وتحقق من صحة عملك السابق.

مثال

(٦) إذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = س^{٢} - ٣س + ٢ **فأوجد** $\frac{ك ص}{ك س}$

الحل

∵ ص = ع$^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ك ص}{ك ع} = \frac{١}{٢} ع^{-\frac{١}{٢}}$

∵ ع = س^{٢} - ٣س + ٢ $\frac{ك ع}{ك س}$ = ٢ س - ٣

∴ $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{ك ص}{ك ع} \times \frac{ك ع}{ك س}$ = $\frac{١}{٢} ع^{-\frac{١}{٢}}$ (٢ س - ٣) ∴ $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{١}{٢} (٢ س - ٣) (س^{٢} - ٣س + ٢)^{-\frac{١}{٢}}$

حاول أن تحل

(٦) إذا كانت ص = ٣ع^{٢} - ١ ، ع = $\frac{٥}{س}$ **فأوجد** $\frac{ك ص}{ك س}$

مشتقة الدالة [د(س)]^{ن}

إذا كانت ع = [د(س)]^{ن} حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى ،

فإن: $\frac{ك ع}{ك س}$ = ن [د(س)]$^{ن-١}$ × د'(س)

مثال

(٧) أوجد $\frac{ك ص}{ك س}$ إذا كان

أ ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠} ب إذا كانت ص = $(\frac{س-١}{س+١})^{٥}$

الحل

أ ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}

∴ $\frac{ك ص}{ك س}$ = ١٠ (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩} × $\frac{ك}{ك س}$ (٦س^{٣} + ٣س + ١)

= ١٠ (١٨ س^{٢} + ٣) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}

= ٣٠ (٦ س^{٢} + ١) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}

ب ص = $(\frac{س-١}{س+١})^{٥}$ ∴ $\frac{ك ص}{ك س}$ = ٥ $(\frac{س-١}{س+١})^{٤}$ × $\frac{(س+١) \times ١ - (س-١) \times ١}{(س+١)^{٢}}$

= ٥ $(\frac{س-١}{س+١})^{٤}$ × $\frac{س+١-س+١}{(س+١)^{٢}}$

= $\frac{١٠}{(س+١)^{٢}} \times (\frac{س-١}{س+١})^{٤}$ = $\frac{١٠ (س-١)^{٤}}{(س+١)^{٦}}$

PDF Compressor Pro



٣ - ٣ قواعد الاشتقاق

حاول أن تحل

(٧) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت ص = $(\frac{س^{٢}}{س^{٣}+٢})^{٢}$

مثال

(٨) إذا كان د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س - ٤ أوجد قيم س التي تجعل د'(س) = ٢

الحل

د'(س) = $\frac{١}{٣}$ × ٣س^{٢} - ٢ × ٢ س + ٥ × ١

= س^{٢} - ٤ س + ٥

عندما د'(س) = ٢ ∴ س^{٢} - ٤س + ٥ = ٢ ويكون س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠

∵ (س - ١) (س - ٣) = ٠ ∴ س = ١ أو س = ٣

حاول أن تحل

(٨) أوجد قيم س التي تجعل د'(س) = ٧ في كل مما يأتي:

أ د(س) = س^{٣} - ٥ س + ٢ ب د(س) = (س - ٥)^{٧}

تمـــارين (٣ - ٣)

أكمل كلًّا مما يأتي:

(١) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{س^{٢}}$) = ... (٢) $\frac{د}{د س}$ (٥ π) = ...

(٣) $\frac{د}{د س}$ (س$^{\frac{٤}{٥}}$) = ... (٤) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$) = ...

(٥) $\frac{د}{د س}$ (٥س^{٢} + ٣ س + ٢) = ... (٦) $\frac{د}{د س}$ ($\sqrt{٣}$ س^{٧} - $\frac{س^{٥}}{٥}$ + π) = ...

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية بالنسبة إلى س.

(٧) ص = ٢س^{٦} + ٣$\sqrt{س}$ (٨) ص = $\frac{٤س^{٢}-٣س+٢\sqrt{س}}{س}$

(٩) ص = س (٣س^{٢} - $\sqrt{س}$) (١٠) ص = $\frac{٤س^{٢}-س+٣}{\sqrt[٧]{س}}$

(١١) ص = (س - ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) (س^{٤} + ١) (س^{٨} + ١) (س^{١٦} + ١)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية

(١٢) ص = (س^{٣} + ٣) (س^{٣} - ٣س + ١) (١٣) ص = (س^{٢} - $\sqrt{س}$) (س^{٢} + ٢ $\sqrt{س}$)



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

(١٤) ص = (٢ س^{٤} - ٣س + ٤) (س^{٣} - $\sqrt{س}$ + $\frac{٢}{س}$) (١٥) ص = $\frac{٥س-٢}{٥س+١}$

(١٦) ص = $\frac{س^{٢}+٢س+٥}{س^{٣}-٥س+١}$ (١٧) ص = $\frac{س-٢}{س+٥}$

(١٨) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٢ لكل مما يأتي:

أ ص = (س^{٣} + س - ٩)^{٥} ب ص^{٣} = ٣س^{٢} - ٤

ج ص = $\sqrt[٣]{(٢س^{٣}+٤س+٣)^{٢}}$ د ص = ع^{٣} ، ع = ٣س^{٢} - ٢

هـ ص = ٢ع^{٣} ، ع = ٨ س - ١١ و ص = $\frac{ع-١}{ع+١}$ ، ع = $\frac{س+١}{س-١}$

(١٩) إذا كان ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}، $\frac{د ص}{د س}$ = ٨ عندما س = ١، وكان متوسط تغير ص عندما تتغير س من - ١ إلى ٢ يساوي ٧ أوجد قيمتي الثابتين أ ، ب.

(٢٠) أوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقط المبينة في كل مما يأتي:

أ ص = ($\frac{س^{٢}-٢}{س+٣}$)^{٧} عند س = ٠ ب ص = (س^{٢} + ١)^{٥} (س^{٢} - س + ١)^{٤} عند س = ١

نشاط

(٢١) الربط بالحجوم يصب زيت بمعدل ١٠سم^{٣}/ث في برميل أسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠سم.
أوجد معدل ارتفاع الزيت في البرميل.

تفكير إبداعي

(٢٢) أوجد $\frac{د}{د س}$ (ص^{ن})

(٢٣) إذا كانت ص = ٣ع^{٢} + ١ ، ع = $\sqrt{س^{٢}-٢}$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$ هل أحد الحلين الآتيين خطأ أم كلاهما صحيح.

الحل الأول

ص = ٣ع^{٢} + ١

ع = $\sqrt{س^{٢}-٢}$

وبالتعويض نجد أن

ص = ٣س^{٢} - ٥

$\frac{د ص}{د س}$ = ٦س

الحل الثاني

∵ ص = ٣ع^{٢} + ١ ∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = ٦ ع

ع = (س^{٢} - ٢)$^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{د ع}{د س}$ = $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} - ٢)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢س = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-٢}}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$

= ٦ $\sqrt{س^{٢}-٢}$ × $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-٢}}$ = ٦س

إجابات بعض تمارين (٣-٣):

(١) $\frac{-٣}{س^{٤}}$ (٢) صفر (٣) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ (٤) $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٤}}}$

(٥) ١٠ س + ٣

(٦) ٧ $\sqrt[٢]{س^{٦}}$ - س^{٤}

(٩) ٩س^{٢} - $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٨]{س^{٣}}$

(١٠) $\frac{(٣س^{٢}-س-٣)\sqrt[٨]{س}}{٢س^{٢}}$

(١٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٤س^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ س $\sqrt[٧]{س}$ - ٢

(١٤) (س^{٥} + $\frac{٢}{س}$) (٨س^{٣} - ٣)

(١٥) $\frac{١٥}{(٥س+١)^{٢}}$

(١٦) $\frac{-٧س^{٢}-٨س+٢٧}{(س^{٢}-٥س+١)^{٢}}$

(١٧) $\frac{٧}{(س+٥)^{٢}}$

(١٨) أ ٦٥ ب ١ ج $\frac{٥٦}{٩}$ د ٢٤٠ هـ ١٢٠٠ و $\frac{١}{٤}$

(٢٠) أ ٧ ب ٣٢

(٢١) حجم البرميل الأسطواني الشكل ح = π ن^{٢} ع
حيث ن طول نصف قطر قاعدته ، ع أرتفاعه

∵ ن = ٩٠سم ∴ ح = ٨١٠٠ π ع

∵ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{د ح}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د ن}$

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = ٨١٠٠ π × $\frac{د ع}{د ن}$

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = ١٠سم^{٣}/ث

∴ $\frac{د ع}{د ن}$ = $\frac{١}{٨١٠٠\pi}$ سم/ث

معدل ارتفاع الزيت في البرميل ≃ ٠,٠٠٤ سم/ث

(٢٢) $\frac{د}{د س}$ [ص^{ن}] = ن ص$^{ن-١}$ $\frac{د ص}{د ن}$

(٢٣) **اكتشف الخطأ**

- ناقش مع طلابك الحلان المذكوران في التمرين.
- دون إستجاباتهم المختلفة.
- توصل مع طلابك إلى اكتشاف الخطأ. أن وجد.

الإجابة: الحلان صحيحان.

PDF Compressor Pro

٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of trigonometric functions

خلفية

سبق أن درس الطالب قواعد الاشتقاق لدوال كثيرات الحدود والدوال الكسريه، وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب قواعد إشتقاق الدوال المثلثية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد المشتقة الأولى للدوال المثلثية ص = حا س، ص = حتا س، ص = طا س.

مفردات أساسية

مشتقة دالة مثلثية.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - جهاز عرض - شفافيات - آلة حاسبة بيانية - برنامج رسوميات بالحاسوب.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة (العرض المباشر) - المناقشة - العصف الذهنى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ٩٣ إلى صفحة ٩٨

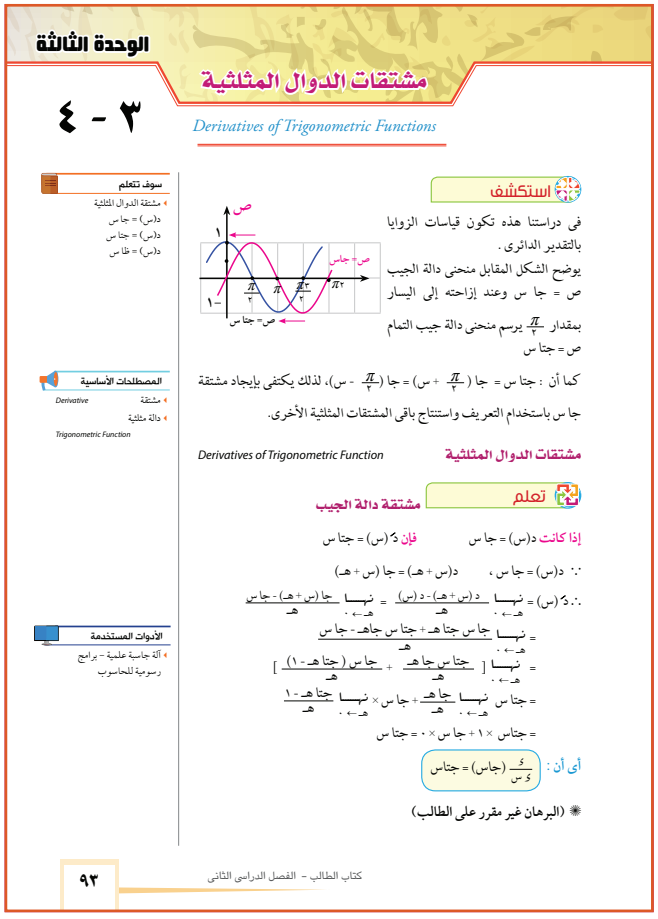
التهيئة

- وضع للطلاب منحنى دالة الجيب ودالة جيب التمام من خلال بند استكشف ص(٩٣).

إجراءات الدرس

ناقش مع طلابك بند استكشف ص٩٣ ومنه انتقل إلى قواعد الاشتقاق فى بند تعلم حيث:

$\frac{د}{د س}$ (حا س) = حتا س



الوحدة الثالثة

مشتقات الدوال المثلثية

٣ - ٤

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم
- مشتقة الدوال المثلثية
- د(س) = جا س
- د(س) = جتا س
- د(س) = ظا س

استكشف

في دراستنا هذه تكون قياسات الزوايا بالتقدير الدائرى.

يوضح الشكل المقابل منحنى دالة الجيب ص = جا س وعند إزاحته إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$ يرسم منحنى دالة جيب التمام ص = جتا س

كما أن : جتا س = جا ($\frac{\pi}{2}$ + س) = جا ($\frac{\pi}{2}$ - س)، لذلك يكتفى بإيجاد مشتقة جا س باستخدام التعريف واستنتاج باقى المشتقات المثلثية الأخرى.

المصطلحات الأساسية
- مشتقة *Derivative*
- دالة مثلثية *Trigonometric Function*

مشتقات الدوال المثلثية *Derivatives of Trigonometric Function*

تعلم

مشتقة دالة الجيب

إذا كانت د(س) = جا س فإن د'(س) = جتا س

∵ د(س) = جا س ، د(س + هـ) = جا (س + هـ)

∴ د'(س) = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{جا(س+هـ) - جا س}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{جا س جتا هـ + جتا س جا هـ - جا س}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ [$\frac{جتا س جا هـ}{هـ}$ + $\frac{جا س (جتا هـ - ١)}{هـ}$]

= جتا س $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{جا هـ}{هـ}$ + جا س × $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{جتا هـ - ١}{هـ}$

= جتا س × ١ + جا س × ٠ = جتا س

أى أن : $\frac{د}{د س}$ (جا س) = جتا س

(البرهان غير مقرر على الطالب)

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

٩٣ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

$\frac{د}{د س}$ (حتا س) = - حا س

$\frac{د}{د س}$ (طا س) = قا^{٢} س

فى بند تعلم:

برهان مشتقة الدالة المثلثية غير مقرر على الطالب و يعطى فقط للطلاب الفائقين.

ذكر الطلاب بالأتى:

- استخدام التعريف فى إيجاد المشتقة الأولى للدالة.
- متطابقات الدول المثلثية لمجموع وفرق زاويتين.
- نظريات النهايات

اكد الى طلابك على المفاهيم الآتية:

إذا كانت ص = حا س

فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = حتا س

بينما:

إذا كانت ص = حا ع فإن:

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د}{د س}$ حا ع

= $\frac{د ع}{د س}$ حتا ع

PDF Compressor Pro

٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية

اشر إلى طلابك بأنه فى مثال (١) (جـ) يمكن إيجاد المشتقة الأولى للدالة بطريقتين.

الأولى: إيجاد مشتقتين للدالة ثم استخدام مفهوم دالة الدالة ثم قاعدة السلسلة والتعويض وهى طريقة تفصيلية توضح المفاهيم الرياضية.

الثانية: استخدام قاعدة التعميم ص (٩٤) مباشرة وهى طريقة أسهل وتعتمد ايضًا على مفهوم قاعدة السلسلة. وللطالب حرية اختيار احدى الطريقتين.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلاك ما ورد فى بند حاول أن تحل (٩٤)، (٩٥) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

(١) أ) ص = س^{٢} + حا س $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س + حتا س

ب) ص = حا $\frac{\pi}{٢}$ - ٧ حا س $\frac{د ص}{د س}$ = - ٧ حتا س

جـ) ص = ٥ حا (٣ - ٢س)

بفرض ص = ٥ حا ع حيث ع = ٣ - ٢س

$\therefore \frac{د ص}{د ع}$ = ٥ حتا ع ، $\frac{د ع}{د س}$ = - ٢

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س}$ قاعدة السلسلة

$\therefore \frac{د ص}{د س}$ = ٥ حتا ع × - ٢ = - ١٠ حتا (٣ - ٢س)

(٢) أ) ص = ٢ طا ٣ س $\therefore \frac{د ص}{د س}$ = ٢ قا^{٢}س × ٣ = ٦قا^{٢}س

ب) ص = ٢ حتا (٤ - ٣س^{٢})

$\frac{د ص}{د س}$ = - ٢ حا (٤ - ٣س^{٢}) × - ٦س

= ١٢ س حا (٤ - ٣س^{٢})

جـ) ص = ٢ حا س حتا س = حا ٢س

$\frac{د ص}{د س}$ = حتا ٢ س × ٢ = ٢ حتا ٢ س

د) ص = ٢س طا س

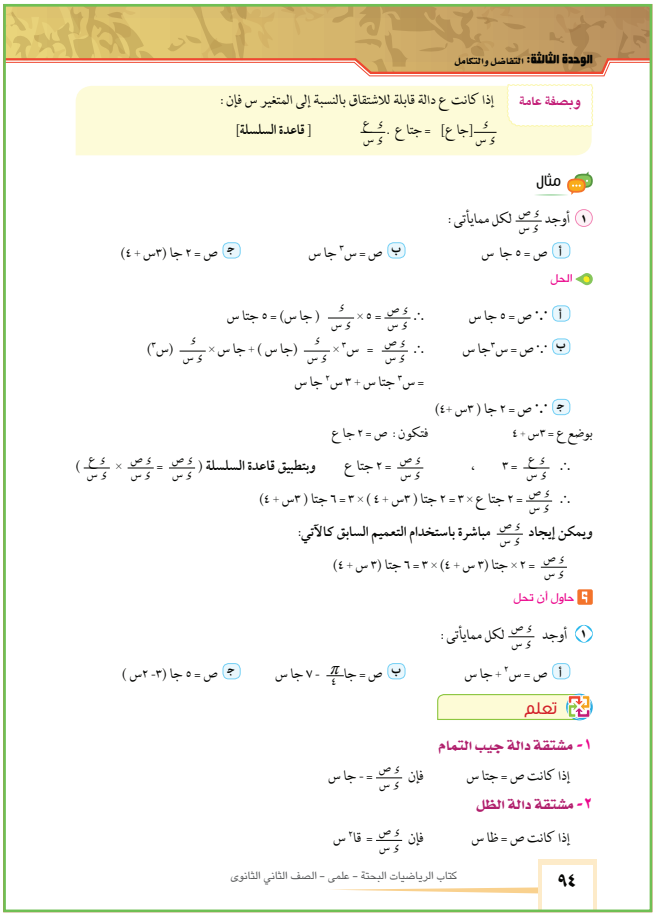
$\frac{د ص}{د س}$ = ٢س قا^{٢} س + ٢ طا س

هـ) ص = طا^{٢} ٣س

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ طا٣ س × قا^{٢}٣س×٣ = ٦ طا٣س قا^{٢} ٣س

و) ص = طا٤س^{٣}

$\frac{د ص}{د س}$ قا^{٢} ٤س^{٣} ×١٢س^{٢} = ١٢س^{٢} قا^{٢} ٤س^{٣}



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

وبصفة عامة

إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإن :

$\frac{د}{د س}$[جا ع] = جتا ع $\frac{د ع}{د س}$ [قاعدة السلسلة]

مثال

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتى :

أ) ص = ٥ جا س ب) ص = س^{٣} جا س جـ) ص = ٢ جا (٣س + ٤)

الحل

أ) ∵ ص = ٥ جا س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ × $\frac{د}{د س}$ (جا س) = ٥ جتا س

ب) ∵ ص = س^{٣} جا س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = س^{٣} × $\frac{د}{د س}$ (جا س) + جا س × $\frac{د}{د س}$ (س^{٣})

= س^{٣} جتا س + ٣ س^{٢} جا س

جـ) ∵ ص = ٢ جا (٣س + ٤)

بوضع ع = ٣س + ٤ فتكون : ص = ٢ جا ع

∴ $\frac{د ع}{د س}$ = ٣ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ع وبتطبيق قاعدة السلسلة ($\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د ع}{د س}$)

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ع × ٣ = ٢ جتا (٣ س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣ س + ٤)

ويمكن إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ مباشرة باستخدام التعميم السابق كالآتي:

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ × جتا (٣ س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣ س + ٤)

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتى :

أ) ص = س^{٢} + جا س ب) ص = جا $\frac{\pi}{٤}$ - ٧ جا س جـ) ص = ٥ جا (٣ - ٢س)

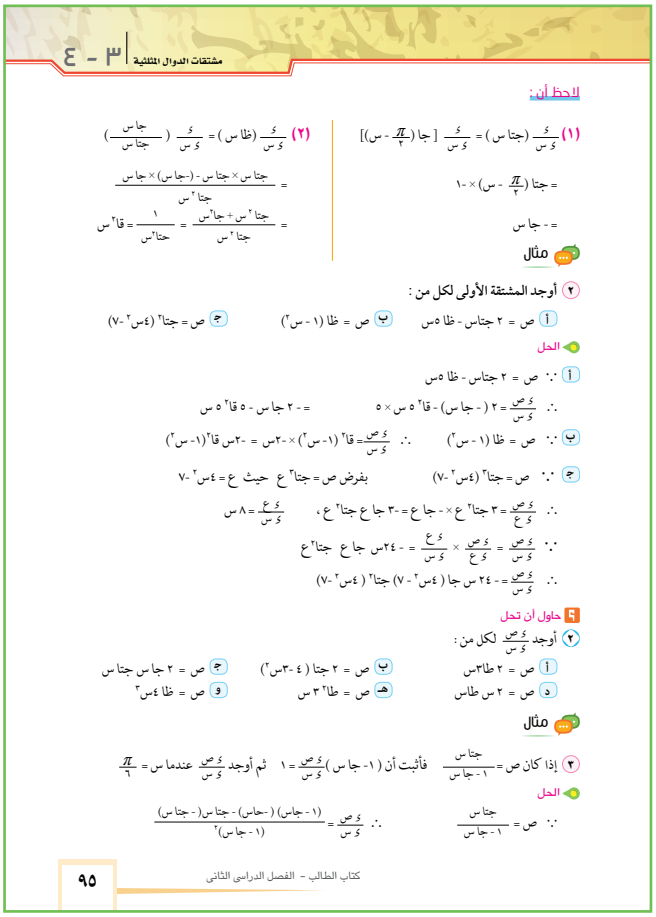
تعلم

١ - مشتقة دالة جيب التمام

إذا كانت ص = جتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = - جا س

٢ - مشتقة دالة الظل

إذا كانت ص = ظا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} س



٣ - ٤ مشتقات الدوال المثلثية

لاحظ أن:

(١) $\frac{د}{د س}$ (جتا س) = $\frac{د}{د س}$ [جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)]

= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) × - ١

= - جا س

(٢) $\frac{د}{د س}$ (ظا س) = $\frac{د}{د س}$ ($\frac{جا س}{جتا س}$)

= $\frac{جتا س \times جتا س - (-جا س) \times جا س}{جتا^{٢} س}$

= $\frac{جتا^{٢} س + جا^{٢} س}{جتا^{٢} س} = \frac{١}{حتا^{٢} س}$ = قا^{٢} س

مثال

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل من :

أ) ص = ٢ جتاس - ظا ٥س ب) ص = ظا (١ - س^{٢}) جـ) ص = جتا^{٢} (٤س^{٢} -٧)

الحل

أ) ∵ ص = ٢ جتاس - ظا ٥س

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (- جا س) - قا^{٢} ٥ س × ٥ = - ٢ جا س - ٥ قا^{٢} ٥ س

ب) ∵ ص = ظا (١ - س^{٢}) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} (١ - س^{٢}) × - ٢س = - ٢س قا^{٢}(١ - س^{٢})

جـ) ∵ ص = جتا^{٢} (٤س^{٢} -٧) بفرض ص = جتا^{٢} ع حيث ع = ٤س^{٢} -٧

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = ٣ جتا^{٢} ع × - جا ع = - ٣ جا ع جتا^{٢} ع ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٨ س

∵ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = - ٢٤س جا ع جتا^{٢} ع

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - ٢٤ س جا (٤س^{٢} - ٧) جتا^{٢} (٤س^{٢} -٧)

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من :

أ) ص = ٢ طا٣س ب) ص = ٢ جتا (٤ -٣س^{٢}) جـ) ص = ٢ جا س جتا س

د) ص = ٣ س طاس هـ) ص = طا^{٢} ٣ س و) ص = ظا ٤س^{٣}

مثال

(٣) إذا كان ص = $\frac{جتا س}{١ - جا س}$ فأثبت أن (١ - جا س) $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = $\frac{\pi}{٦}$

الحل

∵ ص = $\frac{جتا س}{١ - جا س}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(١ - جا س)(-حا س) - (جتا س)(-جتا س)}{(١ - جا س)^{٢}}$

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل (٩٦) وتوصل معهم الى الإجابات الصحيحة.

إجابات:

(٣) ص = ٢س حا س حتا س = س حا ٢س

$\frac{د ص}{د س}$ = ١ × حا ٢س + س × حتا ٢ س × ٢

= حا ٢ س + ٢ س حتا ٢ س

معالجة بعض القضايا المرتبطة بالبيئة

(٤) أ معدل تغير ص بالنسبة إلى س = $\frac{د ص}{د س}$

∵ ص = حا٢ س - حتا ٢ س - ٤س ، حتا ٢ س = ١ - ٢ حا٢ س

∴ ص = ٣ حا٢س - ٤س - ١

$\frac{د ص}{د س}$ = ٦ حا س حتا س - ٤ = ٣ حا ٢ س - ٤

ب عندما $\frac{د ص}{د س}$ = - ١ ∴ حا ٢ س = ١ ، س = $\frac{\pi}{٤}$

فى بند تفكير إبداعى ص٩٩:

أ ص = حا (ط٣س) تهدف إلى التأكيد علي المفهوم

$\frac{د}{د س}$ [حا ع] = حتا ع. $\frac{د ع}{د س}$

لذلك فإن:

$\frac{د ص}{د س}$ = - حتا (ط٣س) × $\frac{د}{د س}$ (ط٣س)

= - ٣ حتا (ط٣س) قا٢ ٣س

كما يمكن استخدام مفهوم دالة الدالة حيث:

ع = ط ٣س	ص = حا ع
$\frac{د ع}{د س}$ = ٣ قا٢ ٣س	$\frac{د ص}{د ع}$ = - حتا ع

∵ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$

= - ٣ حتا (طاس) × قا٢ ٣س

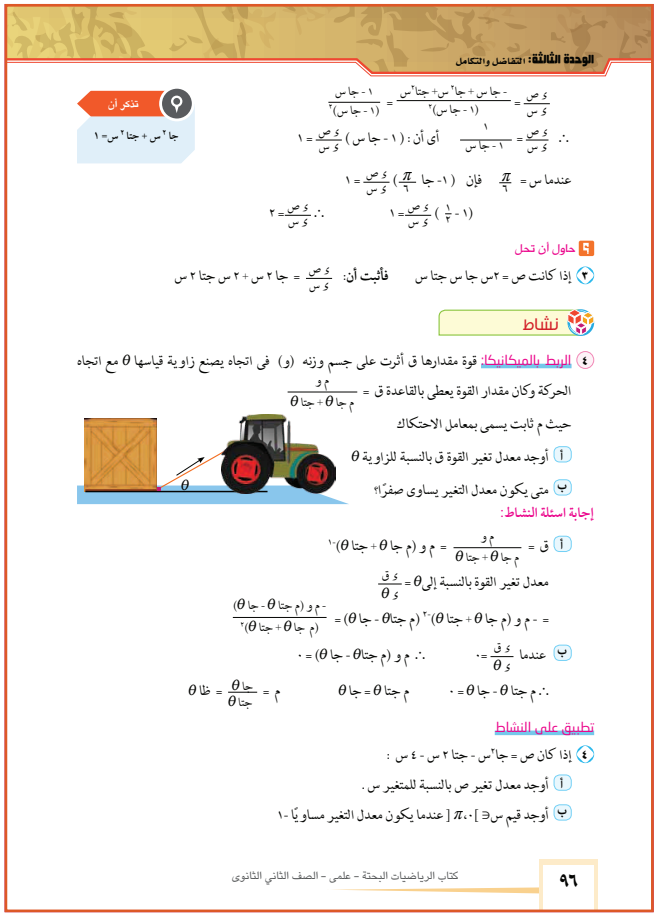
ب لإيجاد الاشتقاق يجب أن تكون س مقاسه بالدائرى (الراديان)

ص = حا $\frac{س}{\pi}$ لذلك فإن $\frac{د ص}{د س}$ = - $\frac{١}{\pi}$ حتا $\frac{س}{\pi}$

إجابات تمارين (٣-٤)

(١) د (٢) جـ (٣) ب (٤) جـ

(٥) - حا س - حتا س (٦) ٦س قا٢ ٣س٢



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{- جا س + د جتا^٢ س}{(١ - جا س)^٢}$ = $\frac{١ - جا س}{(١ - جا س)^٢}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{١ - جا س}$ أى أن : (١ - جا س) $\frac{د ص}{د س}$ = ١

عندما س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن (١ - جا $\frac{\pi}{٦}$) $\frac{د ص}{د س}$ = ١

($\frac{١}{٢}$ - ١) $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢

تذكر أن

جا٢س + جتا٢س = ١

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت ص = ٢س جا س جتا س فأثبت أن: $\frac{د ص}{د س}$ = جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

نشاط

(٤) الربط بالميكانيكا: قوة مقدارها ق أثرت على جسم وزنه (و) فى اتجاه يصنع زاوية قياسها θ مع اتجاه الحركة وكان مقدار القوة يعطى بالقاعدة ق = $\frac{م و}{م جا θ + جتا θ}$

حيث م ثابت يسمى بمعامل الاحتكاك

أ أوجد معدل تغير القوة ق بالنسبة للزاوية θ

ب متى يكون معدل التغير يساوى صفرًا؟

إجابة اسئلة النشاط:

أ ق = $\frac{م و}{م جا θ + جتا θ}$ = م و (م جا θ + جتا θ)^-١

معدل تغير القوة بالنسبة إلى θ = $\frac{د ق}{د θ}$

= - م و (م جا θ + جتا θ)^-٢ (م جتا θ - جا θ) = $\frac{- م و (م جتا θ - جا θ)}{(م جا θ + جتا θ)^٢}$

ب عندما $\frac{د ق}{د θ}$ = ٠ ∴ م و (م جتا θ - جا θ) = ٠

∴ م جتا θ - جا θ = ٠ م جتا θ = جا θ م = $\frac{جا θ}{جتا θ}$ = ظا θ

تطبيق على النشاط

(٤) إذا كان ص = جا٢س - جتا ٢ س - ٤ س :

أ أوجد معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س .

ب أوجد قيم س ∈]٠، π[عندما يكون معدل التغير مساويًا ١٠

كتاب الرياضيات البحتة - علمى - الصف الثانى الثانوى ٩٦

(٧) صفر (٨) صفر

(٩) - س حا س + حتا س (١٠) حتاس

(١١) ٤ حتا (٤س + ٧) (١٢) ٢س حتا (س٢ + ٣)

(١٣) - ٥ حا (٥س + ٣) (١٤) ٦ قا٢ (٢س + ٣)

(١٥) - ١٠س قا٢ (- ٥س٢ + ١٩)

(١٦) $\frac{د ص}{د س}$ = حتا (حتا ٢س) × ٢ حتا س × - حاس

= - حا س حتا س حتا (حتا ٢س)

= - حا ٢س حتا (حتا ٢س)

(١٧) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{س قا٢ س - ط س}{س٢}$

(١٨) $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س حتا (٣ س - ٢) + حا (٣س - ٢)

(١٩) $\frac{د ص}{د س}$ = - س ط س قاس - قاس

(٢٠) $\frac{د ص}{د س}$ = ٤س٣ حتا (٢س٢ + ٥) + ٢س حا (٢س٢ + ٥)

(٢١) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(١ + حتا س) × حتا س - حا س × - حاس}{(١ + حتا س)^٢}$

= $\frac{حتا س + ١}{(١ + حتا س)^٢}$ = $\frac{١}{١ + حتا س}$

(٢٢) ص = قا٢ س - ١ = ط٢س $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ ط اس قا٢ س

PDF Compressor Pro



مشتقات الدوال المثلثية ٣ - ٤

تفكير إبداعي: أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان

أ) ص = جا (ط٣ س)

ب) ص = جا س حيث س مقيسه بالتقدير الستيني

تمارين (٣ - ٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كانت : ص = جا (٢ س+٥) فإن ص' =

أ) ٢ جتا ٢س ب) - ٢ جتا ٢ س جـ) جتا (٢ س + ٥) د) ٢ جتا (٢ س+٥)

٢) إذا كانت ص = ٣س - جتا ٢ س فإن ص' =

أ) ٣ - جا ٢ س ب) ٣ + جا ٢ س جـ) ٣ + ٢ جا ٢ س د) ٣ - ٢ جا ٢ س

٣) إذا كانت ص = ٣ جتا (٢ - ٤س) فإن ص' =

أ) ٤ جا (٢ - ٤س) ب) ١٢ جا (٢ - ٤س) جـ) - ٦ جا (٢ - ٤س) د) - ١٢ جا (٢ - ٤س)

٤) إذا كانت د(س) = ظا (٥س - π) فإن د' ($\frac{\pi}{٤}$) =.....

أ) ٥ ب) ٥ $\sqrt{٣}$ جـ) ١٠ د) ١٠ $\sqrt{٣}$

أكمل كلًّا مما يأتي:

٥) $\frac{د}{د س}$ (جتا س - جا س) = ...

٦) $\frac{د}{د س}$ (ط٣ س^{٢}) = ...

٧) $\frac{د}{د س}$ (جتا^{٢} π) = ...

٨) $\frac{د}{د س}$ (جتا^{٢} س + جا^{٢} س) = ...

٩) $\frac{د}{د س}$ (س جتا س) = ...

١٠) أوجد نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{جا س - جا ١}{س - ١}$ = ...

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

١١) ص = جا (٤س + ٧)

١٢) ص = جا (س^{٢} + ٣)

١٣) ص = جتا (٥س + ٣)

١٤) ص = ٣ ظا (٢س + ٣)

١٥) ص = ظا (- ٥س^{٢} + ١٩)

١٦) ص = جا (حتا^{٢}س)

١٧) ص = $\frac{\text{ظا س}}{س}$

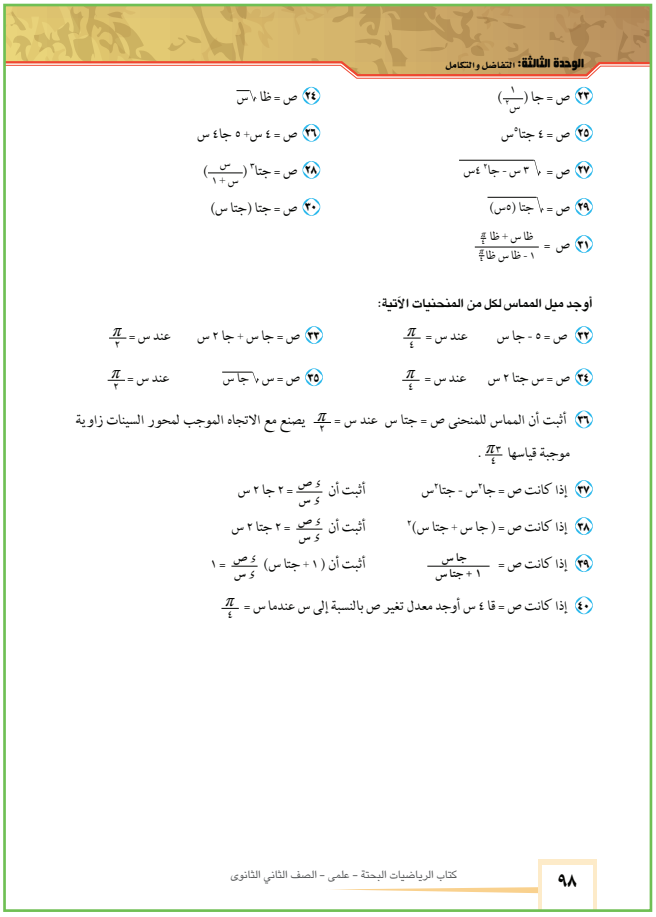
١٨) ص = س جا (٣ س - ٢)

١٩) ص = $\frac{س}{\text{جتا س}}$

٢٠) ص = س^{٢} جا (٣س^{٢} + ٥)

٢١) ص = $\frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$

٢٢) ص = قا^{٢}س - ١



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

٢٣) ص = جا ($\frac{١}{س^{٢}}$)

٢٤) ص = ظا $\sqrt{س}$

٢٥) ص = ٤ جتا^{٣}س

٢٦) ص = ٤ س + ٥ جا ٤ س

٢٧) ص = $\sqrt{٣ - \text{جا}^{٢} ٤س}$

٢٨) ص = جتا^{٣} ($\frac{س}{س + ١}$)

٢٩) ص = $\sqrt{\text{جتا (٥س)}}$

٣٠) ص = جتا (حتا س)

٣١) ص = $\frac{ظا س + ظا \frac{\pi}{٤}}{١ - ظا س ظا \frac{\pi}{٤}}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية:

٣٢) ص = ٥ - جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

٣٣) ص = جا س + جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٣٤) ص = س جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

٣٥) ص = س $\sqrt{\text{جا س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٣٦) أثبت أن المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$.

٣٧) إذا كانت ص = جا^{٣}س - جتا^{٣}س أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جا ٢ س

٣٨) إذا كانت ص = (جا س + جتا س)^{٢} أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جتا ٢ س

٣٩) إذا كانت ص = $\frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$ أثبت أن (١ + جتا س) $\frac{د ص}{د س}$ = ١

٤٠) إذا كانت ص = قا ٤ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٢٣) $\frac{د ص}{د س}$ = حتا ($\frac{١}{س^{٢}}$) × ٢س - ٣ = $\frac{-٢}{س^{٣}}$ حتا ($\frac{١}{س^{٢}}$)

٢٤) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ قا^{٢} $\sqrt{س}$

٢٥) $\frac{د ص}{د س}$ = - ٢٠ حتا^{٤} س حا س

٢٦) $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ + ٢٠ حتا ٤ س

٢٧) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣ - ٢ \text{ حا ٤س حتا ٤ س}}{٢\sqrt{٣س - \text{حا}^{٢} ٤س}}$ = $\frac{٣ - \text{حا ٨ س}}{٢\sqrt{٣س - \text{حا}^{٢} ٤س}}$

٢٨) بفرض ص = حتا^{٣}ع ، ع = $\frac{٣}{س + ١}$

$\frac{د ص}{د ع}$ = - ٣ حتا^{٢}ع حا ع ، $\frac{د ع}{د س}$ = $\frac{-س + ١ - س}{(س + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-٣}{٢(س + ١)}$ حا ($\frac{س}{س + ١}$) حتا^{٢} ($\frac{س}{س + ١}$)

٢٩) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{- ٥ \text{ حا (٥س)}}{٢\sqrt{\text{حتا (٥س)}}}$

٣٠) $\frac{د ص}{د س}$ = - حا (حتا س) × - حاس

= حا س حا (حتا س)

٣١) $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} ($\frac{\pi}{٤}$ - س)

٣٢) $\frac{-٢}{٢\sqrt{}}$ ٣٣) - ٢ ٣٤) $\frac{\pi}{٢}$ - ٣٥) - ١

٣٦) المماس يصنع مع محور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$

٣٧) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ حا س × حتا س - ٢ حتا س × - حا س

= ٤ حا س حتا س = ٢ حا ٢ س

٣٨) $\frac{د ص}{د س}$ = حا^{٢} س + ٢ حاس حتا س + حتا^{٢}س = ١ + حا ٢ س

= حتا^{٢} س × ٢ = ٢ حتا ٢ س

٣٩) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(١ + \text{حتا س}) \times \text{حتا س} - \text{حا س} \times - \text{حاس}}{(١ + \text{حتا س})^{٢}}$

= $\frac{\text{حتا س} + \text{حتا}^{٢}\text{س} + \text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{قتا س})^{٢}}$ = $\frac{\text{حتا س} + ١}{(١ + \text{قتا س})^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{١ + \text{حتا س}}$ بالضرب التبادلي

(١ + حتاس) $\frac{د ص}{د س}$ = ١

٤٠) ص = قا ٤ س = $\frac{١}{\text{حتا ٤س}}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٠ - (- \text{حا ٤س} \times ٤)}{\text{حتا}^{٢} ٤س}$ = $\frac{٤ \text{ حا ٤ س}}{\text{حتا}^{٢} ٤س}$

[$\frac{د ص}{د س}$]$_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{٤ \text{ حا } \pi}{\text{حتا}^{٢} \pi}$ = صفر

PDF Compressor Pro

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة

Application of the derivative

خلفية

سبق أن درست أن ميل المماس للمنحنى الممثل للدالة ص = د(س) عند النقطة (س١، ص١) هو قيمة المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة، ويسمى ميل المماس عند هذه النقطة بميل المنحنى، أى أن:

ميل المماس أو ميل المنحنى عند النقطة (س١، ص١)

$$= \frac{ى ص}{ى س} (س١، ص١)$$

فإذا كان $(\frac{ى ص}{ى س})_{(س١، ص١)}$ موجبًا فإن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، وإذا كان سالبًا فإن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، وإذا كان مساويًا للصفر فإن المماس يوازى محور السينات.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة.
- يوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة.
- يوجد معادلتا المماس والعمودى لمنحنى
- يحل تطبيقات حياتية على المشتقة الأولى.

مفردات اساسية

ميل المماس - ميل العمودى - الإزاحة - السرعة - العجلة.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض - شفافيات - آلة حاسبة بيانية - برنامج رسوميات بالحاسوب.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة (العرض المباشر) - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.

مكان التدريس

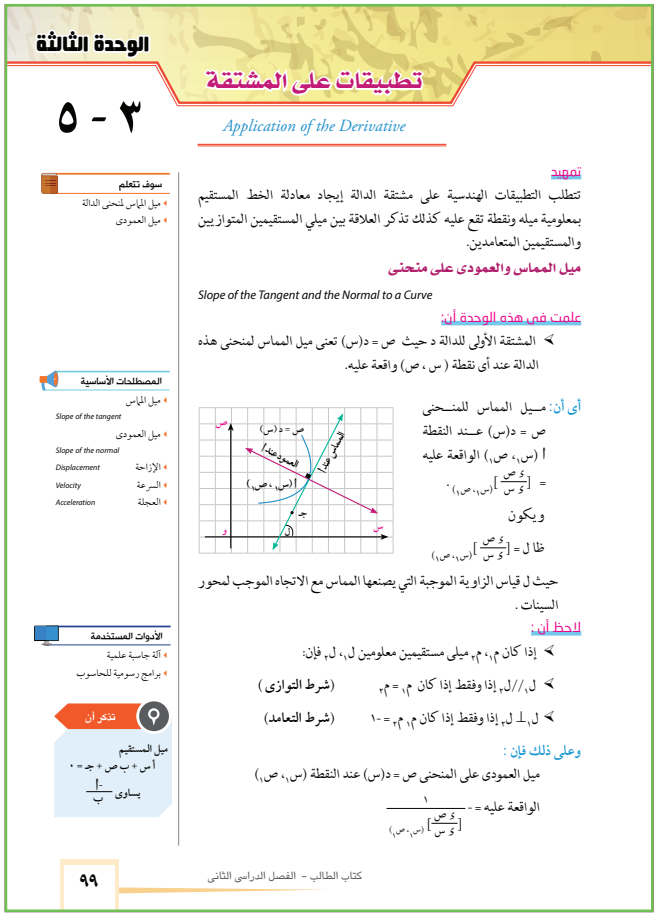
الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ٩٩ إلى صفحة ١٠٤ الشبكة الدولية للمعلومات

التهيئة

استرجع مع طلابك مفهوم ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند



الوحدة الثالثة

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة

Application of the Derivative

تمهيد

تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه كذلك تذكر العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

ميل المماس والعمودى على منحنى

Slope of the Tangent and the Normal to a Curve

علمت فى هذه الوحدة أن:

- المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه.

أى أن: ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة أ (س١، ص١) الواقعة عليه = $(\frac{ى ص}{ى س})_{(س١، ص١)}$.

ويكون

ظا ل = $(\frac{ى ص}{ى س})_{(س١، ص١)}$

حيث ل قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

لاحظ أن:

- إذا كان م١، م٢ ميلى مستقيمين معلومين ل١، ل٢ فإن:
- ل١ // ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ = م٢ (شرط التوازى)
- ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ م٢ = -١ (شرط التعامد)

وعلى ذلك فإن :

ميل العمودى على المنحنى ص = د(س) عند النقطة (س١، ص١)

الواقعة عليه = $\frac{١}{-(\frac{ى ص}{ى س})_{(س١، ص١)}}$

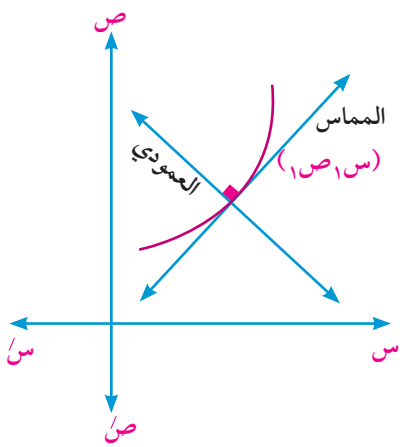
سوف تتعلم
- ميل المماس لمنحنى الدالة
- ميل العمودى

المصطلحات الأساسية
- ميل المماس — Slope of the tangent
- ميل العمودى — Slope of the normal
- الإزاحة — Displacement
- السرعة — Velocity
- العجلة — Acceleration

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تذكر أن
ميل المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى $-\frac{أ}{ب}$

النقطة (س١، ص١) هى نفسها قيمة المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة.



إجراءات الدرس

وضح لطلابك أنه يمكن كتابة معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١، ص١) بالصورة:

ص - ص١ = م(س - س١)

حيث م = $(\frac{ى ص}{ى س})_{(س١، ص١)}$ ومعادلة العمودى بالصورة

ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١)

PDF Compressor Pro

مثال

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} - ٤س + ٣ والتى يصنع عندها المماس زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل

∵ ص = س^{٣} - ٤س + ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} - ٤

∴ المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس = ظا ١٣٥ = -١

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} - ٤ = -١ ∴ ٣س^{٢} = ٣ ∴ س = ± ١

عندما س = -١ ∴ ص = (-١)^{٣} - ٤(-١) + ٣ = ٦

، عندما س = ١ ∴ ص = ١ - ٤ + ٣ = ٠

∴ النقط هى (-١ ، ٦) ، (١ ، ٠)

حاول أن تحل

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} - ٢س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

(أ) موازيًا محور السينات (ب) عموديًا على المستقيم س - ٤ ص + ١ = ٠

مثال

(٢) أوجد ميل العمودى على المنحنى ص = ظا (π - $\frac{٢}{٣}$ س) عند النقطة ($\frac{٣}{٨}\pi$ ، $\sqrt{٣}$)

الحل

∵ ص = ظا (π - $\frac{٢}{٣}$ س) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - $\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} (π - $\frac{٢}{٣}$ س)

ميل المماس للمنحنى عند النقطة ($\frac{٣}{٨}\pi$ ، $\sqrt{٣}$) = - $\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} ($\frac{\pi ٢}{٣}$ - π)

= - $\frac{٢}{٣}$ قا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{٢}{٣}$ × ٤ = - $\frac{٨}{٣}$

ميل العمودى عند النقطة ($\frac{٣}{٨}\pi$ ، $\sqrt{٣}$) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها العمودى على المنحنى ص = $\sqrt{٧ + ٢س^{٣}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (-٣ ، ٥) لأقرب دقيقة .

تفكير إبداعى :

أوجد قيمة أ التى تجعل المستقيم ص = ٤س + أ مماسًا للمنحنى ص = س^{٢} + ٥

تعلم

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى *Equation of the Tangent and the Normal to a Curve*

إذا كانت (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:

١ - **معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هى :**

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

٢ - **معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هى :**

ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س - س$_{١}$)

مثال

(٢) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ٢

الحل

∵ ص = ٢ س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣

∴ عند س = ٢ ∴ ص = ٢(٢)^{٣} - ٤(٢)^{٢} + ٣ = ٣

∴ النقطة (٢ ، ٣) تقع على المنحنى

∵ $\frac{د ص}{د س}$ = ٦س^{٢} - ٨س ∴ $[\frac{د ص}{د س}]_{(٢،٣)}$ = ٦(٢)^{٢} - ٨(٢) = ٨

∴ ميل المماس = ٨ وتكون معادلته

ص - ٣ = ٨ (س - ٢) أى ص - ٨ س + ١٣ = ٠

ميل العمودى = $\frac{-١}{٨}$ وتكون معادلته

ص - ٣ = $\frac{-١}{٨}$ (س - ٢) أى ٨ ص + س - ٢٦ = ٠

حاول أن تحل

(٢) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١.

هل النقطة أ (-٣٠ ، ٤) تقع على المماس؟ فسر إجابتك

مثال

(٤) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٤ س - ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، د($\frac{\pi}{٤}$))

٣ - ٥ تطبيقات على المشتقة

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(١٠٠)، (١٠١) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

(١) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س - ٢ ∴ س = ١

بالتعويض فى معادلة المنحنى ∴ ص = ٢

عند النقطة (١ ، ٢) المماس // محور السينات

(ب) ∵ ميل المستقيم = $\frac{١}{٤}$ ∴ ميل المماس = - ٤

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢س - ٢ = - ٤ ∴ س = - ١

بالتعويض فى معادلة المنحنى ص = ٦

عند النقطة (- ١ ، ٦) المماس عمودى على المستقيم المعطى

(٢) ميل المماس = $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢س}{\sqrt{٨ ٢س^{٢} + ٧}}$

[$\frac{د ص}{د س}$] $_{(-٣ ، ٥)}$ = $\frac{-٦}{٥}$ ، ميل العمودى عليه = $\frac{٥}{٦}$

العمودى على المنحنى يصنع زاوية قياسها θ = طا$^{-١}$ $\frac{٥}{٦}$

θ = ٣٩° ٤٨′

ميل المماس = ($\frac{د ص}{د س}$) = $\frac{-١}{٢}$ وميل العمودى = ٢

معادلة المماس = س + ٢ ص - ٥ = ٠

معادلة العمودى: ٢ س - ص = ٠

بالتعويض باحداثيى النقطة أ (- ٣ ، ٤) فى الطرف الأيمن من معادلة المماس

∴ الطرف الأيسر = - ٣ + ٢(٤) - ٥ = ٠

∴ النقطة أ (- ٣ ، ٤) تقع على المماس لأنها تحقق معادلته

بند تفكير ابداعى:

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢س ميل المستقيم = ٤

عندما يمس المستقيم المنحنى فإن ٢ س = ٤

∴ س = ٢ ، ص = ٩ نقطة التماس (٢ ، ٩)

∵ نقطة التماس تقع على المستقيم ص = ٤ س + أ

∴ فهى تحقق معادلته أى أ = ٩ - ٨ = ١

فى بند تعلم ص(١٠١)

- وضح لطلابك الفرق بين معادلة المماس والعمودى لمنحنى وبين ذلك من خلال عرض مثال (٣) ص١٠١

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(١٠٤)، (١٠٥) وتوصل إلى الإجابات الصحيحة.

٤) $\frac{ص}{س}$ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

ميل المماس = $٢ \times \frac{\pi}{٤}$ حتا $\frac{\pi}{٢}$ + حا $\frac{\pi}{٢}$ = ١

ويكون ميل العمودى = - ١

معادلة المماس: ص - $\frac{\pi}{٤}$ = س - $\frac{\pi}{٤}$

س - ص = ٠

معادلة العمودى: ص - $\frac{\pi}{٤}$ = - س + $\frac{\pi}{٤}$

س + ص - $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

٥) ∵ $\frac{ص}{س}$ = ٢س + أ

، ميل المماس عند النقطة (١، ٣) = ٥

∴ ٢ × ١ + أ = ٥ أى أن أ = ٣

، ٣ = ١ + ١ × ٣ + ب ∴ ب = - ١

فى بند حاول أن تحل ص(١٠٣) هذا التمرين يربط بين الهندسة والتفاضل.

٦) $\frac{ص}{س}$ = ٢ س - ٦

ميل المماس = ٢ × ٤ - ٦ = ٢ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

معادلة المماس: ص - ٥ = ٢ (س - ٤)

٢ س - ص - ٣ = ٠

المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ $(\frac{٣}{٢}, ٠)$

معادلة العمودى: ص - ٥ = - $\frac{١}{٢}$ (س - ٤)

س + ٢ ص - ١٤ = ٠

أ ب = ١٤ - $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٢٥}{٢}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢٥}{٢} \times ٥$

= $\frac{١٢٥}{٤}$ وحدة مربعة

تمارين إثرائية:

١) أوجد ميل المماس لمنحنى كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٣س^{٢} - ٥س + ١ عند س = ١

ب د(س) = س^{٣} - ٥س عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص = - س

أ د(س) = س^{٢} + ٣س - ٢ عند س = ١



الحل

∵ ص = ٤س - ظا س ∴ $\frac{ص}{س}$ = ٤ - قا^{٢}س

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ م = ٤ - قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

وبالتعويض عن س = $\frac{\pi}{٤}$ فى معادلة المنحنى نجد أن: ص = π - ظا $\frac{\pi}{٤}$ = π - ١

أى أن: النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π - ١) تقع على المنحنى

∴ معادلة المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π - ١) هى: ص - (π - ١) = ٢ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ص - π + ١ = ٢ س - $\frac{\pi}{٢}$ ص = ٢ س + $\frac{\pi}{٢}$ - ١

حاول أن تحل

٤) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = س جا٢ س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

مثال

٥) إذا كان المنحنى ص = أس^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨س + ٥ عند النقطة (- ١، - ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب.

الحل

∵ النقطة (- ١، - ٣) تقع على المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

∴ - ٣ = أ (- ١)^{٣} + ب (- ١)^{٢} أى أ - ب = ٣ (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه = $\frac{ص}{س}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

∵ المستقيم ص = ٨س + ٥ مماس للمنحنى عند النقطة (- ١، - ٣)

∴ [$\frac{ص}{س}$] $_{(-١، -٣)}$ = ميل المستقيم = ٨

∴ ٣ أ (- ١)^{٢} + ٢ ب (- ١) = ٨ أى ٣ أ - ٢ ب = ٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن: أ = ٢ ، ب = - ١

حاول أن تحل

٥) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٣} + أ س + ب عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه يساوى ٥

مثال الربط بالمساحات

٦) إذا كان المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ عند النقطة جـ فى الربع الأول يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين م ، ن فأثبت أن مساحة △ م و ن ثابتة، ولا تعتمد على موضع النقطة جـ الواقعة على منحنى الدالة.

حل تمارين (٥-٣) ص (١٠٣، ١٠٤)

١) أ د/ (س) ب $\frac{-٨\sqrt{٣}}{٢}$

جـ -٣ د ٩

هـ ١ و ٢ س - ص - ٣ = ٠

٢) $\frac{\pi}{٤}$

٣) ١٠١° ١٩′

٤) $\frac{ص}{س}$ = ٣س^{٢} - ١٢ س - ١٥

س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠

(س + ١) (س - ٥) = ٠ ∴ س = - ١ أو س = ٥

ويكون عند النقط (- ١، ٢٨) ، (٥ ، - ٨٠) المماس للمنحنى يوازى محور السينات

٥) $\frac{ص}{س}$ = ٩ س^{٢} - ١١

أ المماس // المستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠

∴ $\frac{ص}{س}$ = - ٢ ، س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

المماس // المستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠

عند النقط (١ ، - ٣)، (- ١، ١٣)

PDF Compressor Pro

ب المماس ⊥ المستقيم ٢٥ ص + س + ٦ = ٠

$\therefore \frac{د ص}{د س} = -١ \div (\frac{-١}{٢٥}) = ٢٥$

٩س^{٢} - ١١ = ٢٥ ، س^{٢} = ٤ ، س = ± ٢

جـ ميل المماس = طا هـ = - ١١

٩س^{٢} - ١١ = - ١١ س = ٠

وتكون النقطة هى (٠ ، ٥)

٦ ص = (س - ٢) (س + ١)

بإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

س = ٢ أو س = - ١

ميل المماس = $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س - ١

عند النقطة (٢ ، ٠) ميل المماس = ٣

معادلة المماس هى: ص = ٣ (س - ٢)

عند النقطة (- ١ ، ٠) ميل المماس = - ٣

معادلة المماس هى: ص = - ٣ (س + ١)

٧ $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س}{(٢ - س^{٢})^{٢}}$

عند س = ٠ تكون ص = $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٠

المماس // محور السينات

ويكون العمودى موازيًا لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(٠ ، -\frac{١}{٢})$

ومعادلته س = ٠

٨ النقطة (٠ ، ١) تقع على المنحنى

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ حتا س - حا س

$(\frac{د ص}{د س})_{س = ٠}$ = ٢ ، معادلة المماس هى ص - ١ = ٢س

أى ٢ س - ص + ١ = ٠

٩ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س + ١ ∴ $[\frac{د ص}{د س}]_{م_١}$ = ٣ = $م_١$

المنحنى ص = ٢ - $\sqrt{٣}$ س$^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ - س$^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{د ص}{د س} = -\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ ∴ $[\frac{د ص}{د س}]_{م_٢} = -\frac{١}{٣} = -$ $م_٢$

∵ $م_١ \times م_٢ = ٣ \times \frac{-١}{٣} = -١$

∴ المماسان متعامدان

١٠ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ أ (س + ب) = ٢ أ س + ٢ ب

∴ $(\frac{د ص}{د س})_{س = ٢}$ = ٠ ∴ ٢ أ + ب = ٠

∴ $[\frac{د ص}{د س}]_{س = ٠}$ = ميل المستقيم = ٢ ∴ - ٢ ب = ٢

∴ ب = - ١ ، أ = $\frac{١}{٢}$



الحل

∵ ص = ٤ س$^{-١}$

نفرض أن جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$) ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤}{س^{٢}}$

∴ ميل المماس عند جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$) يساوى $\frac{-٤}{أ^{٢}}$

معادلة المماس عندأ هى: ص - $\frac{٤}{أ}$ = - $\frac{٤}{أ^{٢}}$ (س - أ)

بالضرب × أ^{٢} ∴ أ^{٢} ص - ٤ أ = - ٤ س + ٤ أ

∴ معادلة $\overleftrightarrow{م ن}$ هى أ^{٢} ص + ٤ س = ٨ أ

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ مع محور السينات فإن ص = ٠

∴ س = ٢ أ أى أن و م = ٢ أ من الوحدات

لإيجاد نقط تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ مع محور الصادات فإن س = ٠

∴ ص = $\frac{٨}{أ}$ أى أن و ن = $\frac{٨}{أ}$ من الوحدات

∴ مساحة Δ م و ن = $\frac{١}{٢} \times ٢ أ \times \frac{٨}{أ}$ = ٨ وحدة مربعة

وهى كمية ثابتة لاتعتمد على إحداثيى نقطة جـ الواقعة على المنحنى.

حاول أن تحل

الربط بالمساحات:

٦ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س^{٢} - ٦ س + ١٣ عند النقطة (٥ ، ٤) الواقعة عليه.

تمـارين (٣ - ٥)

١ أكمل كلًا مما يأتي:

أ ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند أى نقطة عليه هو .....

ب ميل المماس للمنحنى ص = جتا س عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوى .....

جـ إذا كان المستقيم ص = ٨ - ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، -١) فإن د/(٣) يساوى .....

د المماس للمنحنى ص = (٣ س - ٥)^{٢} عند النقطة (١ ، ٢) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى .....

هـ ميل العمود على المنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى .....

و معادلة المماس للمنحنى ص = (س-١)^{٢} عند النقطة (٢ ، ١) هى .....

أجب عن ما يأتي:

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ - ١٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٣}+٣}{س-٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣ ، ٦) .....

٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} - ٦ س^{٢} - ١٥ س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات .

٥ أوجد النقط على المنحنى ص = ٣س^{٣} - ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس

أ موازيًا للمستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠ ب عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

جـ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = - ١١

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ٢) (س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

٧ أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٢}-١}{٢-س^{٣}}$ عندما س = ٠

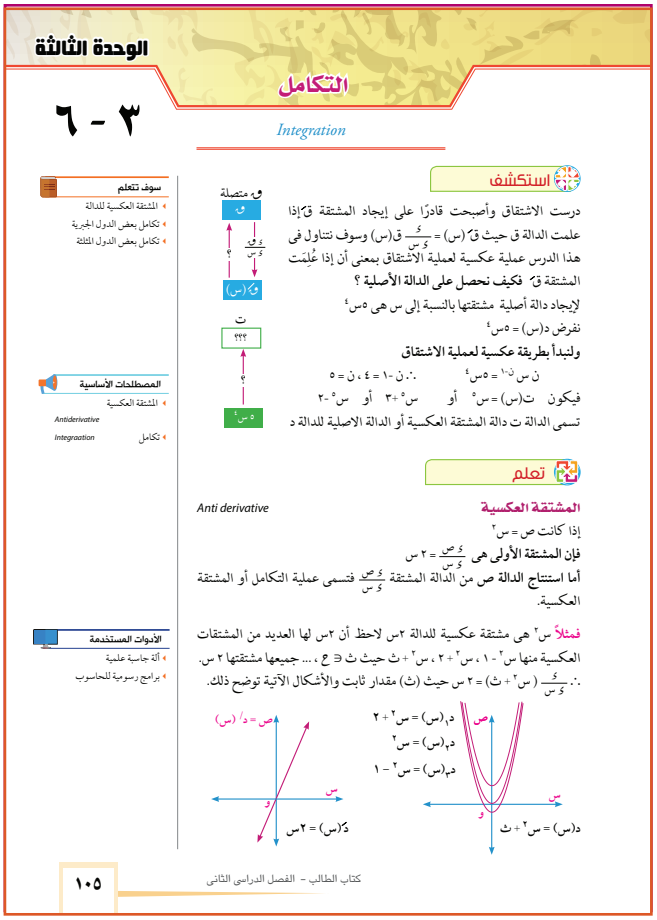
٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢ جاس + جتا س عند النقطة (٠ ، ١).

٩ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى ص = س^{٣} + س - ١ عند النقطة (١ ، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ - $\sqrt{٣}$ س عند نفس النقطة .

١٠ إذا كان المنحنى ص = (س^{٢} - ٢س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠) ، ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل فأوجد قيمتى أ ، ب.

PDF Compressor Pro

٣ - ٦ التكامل
Integration


الوحدة الثالثة

التكامل

٣ - ٦

Integration

استكشف

درست الاشتقاق وأصبحت قادرًا على إيجاد المشتقة ق′ إذا علمت الدالة ق حيث ق′(س) = $\frac{ك ق}{ك س}$ = ق(س) وسوف نتناول فى هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى أن إذا عُلِمَت المشتقة ق′ فكيف نحصل على الدالة الأصلية ؟

لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى س هى س⁴

نفرض د(س) = ٥س⁴

ولنبدأ بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

ن س^(ن-١) = ٥س⁴ ∴ ن - ١ = ٤ ، ن = ٥

فيكون ت(س) = س⁵ أو س⁵ + ٣ أو س⁵ - ٢٠

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الاصلية للدالة د

تعلم

المشتقة العكسية

Anti derivative

إذا كانت ص = س⁴

فإن المشتقة الأولى هى $\frac{ك ص}{ك س}$ = ٢ س

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{ك ص}{ك س}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلاً س⁴ هى مشتقة عكسية للدالة ٢س لاحظ أن ٢س لها العديد من المشتقات العكسية منها س⁴ - ١ ، س⁴ + ٢ ، س⁴ + ث حيث ث ∈ ح ، ... جميعها مشتقتها ٢ س.

∴ $\frac{ك}{ك س}$ (س⁴ + ث) = ٢ س حيث (ث) مقدار ثابت والأشكال الآتية توضح ذلك.

د(س) = س⁴ + ث

د(س) = س⁴ + ٢

د(س) = س⁴

د(س) = س⁴ - ١

ص

س

و

ص = د′(س)

د′(س) = ٢س

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية للدالة
- تكامل بعض الدوال الجبرية
- تكامل بعض الدوال المثلثة

المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسية — Antiderivative
- تكامل — Integraation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

١٠٥

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

خلفية

سبق أن درس الطالب أن المشتقة الأولى للدالة د هى ت، وفى كثير من العمليات قد يحدث العكس، كأن يكون لدينا د/ (س) ونحتاج إلى الحصول على الدالة الأصلية د(س). فعلى سبيل المثال قد يكون معلومًا لنا ميل المماس لمنحنى ونحتاج إلى معرفة معادلة المنحنى، ومثل هذه المواقف لذلك نبحث عن إيجاد المشتقة العسكية أو الدالة الأصلية المقابلة وهذا ما يعرف بالتكامل.

وسوف ندرس فى هذه الوحدة المشتقة العكسية للدالة وبعض قواعد وخواص التكامل وتكامل الدوال المثلثية.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد المشتقة العكسية للدالة.
- يوجد تكامل بعض الدوال الجبرية.
- يوجدتكامل بعض الدوال المثلثية.
- يعين ثابت التكامل.

مفردات اساسية

- مشتقة عكسية – تكامل – ثابت التكامل.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

- المحاضرة (العرض المباشر) – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٠٧ إلى صفحة ١١٤ الشبكة الدولية للمعلومات (الانترنت).

التهيئة

- نعرض على الطلاب سؤال تمهيدى (استفسارى) كالتالى:
- إذا علمنا أن المشتقة و′ (س) فيكف نحصل على الدالة الأصلية؟

إجراءات الدرس

فى بند تعلم: وضح إلى الطلاب أنه إذا كانت د دالة معرفة ووجدت دالة ت(س) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة فى مجال هذه الدالة، بحيث كان ت′ (س) = د (س) فإن ت (س) هى المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د ويقال للدالة ت(س) إنها تكامل غير محدد للدالة د(س) بالنسبة إلى س

إذا كان ت′ (س) = د (س)

أى إذا كان: $\frac{ك ص}{ك س}$ (ت(س)) = د (س)

ومن ذلك يكون: ت(س) = ⌡ د(س): د س

أى ت′ (س) = د (س) ويدل الرمز ⌡ على عملية التكامل ، «ك س» فى هذا التركيب معناها «بالنسبة إلى س».

وضح إلى الطلاب إذا كانت د(س) = س³ فإن د(س) = ٣س² أى س³ هى مشتقة عكسية للدالة ٣س² ونلاحظ أى الدوال:

PDF Compressor Pro

تعريف يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت'(س) = د(س) لكل س في مجال د.

مثال

(١) أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{1}{4}$ س^{4} هي مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{3}.

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت'(س) = $\frac{1}{4}$ × ٤س^{3} = ٣ س^{3}

∴ ت'(س) = د(س) أي أن الدالة(ت) مشتقة عكسية للدالة د

حاول أن تحل

(١) بين أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{1}{6}$ س^{6} هي مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{5}

تفكير ناقد:

ما العلاقة بين ت$_{1}$، ت$_{2}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د؟

التكامل غير المحدد *Indefinite Integral*

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة، ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ﻫ س

[ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف إذا كان ت'(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ﻫ س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت إختياري (ثابت التكامل).

لاحظ أن:

$\frac{د}{د س}$ (س^{3} + ٥) = ٣س^{2} ∴ $\int$ ٣ س^{2} ﻫ س = س^{3} + ث

$\frac{د}{د س}$ (س^{5} - ٣) = ٥س^{4} ∴ $\int$ ٥ س^{4} ﻫ س = س^{5} + ث

$\frac{د}{د س}$ (٣س^{7}) = ١٤س^{6} ∴ $\int$ ١٤ س^{6} ﻫ س = ٢س^{7} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

(٢) تحقق من صحة كل مايأتي:

(أ) $\int$ س^{7} ﻫ س = $\frac{1}{8}$ س^{8} + ث

(ب) $\int \frac{س}{\sqrt{1+س^{2}}}$ ﻫ س = $\sqrt{1+س^{2}}$ + ث

الحل

(أ) ∵ $\frac{د}{د س}$ ($\frac{1}{8}$ س^{8} + ث) = س^{7} ∴ $\int$ س^{7} ﻫ س = $\frac{1}{8}$ س^{8} + ث

(ب) ∵ $\frac{د}{د س}$ ($\sqrt{1+س^{2}}$ + ث) = $\frac{2س}{2\sqrt{1+س^{2}}}$ = $\frac{س}{\sqrt{1+س^{2}}}$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{1+س^{2}}}$ ﻫ س = $\sqrt{1+س^{2}}$ + ث

حاول أن تحل

(٢) تحقق من صحة كل مايأتي:

(أ) $\int$ ٤ س^{3} ﻫ س = $\frac{1}{4}$ س^{4} + ث (ب) $\int$ س $\sqrt{1+س^{2}}$ ﻫ س = $\frac{1}{3}$ (١ + س^{2})$^{\frac{3}{2}}$ + ث

قاعدة:

$\int$ س^{ن} ﻫ س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ث ثابت ، ن عدد نسبي ، ن ≠ -١

مثال أوجد:

(٣) (أ) $\int$ س^{5} ﻫ س (ب) $\int$ س^{3} ﻫ س

(جـ) $\int$ س$^{\frac{1}{2}}$ ﻫ س (د) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{س^{3}}}$ ﻫ س

الحل

(أ) $\int$ س^{5} ﻫ س = $\frac{س^{6}}{6}$ + ث = $\frac{1}{6}$ س^{6} + ث

(ب) $\int$ س^{3} ﻫ س = $\frac{س^{4}}{4}$ + ث = $\frac{1}{4}$ س^{4} + ث

(جـ) $\int$ س$^{\frac{1}{2}}$ ﻫ س = $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ س$^{\frac{3}{2}+1}$ + ث

= $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{5}{2}}$ + ث

(د) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{س^{3}}}$ ﻫ س = $\int$ س$^{-\frac{3}{4}}$ ﻫ س

= $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ س$^{-\frac{3}{4}+1}$ + ث = ٤ س$^{\frac{1}{4}}$ + ث

حاول أن تحل

(٣) أوجد:

(أ) $\int$ س^{8} ﻫ س (ب) $\int$ س$^{\frac{1}{4}}$ ﻫ س

(جـ) $\int \sqrt[5]{س^{4}}$ ﻫ س (د) $\int$ ٧س$^{\frac{1}{4}}$ ﻫ س

التكامل ٦ - ٣

- اكد إلى الطلاب على مفهوم المشتقة العكسية للدالة وأن مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد.
- ناقش التعريف التالي مع الطلاب $\int$ د(س) د س = ت(س) + ث وأعط أمثلة بسيط توضح ذلك مثل: أوجد:

١ - $\int$ ١٠س د س ٢ - $\int$ ١٥س^{4} د س

٣ - $\int$ ٧٧س^{6} د س ٤ - $\int \frac{-1}{4س^{-5}}$ د س

في بند تفكير ناقد:

- هذا التمرين يوضح مفهوم ثابت التكامل ومدخل له.

إذا كان كل من ت$_{1}$، ت$_{2}$ مشتقة عكسية للدالة د

فإن ت$_{1}$(س) = د(س) + ت$_{1}$

ت$_{2}$(س) = د(س) + ث$_{2}$

ت$_{1}$ - ث$_{2}$ = مقدار ثابت

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل(١٠٦)، (١٠٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

إجابات:

(١) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{1}{6}$ س^{6}) = × ٦س^{5} = ٣س^{5} = د(س)

∴ $\frac{1}{6}$ س^{6} مشتقة عكسية للدالة د

(٢) (أ) ∵ $\frac{د}{د س}$ [- $\frac{1}{3}$ س$^{-3}$ + ث] = - × - $\frac{1}{3}$ - س$^{-4}$ = + س$^{-4}$

(ب) $\frac{د}{د س}$ [$\frac{1}{3}$ (١ + س^{2})$^{\frac{3}{2}}$ + ث]

= $\frac{1}{3}$ × $\frac{3}{2}$ (١ - س٢)$^{\frac{1}{2}}$ × ٢س

= س (١ + س^{2})$^{\frac{1}{2}}$ = س $\sqrt{1+س^{2}}$

∴ العلامة صحيحة

- ناقش مع طلابك بعض خواص التكامل وبين للطلاب مدى تشابه هذه الخواص مع خواص النهايات وخواص الأشتقاق.
- اكد إلى الطلاب علي فهم بعض قواعد التكامل المعطاه من خلال أمثلة عددية بسيطة مثل:

PDF Compressor Pro

أوجد:

(١) $\int (٢س + ٣)^{٥}\, د س$

(٢) $\int (س^{٣} - ٢س)(٣س^{٢} - ٢)\, د س$

في بند تفكير ناقد ص(١٠٩) :

يؤكد على مفهوم المشتقة العكسية للدالة

(١) $\frac{د}{د س}\left(\frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١}\right) = \frac{(ن+١)}{أ} \times \frac{(أس+ب)^{ن}}{ن+١} \times أ$

$= (أس + ب)^{ن}$

(٢) $\frac{د}{د س}\left(\frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١}\right) = د(س)^{ن} \times د'(س)$

$= د(س)^{ن}$

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

ناقش مع طلابك ماورد فى بند حاول أن تحل ص١٠٨ وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

أ) $\int س^{٨}\, د س = \frac{١}{٩} س^{٩} + ث$

ب) $\int س^{\frac{٢}{٣}}\, د س = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

جـ) $\int ٧س^{\frac{٧}{٩}}\, د س = \frac{٩ \times ٧}{١٦} س^{\frac{١٦}{٩}} + ث$

د) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}}\, د س = \int س^{\frac{٥}{٧}}\, د س = \frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}} + ث$

(٥) أ) $\int (٢ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})\, د س$

$= ٢س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢س + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} + ث$

ب) $\int (س^{-٢} + س^{\frac{١}{٢}} + ٣)\, د س$

$= -س^{-١} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س + ث$

$= -\frac{١}{س} + \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + ٣س + ث$

أكد على طلابك أهمية استخدام قواعد التكامل ص١١١ من خلال عرض مثال (٦)

تمارين إثرائية :

أوجد كل من التكاملات الآتية:

(١) $\int (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س - ٥)\, د س$

(٢) $\int س^{٥} (١ - \frac{٣}{س})^{٥}\, د س$

(٣) $\int (ص - ١)(ص^{٢} - ٢ص + ٥)^{٤}\, د ص$

خواص التكامل: *Properties of Integration*

إذا كان د، ر دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن:

١- $\int أ\, د(س)\, د س = أ \int د(س)\, د س$ حيث أ ثابت $\neq ٠$

٢- $\int [د(س) \pm ر(س)]\, د س = \int د(س)\, د س \pm \int ر(س)\, د س$

مثال

٤ أوجد: أ) $\int (٤س + ٣س^{٢})\, د س$ ب) $\int \frac{(س^{٢}+٢)^{٢}}{س^{٢}}\, د س$

الحل

أ) $\int (٤س + ٣س^{٢})\, د س$

$= \int ٤س\, د س + \int ٣س^{٢}\, د س$

$= ٤ \int س\, د س + ٣ \int س^{٢}\, د س$

$= \frac{٤}{٢} س^{٢} + ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} + ث$

$= ٢س^{٢} + س^{٣} + ث$

ب) $\int \frac{(س^{٢}+٢)^{٢}}{س^{٢}}\, د س$

$= \int \frac{س^{٤} + ٤س^{٢} + ٤}{س^{٢}}\, د س$

$= \int س^{٢}\, د س + \int ٤\, د س + \int ٤س^{-٢}\, د س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + ٤س - ٤س^{-١} + ث$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ) $\int (٢ + \sqrt[٣]{س} + \frac{١}{\sqrt[٣]{س}})\, د س$ ب) $\int \frac{١}{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ٣)\, د س$

بعض قواعد التكامل: *Some rules of integration*

١- $\int (أس + ب)^{ن}\, د س = \frac{١}{أ} \times \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$

٢- $\int [د(س)]^{ن}\, د'(س)\, د س = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$، حيث ث ثابت، ن عدد نسبى $\neq -١$

تفكير ناقد:

١- هل يمكنك التحقق من صحة العلاقتين السابقتين عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٥ أوجد: أ) $\int ((٣ - ٢س)^{٥} + ٣)\, د س$ ب) $\int \frac{س + ٣}{(س - ٢)^{٤}}\, د س$

جـ) $\int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{٧} (٢س - ٣)\, د س$ د) $\int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٣س - ١)\, د س$

الحل

أ) $\int ((٣ - ٢س)^{٥} + ٣)\, د س = \int (٣ - ٢س)^{٥}\, د س + \int ٣\, د س$

$= \frac{(٣ - ٢س)^{٦}}{-٢ \times ٦} + ٣س + ث = -\frac{١}{١٢} (٣ - ٢س)^{٦} + ٣س + ث$

ب) $\int \frac{س + ٣}{(س - ٢)^{٤}}\, د س = \int \frac{(س - ٢) + ٥}{(س - ٢)^{٤}}\, د س = \int \frac{س - ٢}{(س - ٢)^{٤}}\, د س + \int \frac{٥}{(س - ٢)^{٤}}\, د س$

$= \int (س - ٢)^{-٣}\, د س + \int ٥ (س - ٢)^{-٤}\, د س$

$= \frac{(س - ٢)^{-٢}}{-٢ \times -٣} + ث + \frac{٥ (س - ٢)^{-٣}}{-٣} = \frac{-١}{٦ (س - ٢)^{٢}} - \frac{٥}{٣ (س - ٢)^{٣}} + ث$

جـ) $\int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{٧} (٢س - ٣)\, د س$

$\because د(س) = س^{٢} - ٣س + ٥$ ، $\because د'(س) = ٢س - ٣$

$\therefore \int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{٧} (٢س - ٣)\, د س = \frac{(س^{٢} - ٣س + ٥)^{٨}}{٨} + ث$

$= \frac{١}{٨} (س^{٢} - ٣س + ٥)^{٨} + ث$

د) $\int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٣س - ١)\, د س$

$\because د(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ١$ ، $\because د'(س) = \frac{١}{٢} (٦س - ٢)$

$\therefore \frac{١}{٢} \int (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١١} (٦س - ٢)\, د س = \frac{١}{٢} \frac{(٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١٢}}{١٢} + ث$

$= \frac{١}{٢٤} (٣س^{٢} - ٢س + ١)^{١٢} + ث$

حاول أن تحل

٥ أوجد:

أ) $\int (٣س + ٥)^{-٩}\, د س$ ب) $\int (س + ١)(س + ٣)^{٧}\, د س$

جـ) $\int (س^{٢} + ٣س - ٢)^{٩} (٢س + ٣)\, د س$ د) $\int س (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (٣س - ١)\, د س$

ابحث: من مصادر المعرفة والشبكة العنكبوتية عن $\int \frac{١}{س}\, د س$

PDF Compressor Pro



الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

تكامل بعض الدوال المثلثية

Integration of Some Trigonometric Functions

١- ∫ جاس ﻫ س = - جتا س + ث

٢- ∫ جتا س ﻫ س = جا س + ث

٣- ∫ قا٢ س ﻫ س = ظا س + ث

حيث ث ثابت إختيارى

تذكر أن

بعض العلاقات المثلثية

(أ) جتا٢ س + جا٢ س = ١

(ب) جتا٢ س - جا٢ س = جتا ٢ س

(جـ) ١ + ظا٢ س = قا٢ س

(د) ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

مثال

٦ أوجد التكاملات الآتية:

(أ) ∫ (س - جا س) ﻫ س

(ب) ∫ (٤ جتا س + ١ / جتا٢ س + ١) ﻫ س

الحل

(أ) ∫ (س - جا س) ﻫ س = ١/٢ س٢ + جتا س + ث

(ب) ∫ (٤ جتا س + ١ / جتا٢ س + ١) ﻫ س = ∫ (٤ جتا س + قا٢ س + ١) ﻫ س

= ٤ جا س + ظا س + س + ث

حاول أن تحل

٦ أوجد التكاملات الآتية:

(أ) ∫ (٦ جتا س - ٨ جا س) ﻫ س

(ب) ∫ (٣ + ٤ ظا٢ س) ﻫ س

نتائج هامة:

١- ∫ جا (أ س + ب) ﻫ س = - ١/أ جتا (أ س + ب) + ث

٢- ∫ جتا (أ س + ب) ﻫ س = ١/أ جا (أ س + ب) + ث

٣- ∫ قا٢ (أ س + ب) ﻫ س = ١/أ ظا (أ س + ب) + ث

حيث ث ثابت اختيارى

تفكير ناقد:

١- تحقق من صحة العلاقات السابقة بإيجاد المشتقة العكسية مستخدما قاعدة السلسلة.

مثال

٧ أوجد:

(أ) ∫ جتا (٢ س + ٣) ﻫ س

(ب) ∫ جتا (π/٤ - س/٢) ﻫ س



الحل

(أ) ∫ جتا (٢ س + ٣) ﻫ س = ١/٢ جا (٢ س + ٣) + ث

(ب) = ∫ قا٢ (١/٢ س) ﻫ س - ∫ جا (π/٤ - س) ﻫ س

= - ١/٢ ظا (س/٢ - π/٤) - [١/(-١/٢) جتا (π/٤ - س)] + ث

= ٢ ظا (س/٢ - π/٤) - جتا (π/٤ - س) + ث

حاول أن تحل

٧ أوجد:

(أ) ∫ جا (٣ س - ٥) د س

(ب) ∫ جتا (س/٣ - ٢) ﻫ س

تمارين (٣ - ٦)

أكمل كلًّا مما يأتى:

١ المشتقة العكسية للدالة (٣س٢ - ٢س + ٥) هى .....

٢ ∫ (٤س - جا π/٣) ﻫ س = ...

٣ ∫ (س + ٢) (س٢ + ٤س - ٧)١١ ﻫ س = ...

٤ ∫ (س + ٥)٢ ﻫ س = ...

٥ ∫ (جتا س جتا π/٤ - جا س جا π/٤) ﻫ س = ...

٦ ∫ جتا٢ س/(١ + جا س) ﻫ س = ...

٧ ∫ ٢ ظا س قا٢ س ﻫ س = ...

٨ ∫ (٥/س٢ + ٧√(س/٥)) ﻫ س = ...

احسب التكاملات الآتية:

٩ ∫ ٩س٨ ﻫ س

١٠ ∫ ١٢ س-٢ ﻫ س

١١ ∫ ٥ √(٧س٣) ﻫ س

١٢ ∫ -٨/٥ ف-٢ ﻫ ف

١٣ ∫ ٢(٣ع-٢ - ٥) ﻫ ع

١٤ ∫ ٣س٢ + س - ٢) ﻫ س

١٥ ∫ (٣ √(س٢) - ٢/س) ﻫ س

١٦ ∫ (س٢ + ٥س + جـ) ﻫ س

١٧ ∫ س(س + ٣) ﻫ س

١٨ ∫ س٢ (٣س - ٥/س) ﻫ س

١٩ ∫ (س - ٢)(س + ٢) ﻫ س

٢٠ ∫ (س - ٥) (س + ١) ﻫ س

٢١ ∫ (٧√(س) - ١)٢ ﻫ س

٢٢ ∫ (س + ١/س)٢ ﻫ س

فى بند تفكير ناقد ص١١٠

يمكن التحقق من صحة عمليات تكامل الدوال المثلثية، وذلك بإيجاد المشتقة العكسية للدالة كالآتى:

١ - ﻫ/ﻫ س (-١/أ جتا أ س + ث) = -١/أ × أ × - جا أ س = جا أ س

٢ - ﻫ/ﻫ س (١/أ جتا أ س + ث) = ١/أ × أ × جتا أ س = جتا أ س

٣ - ﻫ/ﻫ س (١/أ ظا أ س + ث) = ١/أ × أ × قا٢ أ س = قا٢ أ س.

أكد إلى طلابك من استخدام تكاملات الدوال المثلثية تحت بند نتائج هامة فى حل تمارين تكامل الدوال المثلثية واتقان فهمهم جيدًا لها.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل (١١٠)، (١١١) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

٦ (أ) -١/٢٤ (٣س + ٥)-٨ + ث

(ب) ∫ (س + ٣ - ٢) (س + ٣)٧ د س

= ∫ (س + ٣)٨ د س - ٢ ∫ (س + ٣)٧ د س

= ١/٩ (س + ٣)٩ - ١/٤ (س + ٣)٨ + ث

(جـ) (س٢ + ٣ س - ٢) = ٢ س + ٣

= ∫ (س٢ + ٣س - ٢)٩ (٢ س + ٣) د س

= ١/١٠ (س٢ + ٣س - ٢)١٠ + ث

(د) (٤س٣ - ٣س٢ + ٤) = ١٢س٢ - ٦س

∫ س(٤س٢ + ٣س٢ + ٤)٥ (٢ س - ١) د س

= ١/٦ (٤س٣ - ٣س٢ + ٤)٦ + ث

٧ (أ) ∫ (٤قا٢س - ١) د س = ٤ ظا س - س + ث

(ب) ٦ حا س + ٨ حتا س + ث

٨ (أ) -١/٣ حتا (٣ س - ٥) + ث (ب) ٢ حا (س/٢ - ٢) + ث

إجابة تمارين (٣-٦) ص (١١١، ١١٢)

١ س٣ - س٢ + ٥س + ث

٢ ١٠ + √(٨ س) + ٢/١٥ √(٧ س٣) ث

٣ ٢ س٢ - س حا π/٣ + ث

٤ ١/٤ (س + ٥)٤ + ث

٥ ١/٢٤ (س٢ - ٤س - ٧)١٢ + ث

٦ ∫ حتا (س + π/٤) ﻫ س = حا (س + π/٤) + ث

٧ ∫ (١ - حا س) ﻫ س = ∫ (١ - حا٢ س)/(١ + حا س) ﻫ س

= س - حتا س ﻫ س

PDF Compressor Pro

(٨) $\int ٢\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right)\times\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}\,\text{د س}=\int ٢\,\text{جا س جتا}^{-٣}\text{ س د س}$

$=\frac{٢}{-٢}\,\text{جتا}^{-٢}\text{ س}+\text{ث}=-\frac{١}{\text{قا}^{٢}\text{ س}}+\text{ث}$

(٩) $\text{س}٩+\text{ث}$

(١٠) $\frac{-١٢}{\text{س}}+\text{ث}$

(١١) $٢\sqrt[٨]{\text{س}^{٥}}+\text{ث}$

(١٢) $\frac{٤}{٥}\text{ف}^{-٢}+\text{ث}$

(١٣) $٢\text{ع}^{٣}+١٠\text{ ع}+\text{ث}$

(١٤) $\text{س}^{٣}+\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-٢\text{س}+\text{ث}$

(١٥) $٢\sqrt[٨]{\text{س}^{٣}}+\frac{١}{٢\text{س}}+\text{ث}$

(١٦) $\frac{١}{٣}\text{أ س}^{٣}+\frac{٥}{٢}\text{س}^{٢}+\text{جـ س}+\text{ت}$

(١٧) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}+\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}+\text{ث}$

(١٨) $\frac{٣}{٤}\text{س}^{٤}-\frac{٥}{٢}\text{س}^{٢}+\text{ث}$

(١٩) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}-٤\text{س}+\text{ث}$

(٢٠) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}-٥\text{س}+\text{ث}$

(٢١) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-\frac{٤}{٣}\sqrt[٨]{\text{س}^{٣}}+\text{س}+\text{ث}$

(٢٢) $-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}+٢\text{س}-\frac{١}{\text{س}}+\text{ث}$

(٢٣) $٢\text{س}-\frac{٣}{\text{س}}+\text{ث}$

(٢٤) $\frac{١}{٥}\text{س}^{٥}-\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣}+\text{س}+\text{ث}$

(٢٥) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}+\text{س}+\text{ث}$

(٢٦) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}+\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}+٩\text{س}+\text{ث}$

(٢٧) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}+٢\text{س}+\text{ث}$

(٢٨) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-٣\text{س}+\text{ث}$

(٢٩) $(\text{س}-٢)^{٦}+\text{ث}$

(٣٠) $-(\text{س}+٣)^{-٣}+\text{ث}$

(٣١) $\frac{-١}{١٥}(٨-٣\text{ن})^{٥}+\text{ث}$

(٣٢) $\frac{٣}{٢٠}(٢\text{ع}-٣)^{\frac{١٠}{٣}}+\text{ث}$

(٣٣) $\frac{-٢}{٣(٢\text{س}-٥)}+\text{ث}$

(٣٤) $١٤\sqrt[٨]{\text{س}+٤}+\text{ث}$

(٣٥) $\int(\text{س}-١)^{٣}\,\text{د س}=\frac{١}{٤}(\text{س}-١)^{٤}+\text{ث}$

(٣٦) $=\frac{٢}{١١}\sqrt[٨]{\text{س}-٣}\,(\text{س}-٣)^{٥}+\text{ث}$

(٣٧) $=\frac{١}{٥}\text{س}^{٥}-\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣}+٤\text{س}+\text{ث}$

(٣٨) $\frac{١}{٢٤}(٣\text{س}^{٢}-٥)^{٤}+\text{ث}$

(٣٩) $\int\frac{١}{١٠}(٥\text{س}^{٢}+٢)^{-٧}\times(١٠\text{س})=\frac{-١}{٦٠(٥\text{س}^{٢}+١)^{٦}}+\text{ث}$

(٤٠) $=\frac{-١}{٢٠(٤\text{س}+١)^{٥}}+\text{ث}$

(٤١) $-٧\,\text{حتا س}-٢\,\text{حا س}+\text{ث}$

(٤٢) $-\frac{١}{٢}\,\text{حتا}٢\text{ س}-٣\,\text{حا س}+\text{ث}$

(٤٣) $٩\,\text{حا س}-٣\,\text{طا}٣\text{ س}+\text{ث}$

(٤٤) $٣\text{ س}-٥\,\text{طا س}+\text{ث}$

(٤٥) $-\frac{١}{٥}\,\text{حتا}(٥\text{س}-١)+\text{ث}$

(٤٦) $-\,\text{حا}(٢-\text{س})+\text{ث}$

(٤٧) $-٤\,\text{حتا}\left(\frac{\text{س}}{٤}+\frac{\pi}{٢}\right)+\text{ث}$

(٤٨) $\int\text{حتا}٢\text{ س د س}=\frac{١}{٢}\,\text{حا}٢\text{ س}+\text{ث}$

(٤٩) $\int(١+\text{حتا}٢\text{ س})\,\text{دس}=\text{س}+\frac{١}{٢}\,\text{حا}٢\text{ س}+\text{ث}$

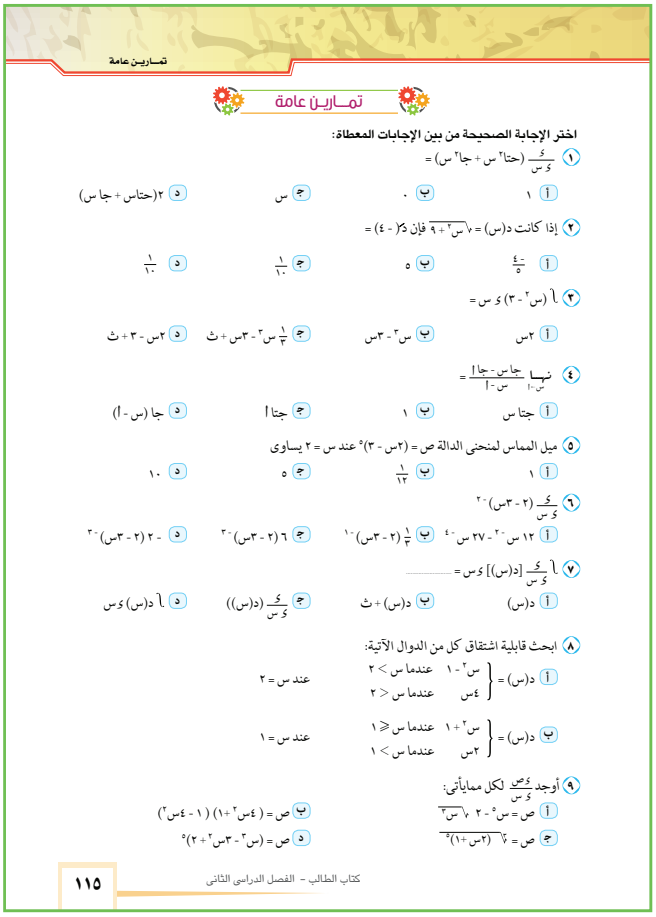
(٥٠) $\text{حا}^{٢}\text{ س}=\frac{١}{٢}(١-\text{حتا}٢\text{ س})$

$\int\left(٤-\frac{١}{٢}+\text{حتا}٢\text{ س}\right)\text{دس}$

$=\frac{٧}{٢}\text{س}+\frac{١}{٢}\,\text{حا}٢\text{ س}+\text{ث}$



PDF Compressor Pro



تمـارين عامة

تمـارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ $\frac{د}{دس}$ (حتا^{٢} س + جا^{٢} س) =

أ ١ ب ٠ ج س د ٢(حتاس + جاس)

٢ إذا كانت د(س) = $\sqrt{٧س^{٢}+٩}$ فإن د′(- ٤) =

أ $-\frac{٤}{٥}$ ب ٥ ج $\frac{١}{١٠}$ د $\frac{١}{١٠}$

٣ $\int$ (س^{٢} - ٣) د س =

أ ٢س ب س^{٣} - ٣س ج $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س + ث د ٢س - ٣ + ث

٤ $\lim_{س \to ١}$ $\frac{جاس - جا١}{س - ١}$ =

أ جتا س ب ١ ج جتا ١ د جا (س - ١)

٥ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س - ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى

أ ١ ب $\frac{١}{١٢}$ ج ٥ د ١٠

٦ $\frac{د}{دس}$ (٢ - ٣س)$^{-٢}$

أ ١٢ س$^{-٢}$ - ٢٧ س$^{-٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ (٢ - ٣س)$^{-١٠}$ ج ٦ (٢ - ٣س)$^{-٣}$ د - ٢ (٢ - ٣س)$^{-٣}$

٧ $\int$ $\frac{د}{دس}$ [د(س)] د س = ...

أ د(س) ب د(س) + ث ج $\frac{د}{دس}$ (د(س)) د $\int$ د(س) د س

٨ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = { س^{٢} - ١ عندما س < ٢ ، ٤س عندما س > ٢ } عند س = ٢

ب د(س) = { س^{٢} + ١ عندما س ≥ ١ ، ٣س عندما س < ١ } عند س = ١

٩ أوجد $\frac{د ص}{دس}$ لكل مما يأتي:

أ ص = س^{٥} - ٢ $\sqrt{٧س^{٣}}$ ب ص = (٤س^{٢} + ١) (١ - ٤س^{٣})

ج ص = $\sqrt[٣]{(٣س+١)^{٢}}$ د ص = (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢)^{٥}

إجابات تمارين عامة على الوحدة ص (١١٥، ١١٦):

١ ب ٢ أ

٣ جـ ٤ أ

٥ د ٦ جـ

٧ أ

٨ أ غير قابلة للاشتقاق

ب قابلة للاشتقاق

جـ قابلة للاشتقاق لكل س ∈ [- ١، ٥] - {١}

٩ أ ٥س^{٤} - ٣ $\sqrt{س}$

ب - ٦٤ س^{٣}

جـ $\frac{١٠}{٣}$ $\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}$

د ١٥ س (س - ٢) (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢)^{٤}

١٠ س حتا س + ٤ حا س

١١ ١٠ س (س^{٢} + ٢)^{٤}

١٢ (٠، ٢)

١٣ أ = - ٥ ، ب = ٤

١٤ ص = ٤

١٥ ٣٣ س - ص + ٦٠

١٦ ٢س + ص - ١ - π = ٠

١٧ س - ٤ ص + ١٧ = ٠

١٨ س + ٢ ص - ٢ - $\frac{\pi}{٤}$ = ٠

١٩ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} - س + ث

٢٠ $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{٨س^{٣}}$ + $\sqrt{٤س}$ + ث

PDF Compressor Pro

(٢١) $\frac{-١}{٢٤}(٤ - ٣س)^{٨} + ث$

(٢٢) $س - \frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + ث

(٢٣) $\frac{١}{١٠}(حا س + حتا س)^{١٠} + ث$

(٢٤) $\frac{٤ س + ٩}{١٢ (٣ + س)٤} + ث$

(٢٥) أ $\frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٢}{٣} \sqrt[٣]{س} + ث$

ب $\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + س + ث$

ج $\frac{١}{٥} س^{٥} - س^{٣} + ث$

د $\frac{١}{٤}(٣س + ١)^{٤} + ث$

هـ $\frac{١}{٤}(س^{٢} - ٤)^{٤} + ث$

و $\frac{-١}{٣}(س^{٣} + ٣س)^{-١} + ث$

ز $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س $- \frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

ح $\frac{١}{٢}(س^{٢} - ٣س + ١)^{٤} + ث$



تمـارين عامة

(١٠) إذا كانت ص = س جا س - ٣ جتا س فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

(١١) إذا كان ص = (ع - ١)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

(١٢) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = (س - ٣)^{٢} - ١ والتي عندها المماس يوازي المستقيم ٢س + ص - ٣ = ٠

(١٣) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أس + ب يساوى -١٠ عند النقطة (٢، -٢) أوجد قيمة كل من أ ،ب .

أوجد معادلة المماس لمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

(١٤) ص = $\sqrt[٣]{س} + \frac{٤}{\sqrt[٣]{س}}$ عند النقطة (٤، ٤)

(١٥) ص = (س^{٢} + س) (س^{٣} + ٥) عند النقطة (-٢، -٦)

(١٦) ص = $\frac{١ + جا س}{١ - جا س}$ عند النقطة (π ، ١)

أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

(١٧) ص = $(\frac{س + ٢}{س - ٢})$ عند النقطة (٣، ٥)

(١٨) ص = ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ١)

أوجد التكاملات الآتية:

(١٩) $\int$ (س^{٢} - ٣س - ١) د س

(٢٠) $\int (\sqrt[٣]{س} + \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}})$ د س

(٢١) $\int$ (٤ - ٣س)^{٧} د س

(٢٢) $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} د س

(٢٣) $\int$ (جتا س - جا س)(جا س + جتا س)^{٩} د س

(٢٤) $\int \frac{س + ٢}{(٣ + س)^{٢}}$ د س

(٢٥) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ (س^{٢} + $\sqrt[٣]{س}$) د س

ب $\int$ (س^{٢} + ١)^{٢} د س

ج $\int \sqrt{س}$ (س^{٢} - ٣) د س

د $\int$ ٣(٣ س + ١)^{٢} د س

هـ $\int$ ٢س (س^{٢} - ٤)^{٢} د س

و $\int \frac{س^{٢} + ١}{(س^{٣} + ٣س)^{٢}}$ د س

ز $\int$ (جتا ٢س - س) د س

ح $\int$ (س^{٢} - ٣س + ١)^{٢} (٤س - ٦) د س

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمي

اختبار تراكمي

أكمل مما يأتي:

١ $\frac{د}{د س}$ (س جتا س) = ...

٢ $\int$ (٣س^{٢} - ٤س + ٥) د س = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٣ $\frac{د}{د س}$ (ظا $\frac{\pi}{٤}$) = ...

أ ١ ب قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ج . د ٢

٤ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا س جتا س يساوى

أ جتا س جا س ب حتا^{٢} س - جا^{٢}س ج جا س - جتا س د حا^{٢}س + جتا^{٢}س

٥ الدالة ص = |س - ٢| عند س = ٢

أ متصلة وقابلة للاشتقاق ب متصلة وغير قابلة للاشتقاق

ج غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق د غير متصلة.

٦ $\int$ ٤(س - ٢)^{٣} د س = ...

أ س^{٤} - ٣٢س + ث ب ٤ (س - ٢)^{٤} + ث ج (س - ٢)^{٤} + ث د $\frac{(س - ٢)^{٤}}{٤}$ + ث

٧ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

أ ص = ع + $\frac{١}{ع}$ ، س ع = ١ ب ص^{٣} = (س^{٢} - ٤س + ٤)^{٢٠}

ج ص = س ظا ٣س + جتا س د ص = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

٨ أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ (س - ١)(س + ١) د س ب $\int$ (٢ $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٦س^{٢}}$) د س

ج $\int$ (١ + جتا س)^{٢} د س د $\int$ ٤س (٣ - ٢س^{٢})^{٥} د س

٩ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} - س^{٣} عند النقطة (٢، -٤)

١٠ إذا كانت ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣}}$ فأثبت أن س^{٤} $\frac{د ص}{د س}$ = ٣

١١ إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^{٢} + ب س + ٥ عند النقطة (-١، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فأوجد قيمتى أ ، ب.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ١١٧

اختبار تراكمى ص(١١٧)

١ حتا س - س حا س

٢ س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س + ث

٣ ب

٤ ب

٥ ب

٦ جـ

٧ أ ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$

ب - $\frac{٤}{٣}$(س - ٢) - $\frac{٧}{٣}$

ج ٣ س قا^{٢} ٣س + ظا٣ س - حا س

د $\frac{-١}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

٨ أ $\frac{١}{٣}$س^{٣} - س + ث

ب $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt[٣]{٨}$ س^{٣} - ٢س^{٣} + ث

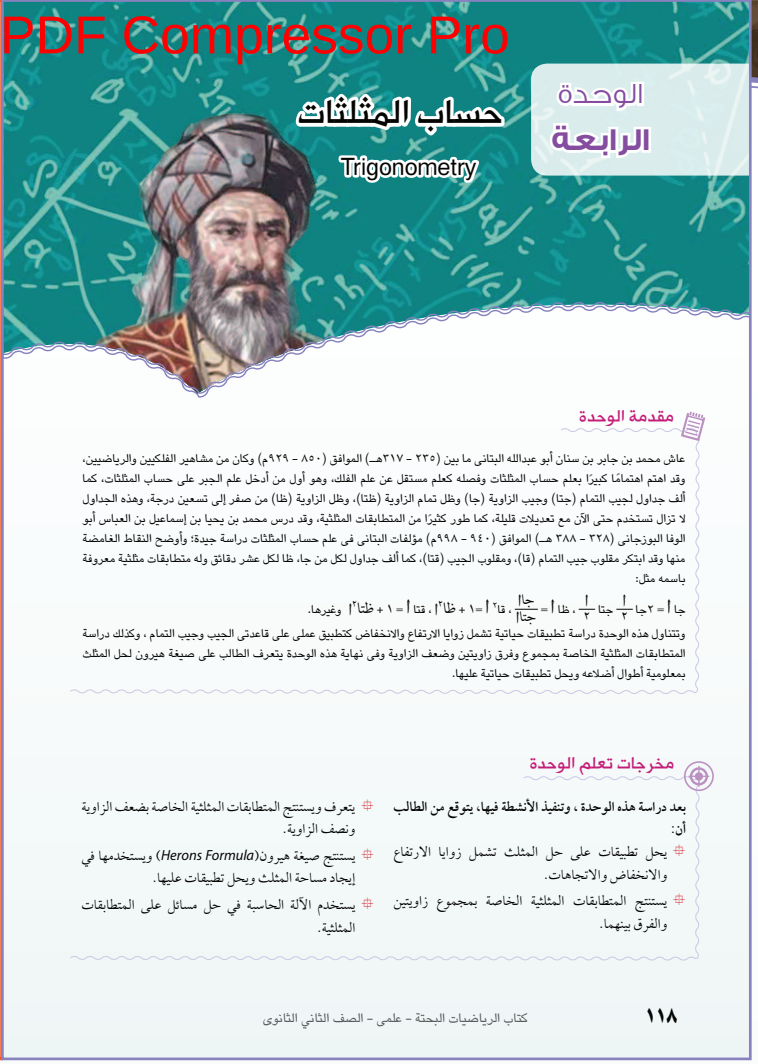
ج $\frac{٣}{٢}$س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ٢ حا س + ث

د - $\frac{١}{٦}$(٣ - ٢س^{٢})^{٦} + ث

٩ ٨ س + ص - ١٢ = صفر

١٠ أ = ١ ، ب = ٣

PDF Compressor Pro



مقدمة الوحدة

عاش محمد بن جابر بن سنان أبو عبدالله البتانى ما بين (٢٣٥ – ٣١٧هـ) الموافق (٨٥٠ – ٩٢٩م) وكان من مشاهير الفلكيين والرياضيين، وقد اهتم اهتمامًا كبيرًا بعلم حساب المثلثات وفصله كعلم مستقل عن علم الفلك، وهو أول من أدخل علم الجبر على حساب المثلثات، كما ألف جداول لجيب التمام (جتا) وجيب الزاوية (جا) وظل تمام الزاوية (ظتا)، وظل الزاوية (ظا) من صفر إلى تسعين درجة، وهذه الجداول لا تزال تستخدم حتى الآن مع تعديلات قليلة، كما طور كثيرًا من المتطابقات المثلثية، وقد درس محمد بن يحيا بن إسماعيل بن العباس أبو الوفا البوزجانى (٣٢٨ – ٣٨٨ هـ) الموافق (٩٤٠ – ٩٩٨م) مؤلفات البتانى فى علم حساب المثلثات دراسة جيدة؛ وأوضح النقاط الغامضة منها وقد ابتكر مقلوب جيب التمام (قا)، ومقلوب الجيب (قتا)، كما ألف جداول لكل من جا، ظا لكل عشر دقائق وله متطابقات مثلثية معروفة باسمه مثل:

جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ ، ظا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{جا أ}{جتا أ + ١}$ ، قا ٢أ = ١ + ظا ٢أ ، قتا أ = ١ + ظتا ٢أ وغيرها.

وتتناول هذه الوحدة دراسة تطبيقات حياتية تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق عملى على قاعدتى الجيب وجيب التمام ، وكذلك دراسة المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع وفرق زاويتين وضعف الزاوية وفى نهاية هذه الوحدة يتعرف الطالب على صيغة هيرون لحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه ويحل تطبيقات حياتية عليها.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض والاتجاهات.
- يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- يتعرف ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية.
- يستنتج صيغة هيرون(*Herons Formula*) ويستخدمها في إيجاد مساحة المثلث ويحل تطبيقات عليها.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل مسائل على المتطابقات المثلثية.

الزمن المناسب لتدريس الوحدة

١٠ حصص.

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة

التفكير المنطقى - التفكير التحليلى - التفكير الاستدلالى - حل المشكلات - التفكير الإبداعى فى الرياضيات المدرسية.

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب حل المثلث القائم الزاوية كما درس زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبق علي حل المثلث، و سبق دراسة حل المثلث بوجه عام بعد دراسته لقانونى الجيب وجيب التمام، لذا سوف يدرس فى هذه الوحدة زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث بوجه عام، كما سيدرس الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين مستنتجًا منها الدوال المثلثية لضعف الزاوية مع دراسة بعض التطبيقات ، و إثبات صحة بعض المتطابقات و في نهاية هذه الوحدة سوف يدرس صيغة هيرون (heron Formula) لايجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال اضلاعة، وذلك من خلال أربعة دروس هى:

الدرس الأول: زوايا الارتفاع والانخفاض.(تطبيقات على حل المثلث)

الدرس الثانى: الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

الدرس الثالث: الدوال المثلثية لضعف الزاوية.

الدرس الرابع: صيغة هيرون

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الأرتفاع والأنخفاض .
- يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية.
- يستنتج صيغة هيرون(*Herons Formula*) ويستخدمها في إيجاد مساحة المثلث .
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل مسائل على المتطابقات المثلثية

PDF Compressor Pro

مفردات أساسية

زاوية	*Angle*
زاوية ارتفاع	*Angle of elevation*
زاوية انخفاض	*Angle of depression*
دالة مثلثية	*Trigonometric function*
دالة الجيب	*Sine function*
دالة جيب التمام	*Cosine function*
الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين	*Trigonometric functions of the sums of the two angles*
الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين	*Trigonometric function of the difference between the measures of two angles*
الدوال المثلثية لضعف الزاوية	*Trigonometric functions of double – angle*
الدوال المثلثية لنصف الزاوية	*Trigonometric functions of half – an angle*
صيغة هيرون	*Heron formula*

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - جهاز عرض بيانات Data show - الشبكة الدولية للمعلومات.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة، والتكليفات الجماعية والفردية، والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة:

يوضح المخطط المفاهيم الخاصة بزوايا الارتفاع والانخفاض، وكذلك الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياس زاويتين، وأيضًا الدوال المثلثية لضعف الزاوية ونصف الزاوية، وأخيرًا نتطرق إلى مفهوم صيغة هيرون.

ومن خلال هذه المفاهيم نتناول بعض المفاهيم الجزئية مثل: حل المثلث وتطبيقات حياتية عليها.



المصطلحات الأساسية

زاوية	Angle
زاوية ارتفاع	Angle of Elevation
زاوية انخفاض	Angle of Depression
دالة مثلثية	Trigonometric Function
دالة الجيب	Sine Function
دالة جيب التمام	Cosine Function
الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين	Trigonometric Functions of the sum of Measures of Two Angles
الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين	Trigonometric Function of the Difference Between the Measures of Two Angles
الدوال المثلثية لضعف الزاوية	Trigonometric Functions of Double – Angle
الدوال المثلثية لنصف الزاوية	Trigonometric Functions of Half – an Angle
صيغة هيرون	Heron Formula

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): زوايا الارتفاع والانخفاض. (تطبيقات على حل المثلثات)
الدرس (٤ - ٢): الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.
الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
الدرس (٤ - ٤): صيغة هيرون.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

مخطط تنظيمى للوحدة

PDF Compressor Pro

٤ - ١ زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

Angles of elevation and of depression (applications of solving the triangle)

خلفية

سبق أن درس الطالب زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية، والآن بعد دراسته لحل المثلث بوجه عام، يدرس زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيقات على حل أى مثلث.

مخرجات التعلم.

بعد دراسة هذا الدرس و تنفيذ الأنشطة منه، يتوقع من الطالب أن:

- يحدد مفهوم زاوية الارتفاع.
- يحدد مفهوم زاوية الانخفاض.
- يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

مفردات اساسية

- زاوية – زاوية ارتفاع – زاوية انخفاض.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض بيانات Data Show. - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

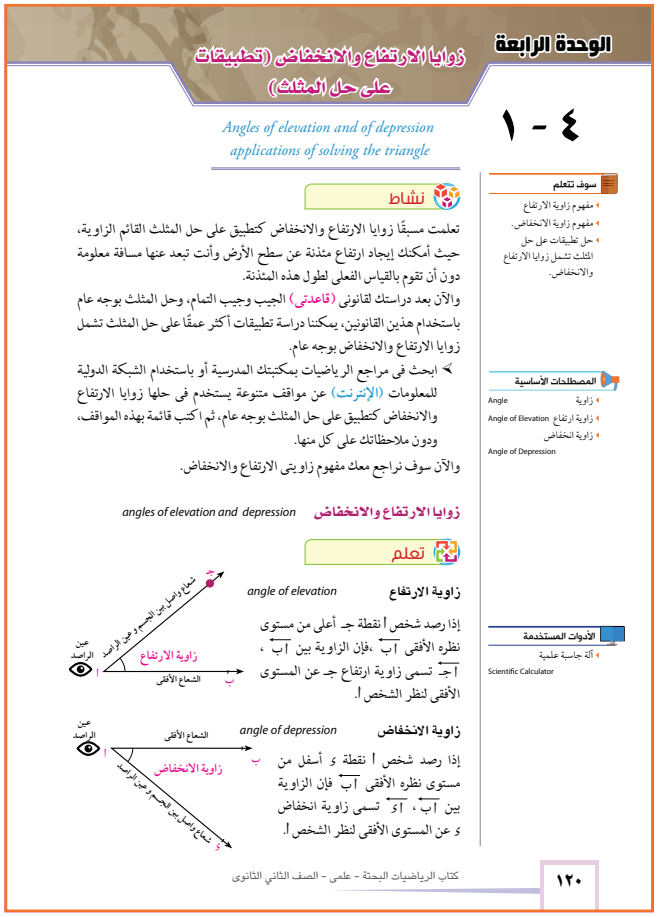
- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٢ إلى صفحة ١٣١ – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).


الوحدة الرابعة

زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

٤ - ١

Angles of elevation and of depression applications of solving the triangle

سوف تتعلم
- مفهوم زاوية الارتفاع.
- مفهوم زاوية الانخفاض.
- حل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

المصطلحات الأساسية
- Angle زاوية
- Angle of Elevation زاوية ارتفاع
- زاوية انخفاض Angle of Depression

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

نشاط

تعلمت مسبقًا زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية، حيث أمكنك إيجاد ارتفاع مئذنة عن سطح الأرض وأنت تبعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلى لطول هذه المئذنة.

والآن بعد دراستك لقانونى (قاعدتى) الجيب وجيب التمام، وحل المثلث بوجه عام باستخدام هذين القانونين، يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقًا على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض بوجه عام.

ابحث فى مراجع الرياضيات بمكتبتك المدرسية أو باستخدام الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) عن مواقف متنوعة يستخدم فى حلها زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث بوجه عام، ثم اكتب قائمة بهذه المواقف، ودون ملاحظاتك على كل منها.

والآن سوف نراجع معك مفهوم زاويتى الارتفاع والانخفاض.

زوايا الارتفاع والانخفاض *angles of elevation and depression*

تعلم

زاوية الارتفاع *angle of elevation*

إذا رصد شخص أ نقطة جـ أعلى من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ ،فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ تسمى زاوية ارتفاع جـ عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.

زاوية الانخفاض *angle of depression*

إذا رصد شخص أ نقطة و أسفل من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أو}$ تسمى زاوية انخفاض و عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.

كتاب الرياضيات البحتة – علمى – الصف الثانى الثانوى ١٢٠

التمهيد:

- ذكر طلابك باستخدام الشكل المقابل ص ١٢٠ عن الزوايا المتبادلة والمتناظرة
- ناقش مع طلابك نشاط (١)

إجراءات الدرس

نشاط

- يهدف هذا النشاط إلى تعرف الطالب لمواقف مشكلات متنوعة يستخدم فى حلها زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث بوجه عام، دون قائمة هذه المواقف:
- إيجاد ارتفاع برج، منارة، تل، منزل، شجرة، صخرة، بالون طائر، .....
- الملاحة الجوية والبحرية.
- إيجاد عرض نهر.
- إيجاد البعد بين المدن.
- ناقش مع طلابك المواقف التى حصلوا عليها من الشبكة الدولية للمعلومات.

PDF Compressor Pro

تعلم

زوايا الارتفاع والانخفاض

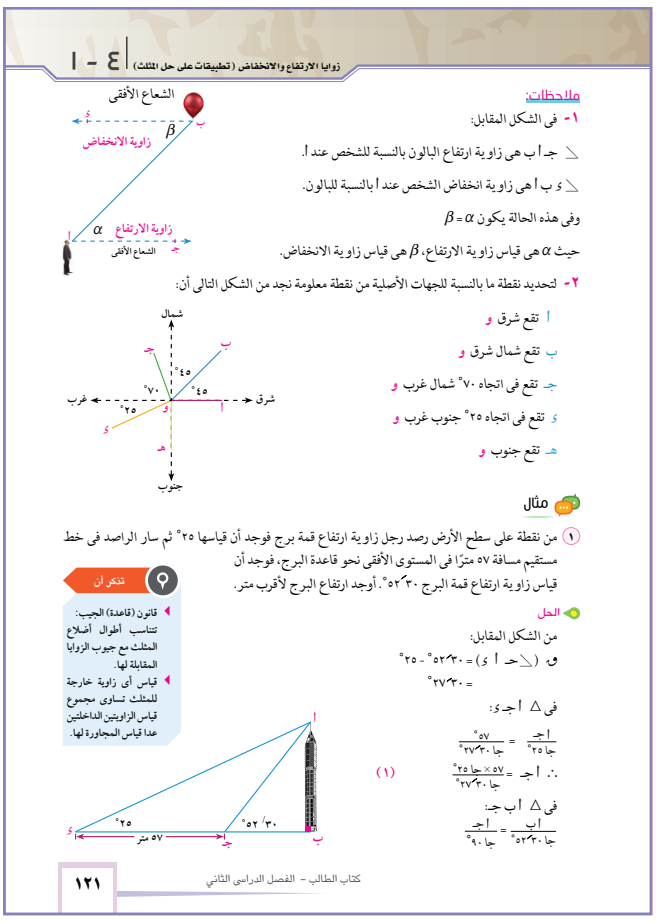
- راجع مع طلابك مفهومى زاويتى الارتفاع والانخفاض مستعينًا بما ورد فى صفحة ١٢٣ ، من كتاب الطالب.
- أكد على كيفية تحديد نقطة ما بالنسبة للجهات الأصلية من نقطة معلومة مستعينًا بالشكل الموضح صفحة (١٢٣) من كتاب الطالب.

إرشادات للدراسة

- ناقش مع طلابك الأمثلة الموضحة من كتاب الطالب ص١٢٣،ص١٢٤ والتي تتناول الآتي:
- اطلب إلى الطلاب رسم مثال(١)ثم تحديد العناصر المجهولة والأخري المعلومة و استخدام القوانين التي سبق له دراستها في حساب المثلثات للربط بينهما و ايجاد قيمة المجهول.
- لإيجاد طول $\overline{اب}$ في Δاب جـ بمعلومية ($\angle$اجب)، يستدعي ذلك معرفة طول أحد أضلاع المثلث اب جـ .
- ناقش الطلاب هل يمكن إيجاد طول $\overline{اجـ}$ في Δاجـ ء؟ كيف ذلك
- هل يمكن استخدام قانون الجيب لإيجاد طول $\overline{اجـ}$ ؟
- بين انه عند استخدام العلاقة: $\frac{اجـ}{جا ٢٥^\circ} = \frac{٥٧}{جا ٢٧^\circ ٣٠}$

لا داعي علي الاطلاق لإيجاد اجـ باستجدام الحاسبة نظراً لعمليات التقريبية أو الخطأ المحتمل في إيجاد الناتج مما يترتب عليه أخطاء في الخطوات التالية، و لكن يكتفي بكتابة: $اجـ = \frac{٥٧ \times جا ٢٥^\circ}{جا ٢٧^\circ ٣٠}$

- يسهل علي الطالب إيجاد اب في Δاب جـ القائم الزاوية في ب حيث اب= اجـ حا ٣٠ / ٥٢° .
- دع الطالب يعوض عن أ جـ في العلاقة السابقة وذلك لإيجاد اب مباشرة .
- ذكر الطالب بعمليات التقريب التى سبق دراستها ويمكن استخدام الآلة الحاسبة فى عمليات التقريب وذلك باستخدام المفتاح(Fix)
- تأكد من استخدام الطالب بدقة للآلة الحاسبة وتابع استخدامهم لها فى إيجاد نواتج العمليات.



ملاحظات:

١- في الشكل المقابل:

$\angle$ جـ اب هى زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للشخص عند ا.

$\angle$ ء ب ا هى زاوية انخفاض الشخص عند ا بالنسبة للبالون.

وفى هذه الحالة يكون $\beta = \alpha$

حيث α هى قياس زاوية الارتفاع، β هى قياس زاوية الانخفاض.

٢- لتحديد نقطة ما بالنسبة للجهات الأصلية من نقطة معلومة نجد من الشكل التالى أن:

ا تقع شرق و

ب تقع شمال شرق و

جـ تقع فى اتجاه ٧٠° شمال غرب و

ء تقع فى اتجاه ٢٥° جنوب غرب و

هـ تقع جنوب و

مثال

(١) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الراصد فى خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٢°٣٠. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

تذكر أن

- قانون (قاعدة) الجيب: تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- قياس أى زاوية خارجة للمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.

الحل

من الشكل المقابل:

و ($\angle$حـ ا ء) = ٥٢°٣٠ - ٢٥°

= ٢٧°٣٠

فى Δ اجـ ء:

$\frac{اجـ}{جا ٢٥^\circ} = \frac{٥٧}{جا ٢٧^\circ ٣٠}$

$\therefore$ اجـ = $\frac{٥٧ \times جا ٢٥^\circ}{جا ٢٧^\circ ٣٠}$ (١)

فى Δ اب جـ:

$\frac{اب}{جا ٥٢^\circ ٣٠} = \frac{اجـ}{جا ٩٠^\circ}$

$\therefore$ اب = اجـ × جا ٥٢°٣٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) يكون:

اب = $\frac{٥٧ \times جا ٢٥^\circ}{جا ٢٧^\circ ٣٠} \times جا ٥٢^\circ ٣٠$

اب ≃ ٤١ متر ، أى أن ارتفاع البرج هو ٤١ متر تقريبًا.



إبدأ ← 5 7 × sin 2 5) × sin 5 2 ... 3 0 ...) ÷ sin 2 7 ... 3 0 ... =

حاول أن تحل

(١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٠° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

مثال

(٢) برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة، من نقطة على سطح الأرض فى المستوى الأفقى المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٧٦° ، ٤٦° على الترتيب، أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.

الحل

و ($\angle$ا ء ب) = ٧٦° - ٤٦° = ٣٠°

و ($\angle$ ا) = ٩٠° - ٧٦° = ١٤°

فى المثلث اب ء: $\frac{ب ء}{جا ١٤^\circ} = \frac{١٠٠}{جا ٣٠^\circ}$

ب ء = $\frac{١٠٠ جا ١٤^\circ}{جا ٣٠^\circ}$ (١)

فى المثلث ب جـ ء: $\frac{ب جـ}{جا ٤٦^\circ} = \frac{ب ء}{جا ٩٠^\circ}$

ب جـ = ب ء جا ٤٦° (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن

ب جـ = $\frac{١٠٠ جا ١٤^\circ}{جا ٣٠^\circ} \times جا ٤٦^\circ$ ≃ ٣٥ متر

استخدم الآلة الحاسبة بالترتيب التالي:



إبدأ ← 1 0 0 × sin 1 4) × sin 4 6) ÷ sin 3 0) =

حاول أن تحل

(٢) برج ارتفاعه ١٢ مترًا مقامًا فوق تل، فإذا كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة على سطح الأرض هما ٣٢° ، ٢٤° على الترتيب. أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

ناقش الطلاب فى فقرات حاول أن تحل ص (١٢٤) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

اجابات:

(١) ارتفاع البرج = $\frac{٥٠ \times \text{حا } ٢٠^\circ}{\text{حا } ٢٢^\circ} \times \text{حا } ٤٢^\circ \simeq ٣١$ متر

(٢) ارتفاع التل = $\frac{١٢ \times \text{حا } ٥٨^\circ}{\text{حا } ٨^\circ} \times \text{حا } ٢٤^\circ \simeq ٣٠$ متر

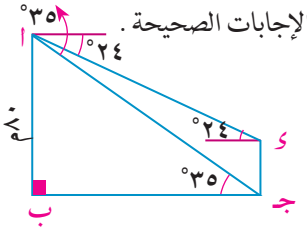
مراجعة:

- ذكر الطلاب ببعض خواص الزوايا أثناء حل الأمثلة ومنها:
  - الزوايا المتبادلة
  - الزوايا المتتامة
  - الزوايا المتناظرة
  - الزوايا المتكاملة
  - الزوايا الداخلة وفى جهة واحدة من القاطع
- تحديد قياسات الزوايا بالنسبة للجهات الأصلية الواردة فى ص (١٣٣)

التقييم المستمر (تعلم ذاتى):

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (١٢٤)، ص(١٢٦) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

(٣) $\frac{\text{ا جـ}}{\text{حا } ١١٤^\circ} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{حا } ١١^\circ}$ (١)



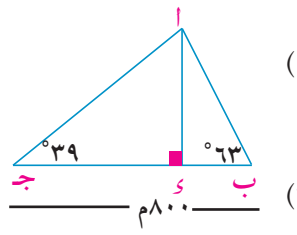
ا جـ = $\frac{٨٠}{\text{حا } ٣٥^\circ}$ (٢)

من (١) ، (٢)

جـ ء = $\frac{\text{حا } ١١^\circ}{\text{حا } ١١٤^\circ} \times \frac{٨٠}{\text{حا } ٣٥^\circ} \simeq ٢٩$ متر.

(٤) فى △ ا ب جـ:

$\frac{٨٠٠}{\text{حا } ٧٨^\circ} = \frac{\text{ا ب}}{\text{حا } ٣٩^\circ}$ (١)



فى △ ا ب ء:

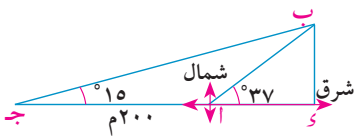
ا ء = ا ب حا ٦٣° (٢)

من (١)، (٢)

ا ء = $\frac{٨٠٠ \times \text{حا } ٣٩^\circ}{\text{حا } ٧٨^\circ} \times \text{حا } ٦٣^\circ \simeq ٤٥٩$ متر

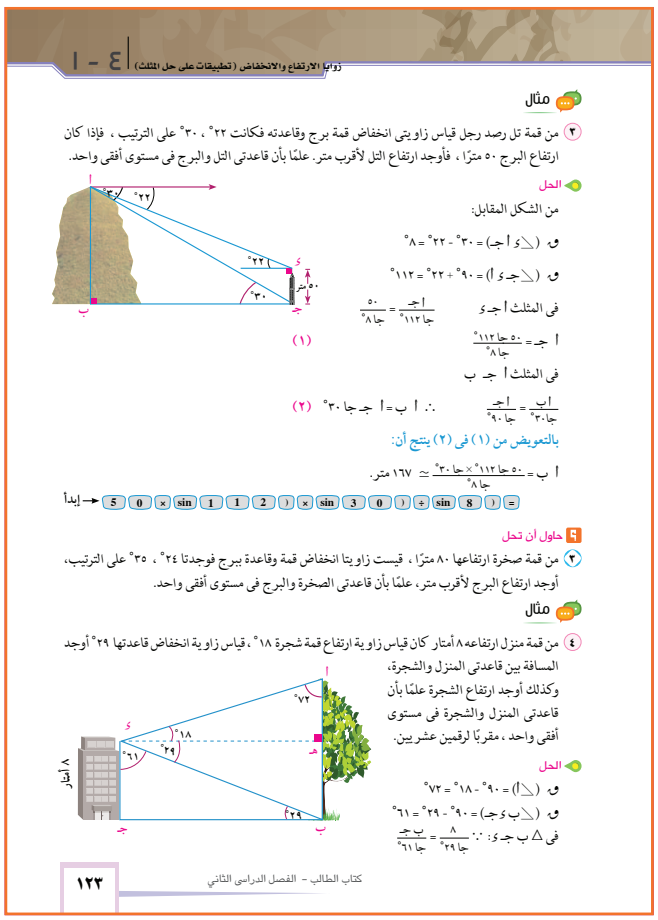
(٥) فى △ ا ب جـ:

$\frac{٢٠٠}{\text{حا } ٢٢^\circ} = \frac{\text{ا ب}}{\text{حا } ١٥^\circ}$ (١)



فى △ ا ب ء:

ب ء = ا ب حا ٣٧° (٢)



مثال

(٣) من قمة تل رصد رجل قياس زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته فكانت ٢٢° ، ٣٠° على الترتيب ، فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا ، فأوجد ارتفاع التل لأقرب متر. علمًا بأن قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الحل

من الشكل المقابل:

ق (∠ ء ا جـ) = ٣٠° - ٢٢° = ٨°

ق (∠ جـ ء ا) = ٩٠° + ٢٢° = ١١٢°

فى المثلث ا جـ ء: $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جا } ١١٢^\circ} = \frac{٥٠}{\text{جا } ٨^\circ}$ (١)

ا جـ = $\frac{٥٠ \text{ جا } ١١٢^\circ}{\text{جا } ٨^\circ}$

فى المثلث ا جـ ب

$\frac{\text{ا ب}}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ ∴ ا ب = ا جـ جا ٣٠° (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن:

ا ب = $\frac{٥٠ \text{ جا } ١١٢^\circ}{\text{جا } ٨^\circ} \times \text{جا } ٣٠^\circ \simeq ١٦٧$ متر.

إبدأ → 5 0 × sin 1 1 2) × sin 3 0) ÷ sin 8) = ٥ ٠ × جا ١ ١ ٢) × جا ٣ ٠) ÷ جا ٨) =

حاول أن تحل

(٢) من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا ، قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

مثال

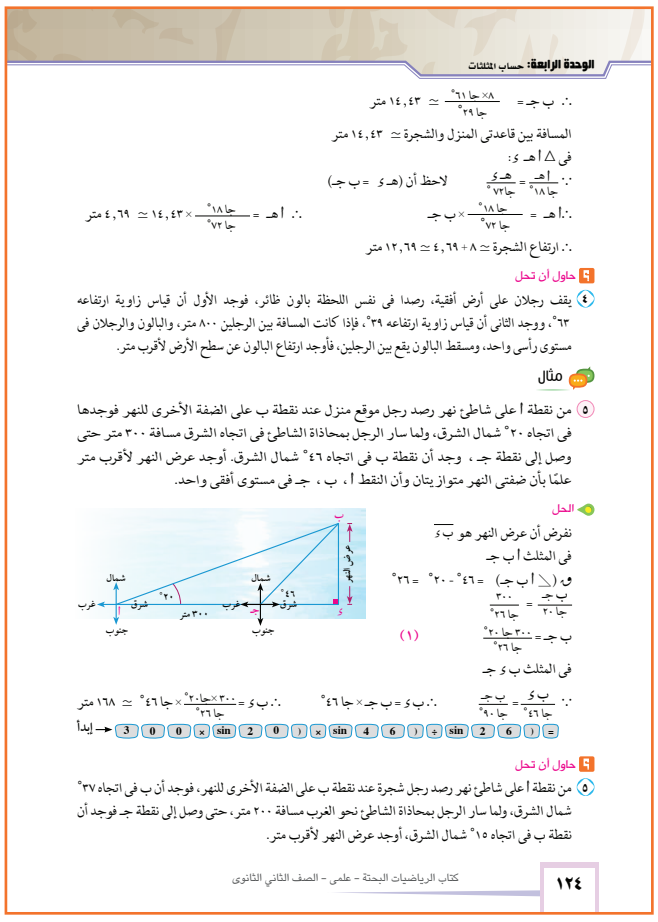
(٤) من قمة منزل ارتفاعه ٨ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ١٨° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٢٩° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد ، مقربًا لرقمين عشريين.

الحل

ق (∠ ا) = ٩٠° - ١٨° = ٧٢°

ق (∠ ب ء جـ) = ٩٠° - ٢٩° = ٦١°

فى △ ب جـ ء: ∵ $\frac{٨}{\text{جا } ٢٩^\circ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٦١^\circ}$



∴ ب جـ = $\frac{٨ \times \text{حا } ٦١^\circ}{\text{جا } ٢٩^\circ} \simeq ١٤,٤٣$ متر

المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة ≃ ١٤,٤٣ متر

فى △ ا هـ ء:

∵ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{جا } ١٨^\circ} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{جا } ٧٢^\circ}$ لاحظ أن (هـ ء = ب جـ)

∴ ا هـ = $\frac{\text{حا } ١٨^\circ}{\text{جا } ٧٢^\circ} \times$ ب جـ ∴ ا هـ = $\frac{\text{حا } ١٨^\circ}{\text{جا } ٧٢^\circ} \times ١٤,٤٣ \simeq ٤,٦٩$ متر

∴ ارتفاع الشجرة ≃ ٨ + ٤,٦٩ ≃ ١٢,٦٩ متر

حاول أن تحل

(٤) يقف رجلان على أرض أفقية، رصدا فى نفس اللحظة بالون طائر، فوجد الأول أن قياس زاوية ارتفاعه ٦٣° ، ووجد الثانى أن قياس زاوية ارتفاعه ٣٩° ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٨٠٠ متر، والبالون والرجلان فى مستوى رأسى واحد، ومسقط البالون يقع بين الرجلين، فأوجد ارتفاع البالون عن سطح الأرض لأقرب متر.

مثال

(٥) من نقطة ا على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة جـ ، وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط ا ، ب ، جـ فى مستوى أفقى واحد.

الحل

نفرض أن عرض النهر هو ب ء

فى المثلث ا ب جـ

ق (∠ ا ب جـ) = ٤٦° - ٢٠° = ٢٦°

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٢٠^\circ} = \frac{٣٠٠}{\text{جا } ٢٦^\circ}$

ب جـ = $\frac{٣٠٠ \text{ جا } ٢٠^\circ}{\text{جا } ٢٦^\circ}$ (١)

فى المثلث ب ء جـ

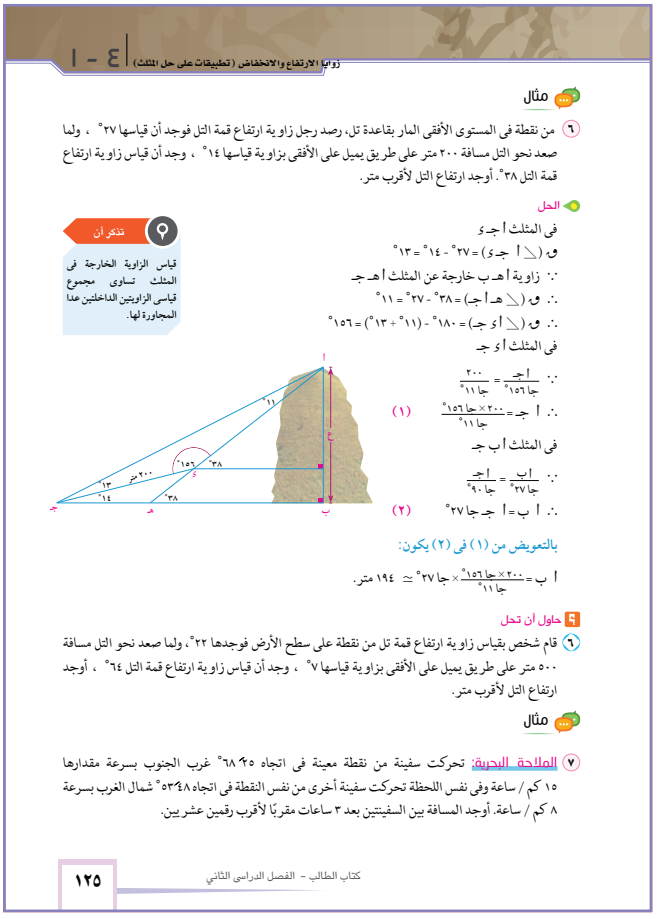
∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٤٦^\circ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ ∴ ب ء = ب جـ × جا ٤٦° ∴ ب ء = $\frac{٣٠٠ \times \text{جا } ٢٠^\circ}{\text{جا } ٢٦^\circ} \times \text{جا } ٤٦^\circ \simeq ١٦٨$ متر

إبدأ → 3 0 0 × sin 2 0) × sin 4 6) ÷ sin 2 6) = ٣ ٠ ٠ × جا ٢ ٠) × جا ٤ ٦) ÷ جا ٢ ٦) =

حاول أن تحل

(٥) من نقطة ا على شاطئ نهر رصد رجل شجرة عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر، فوجد أن ب فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ نحو الغرب مسافة ٢٠٠ متر، حتى وصل إلى نقطة جـ فوجد أن نقطة ب فى اتجاه ١٥° شمال الشرق، أوجد عرض النهر لأقرب متر.

PDF Compressor Pro



زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث) ٤ - ١

مثال

٦ من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل، رصد رجل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٧° ، ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٤° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٨°. أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

الحل

فى المثلث ا جـ ى

ق(∠ ا جـ ى) = ٢٧° - ١٤° = ١٣°

∵ زاوية اهـ ب خارجة عن المثلث ا هـ جـ

∴ ق(∠ هـ ا جـ) = ٣٨° - ٢٧° = ١١°

∴ ق(∠ ا ى جـ) = ١٨٠° - (١١° + ١٣°) = ١٥٦°

فى المثلث ا ى جـ

∵ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جا ١٥٦°}} = \frac{٢٠٠}{\text{جا ١١°}}$

∴ ا جـ = $\frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٥٦°}}{\text{جا ١١°}}$ (١)

فى المثلث ا ب جـ

∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{جا ٢٧°}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{جا ٩٠°}}$

∴ ا ب = ا جـ جا ٢٧° (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) يكون:

ا ب = $\frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٥٦°}}{\text{جا ١١°}} \times$ جا ٢٧° ≃ ١٩٤ متر.

تذكر أن

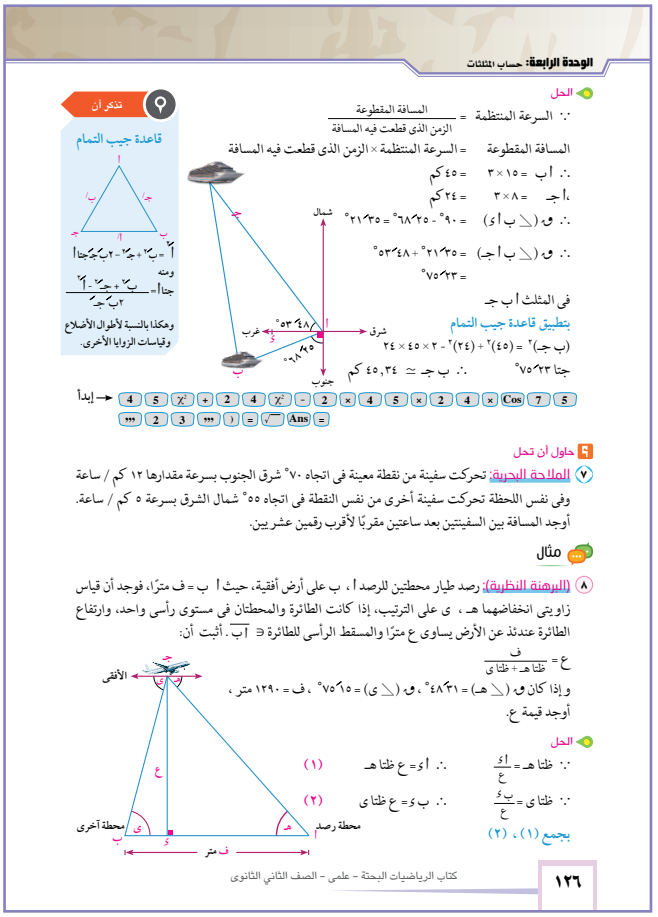
قياس الزاوية الخارجة فى المثلث تساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

حاول أن تحل

٦ قام شخص بقياس زاوية ارتفاع قمة تل من نقطة على سطح الأرض فوجدها ٢٢°، ولما صعد نحو التل مسافة ٥٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٧° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٦٤° ، أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

مثال

٧ الملاحة البحرية: تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٦٨°٢٥′ غرب الجنوب بسرعة مقدارها ١٥ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٥٣°٤٨′ شمال الغرب بسرعة ٨ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ٣ ساعات مقربًا لأقرب رقمين عشريين.



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الحل

∵ السرعة المنتظمة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذى قطعت فيه المسافة}}$

المسافة المقطوعة = السرعة المنتظمة × الزمن الذى قطعت فيه المسافة

∴ ا ب = ٣ × ١٥ = ٤٥ كم

ا جـ = ٣ × ٨ = ٢٤ كم

∴ ق(∠ ب ا ى) = ٩٠° - ٦٨°٢٥′ = ٢١°٣٥′

∴ ق(∠ ب ا جـ) = ٢١°٣٥′ + ٥٣°٤٨′

= ٧٥°٢٣′

فى المثلث ا ب جـ

بتطبيق قاعدة جيب التمام

(ب جـ)^{٢} = (٤٥)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢ × ٤٥ × ٢٤ جتا ٧٥°٢٣′

∴ ب جـ ≃ ٤٥,٣٤ كم

تذكر أن

قاعدة جيب التمام

أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ جتا ا

ومنه جتا ا = $\frac{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{٢\text{ب جـ}}$

وهكذا بالنسبة لأطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الأخرى.

حاول أن تحل

٧ الملاحة البحرية: تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٧٠° شرق الجنوب بسرعة مقدارها ١٢ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق بسرعة ٥ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

مثال

٨ (البرهنة النظيرية): رصد طيار محطتين للرصد ا ، ب على أرض أفقية، حيث ا ب = ف مترًا، فوجد أن قياس زاويتى انخفاضهما هـ ، ى على الترتيب، إذا كانت الطائرة والمحطتان فى مستوى رأسى واحد، وارتفاع الطائرة عندئذ عن الأرض يساوى ع مترًا والمستقيم الرأسى للطائرة ∋ آ ب. أثبت أن:

ع = $\frac{\text{ف}}{\text{ظتا هـ} + \text{ظتا ى}}$

وإذا كان ق(∠ هـ) = ٤٨°٣١′ ، ق(∠ ى) = ٧٥°١٥′ ، ف = ١٢٩٠ متر ، أوجد قيمة ع.

الحل

∵ ظتا هـ = $\frac{\text{ا ء}}{\text{ع}}$ ∴ ا ء = ع ظتا هـ (١)

∵ ظتا ى = $\frac{\text{ب ء}}{\text{ع}}$ ∴ ب ء = ع ظتا ى (٢)

بجمع (١) ، (٢)

من (١) ، (٢)

ب ى = $\frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٥°}}{\text{جا ٢٢°}} \times$ جا ٣٧° ≃ ٨٣ متر

اخطاء شائعه:

الخطأ: رسم الزاوية ٣٧° شمال الشرق فى بند حاول أن تحل رقم (٥)

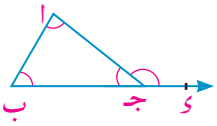
العلاج: ترسم الزاوية مأخوذة من الشرق إلى الشمال مقياس ٣٧°

أى أن الزاوية تكون مقاسة من عند الكلمة الثانية (الشرق)

مراجعة:

ذكر الطلاب بالآتى:

قياس الزاوية الخارجة فى المثلث تساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها



ففى الشكل: ق(∠ ا جـ ى) =

ق(∠ ا) + ق(∠ ب)

مجموع قياسات الزوايا الداخلة فى المثلث = ١٨٠°

بعض القضايا المتضمنة فى البيئة

وضح لطلابك أن هناك العديد من المشكلات والقضايا الخاصة بالملاحة البحرية تحل بواسطة روايا الارتفاع والانخفاض كما فى حاول أن تحل (٧)

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع الطلاب ما ورد فى حاول أن تحل ص(١٢٥) ، ص (١٢٦) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

الإجابات:

٦ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{حا ١٢٣°}} = \frac{٥٠٠}{\text{حا ٤٢°}}$

ع = ا جـ حا ٤٢

ع = $\frac{٥٠٠ \times \text{حا ١٤٢°}}{\text{حا ٤٢°}} \times$ حا ٢٢ ≃ ٢٣٥ متر

٧ باستخدام قاعدة جيب التمام:

ا^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ حتا ا

ا^{٢} = (٢٤)^{٢} + (١٠)^{٢} - ٢ × ٢٤ × ١٠ حتا ٧٥

ا^{٢} ≃ ٥٥١,٧٦٧

ا ≃ ٢٣,٤٩ كم

٨ حتا هـ = $\frac{\text{و ب}}{\text{ل}}$ ،

حتا ى = $\frac{\text{و ب}}{\text{ل}}$

حتا هـ - حتا ى = $\frac{\text{و ب}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}$

= $\frac{\text{و ب} - \text{و ب}}{\text{ل}} = \frac{\text{ف}}{\text{ل}}$

ومن ذلك: ل = $\frac{\text{ف}}{\text{حتا هـ - حتا ى}}$

PDF Compressor Pro

طول السلم (عدديًا) = $\frac{٤٠}{\text{حتا } ٣٠^\circ - \text{حتا } ٤٠^\circ}$ ≃ ٤٠٠ متر

الأخطاء الشائعة

الخطأ: أن يوجد الطالب فى بند حاول أن تحل رقم (٨) (حتا ى - حتا هـ) اعتقادًا منه أن: ∠ى > ∠هـ.

الصواب: يلاحظ أنه فى جيب التمام إذا كانت ٠° < هـ < ٩٠° أنه كلما زادت قيمة الزاوية نقصت قيمة جيب التمام أى أن التناسب هنا عكسى، لذلك فإن: حتا هـ < حتا ى وعليه فإن: (حتا هـ - حتا ى) تعطى طولا موجبًا.

إجابات تمارين (٤-١) ص ١٢٧، ١٢٨:

(١) ارتفاع البرج ≃ ٣٢ متر — مثال (١) ص (١٢٣)

(٢) ارتفاع البرج ≃ ٦٥ متر — مثال (٣) ص (١٢٥)

(٣) أ ب ≃ ٦٤ متر — مثال (١) ص (١٢٥)

(٤) ١١١ مترًا

(٥) المسافة التى تحركتها السفينة ≃ ٣٨ كم

سرعة السفينة ≃ ١٩ كم/س — مثال (٧) ص (١٢٧)

(٦) ارتفاع التل ≃ ٣٤ متر — مثال (٢) ص (١٢٤)

(٧) ق(∠ أ جـ هـ) = ١٠٥°

فى △ أ ب جـ: أ جـ = ٢٠٠ متر

فى △ هـ جـ ى: جـ هـ = ١٠٠ متر

بتطبيق قاعدة جيب التمام فى △ أ جـ هـ

(أ هـ)^٢ = (٢٠٠)^٢ + (١٠٠)^٢ - ٢ × ٢٠٠ × ١٠٠ حتا ١٠٥°

أ هـ ≃ ٢٤٦ متر

(٨) ارتفاع البرج ≃ ٢٩ متر — مثال (٣) ص (١٢٥)

(٩) ارتفاع المنزل ≃ ٣ + ١٢ ≃ ١٥ متر

المسافة الأفقية ≃ ٥,٥٣ متر — مثال (٢) ص (١٢٤)

(١٠) ب جـ = $\frac{١٠٠ \times \text{حا } ٤٢^\circ}{\text{حا } ٧٨^\circ}$ ≃ ١٤ كم — مثال (٧) ص (١٢٧)

(١١) ع = $\frac{٤٥ \times \text{حا } ٦٠^\circ}{\text{حا } ٨٠^\circ} \times \text{حا } ٥٠^\circ$

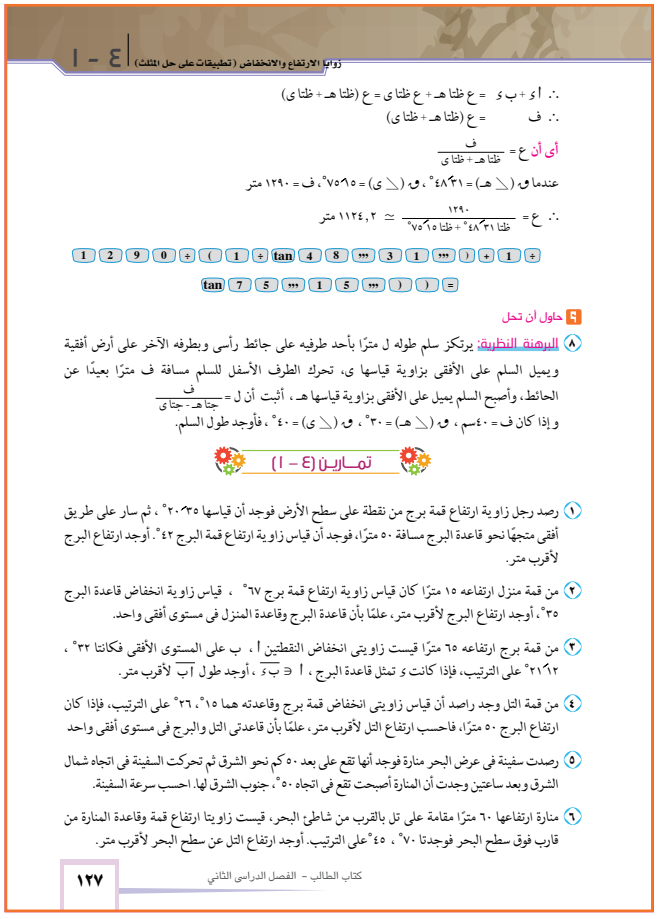
≃ ٣٠ متر — مثال (٣) ص (١٢٥)

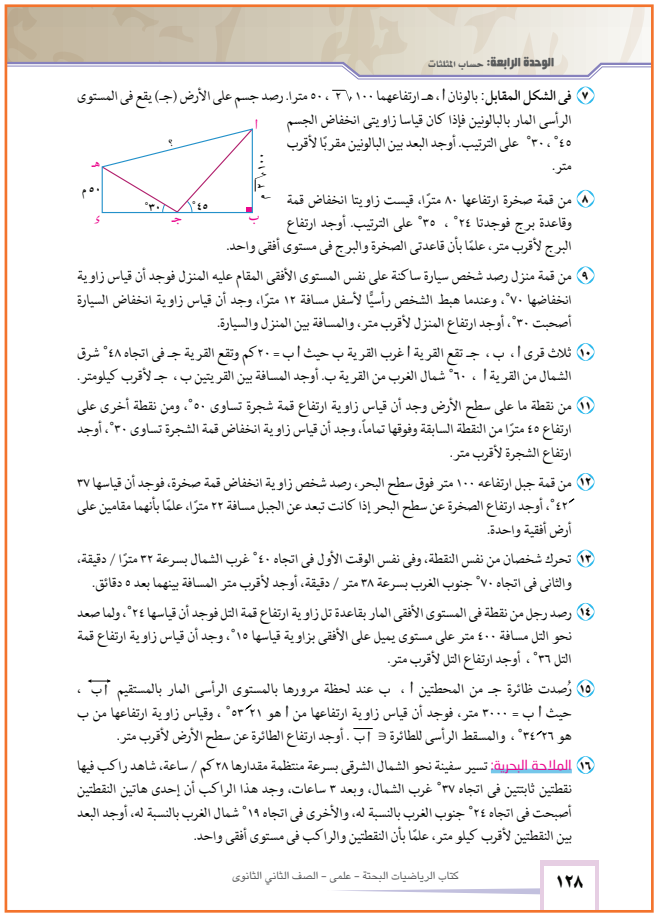
(١٢) ارتفاع الصخرة = ١٠٠ - ٢٢ طا ٣٧ ≃ ٤٢° ≃ ٨٠ متر

(١٣) المسافة بينهما ≃ ٣٠٣ متر — مثال (٧) ص (١٢٧)

(١٤) ارتفاع التل = $\frac{٤٠٠ \times \text{حا } ١٥٩^\circ}{\text{حا } ١٢^\circ} \times \text{حا } ٢٤^\circ$ ≃ ٢٨٠ متر

مثال (٦) ص (١٢٧)

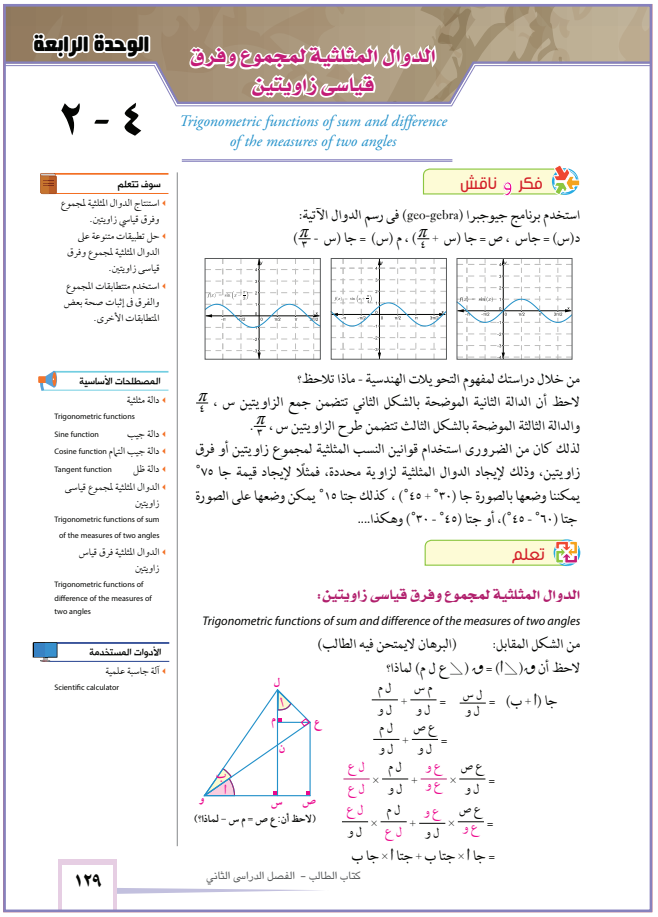




PDF Compressor Pro

٤ - ٢ الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

Trigonometric functions of sum and difference of the measures of two angles



خلفية

سبق أن درس الطالب الدوال المثلثية، وتعرف على بعض خواصها، والآن سوف يدرس الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين، وحل تطبيقات متنوعة عليها، واستخدامها فى إثبات صحة متطابقات أخرى.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستنتج الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.
- يحل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.
- يستخدم متطابقات المجموع والفرق فى إثبات صحة بعض المتطابقات الأخرى.

مفردات اساسية

- داله مثلثية – دالة جيب – دالة جيب تمام – دالة ظل – دالة مجموع قياسى زاويتين – دالة فرق قياسى زاويتين.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض بيانات Data Show. - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٩ إلى صفحة ١٣٥ – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئة

فى بند فكر وناقش

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش» موضحًا مفهوم الازاحة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ واتجاه الشعاع $\overleftarrow{و س}$ بمقدار $\frac{\pi}{٤}$ وذلك لإيجاد الدول المثلثية لزاوية محددة .
- ذكر طلابك بالأتى: اشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة
- الدول المثلثية للزوايا المتتامة فمثلاً:
  - حا ٧٥° = حتا ١٥°، حتا ٦٠° = حا ٣٠° وهكذا
  - العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية وهى
  - حا$^{٢}\theta$ + حتا$^{٢}\theta$ = ١
  - طا$^{٢}\theta$ + ١ = قا$^{٢}\theta$
  - ظتا$^{٢}\theta$ + ١ = قتا$^{٢}\theta$
  - الدالة المثلثية × مقلوب هذه الدالة =١.
  - الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

إجراءات الدرس

- اطلب إلى طلابك استخدام المكتبة المدرسية وكذلك الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) فى البحث عن براهين أخرى لهذه الصيغ، مع متابعة ما توصلوا إليه من براهين وعرضها علي باقى زملائهم فى الفصل.

PDF Compressor Pro

فى مثال (١) ص (١٣٠)

إشر إلى الطلاب بأن فى الفقرة ب يمكن كتابة:

$$\text{حتا ١٥} = \text{حتا}(٦٠^\circ - ٤٥^\circ)$$

$$= \text{حتا } ٦٠^\circ \text{ حتا } ٤٥^\circ + \text{حا } ٦٠^\circ \text{ حا } ٤٥^\circ$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤} = \frac{\sqrt{٢}(١ + \sqrt{٣})}{٢\sqrt{٢}}$$

الأخطاء الشائعة:

الخطأ: أن يكتب الطالب أن: $ا \in]٩٠^\circ، ١٨٠^\circ[$

الصواب: تكتب كالآتى: $٩٠^\circ < ا < ١٨٠^\circ$ أى صورة متباينة أو تكتب على صورة فترة فى القياس الدائرى فقط

$$ا \in]\frac{\pi}{٢}، \pi[$$

لاحظ $]٩٠^\circ، ١٨٠^\circ[$ ليست فترة على ع

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

ناقش مع طلابك حاول أن تحل ص (١٣٠) ، ص (١٣١) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة:

(١) أ $\text{حتا } ١٠٥^\circ = \text{حتا}(٤٥^\circ + ٦٠^\circ) = \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{٦}}{٤}$

ب $\text{حا } ٧٥^\circ \text{ حتا } ١٥^\circ + \text{حتا } ٧٥^\circ \text{ حا } ١٥^\circ$

$= \text{حا}(٧٥^\circ + ١٥^\circ) = \text{حا } ٩٠^\circ = ١$

ج $\text{حتا } ٨٠^\circ \text{ حتا } ٤٠^\circ + \text{حا } ٨٠^\circ \text{ حا } ٢٠^\circ$

$= \text{حتا}(٨٠^\circ - ٢٠^\circ) = \text{حتا } ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

(٢) أ $\frac{٥٦}{٦٥}$ ب $\frac{٦٣}{٦٥}$

تمارين إثرائية

(١) اختصر لأبسط صورة:

أ $\text{حا}(س + ص)\ \text{حتا}\ ص - \text{حتا}(س + ص)\ \text{حا}\ ص$

ب $\text{حتا}(س + ص)\ \text{حتا}\ س + \text{حا}(س + ص)\ \text{حا}\ س$

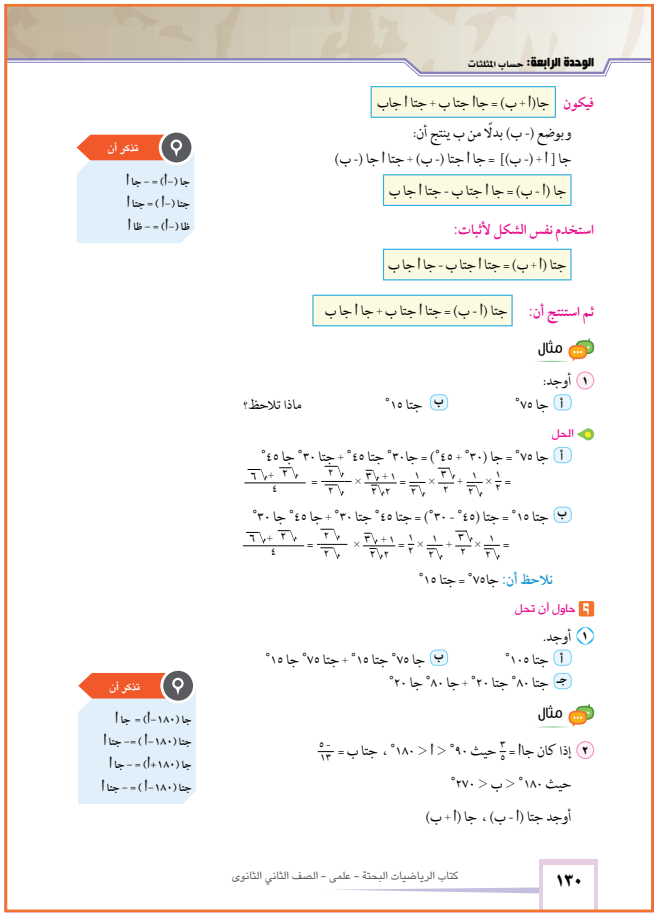
ج $\frac{\text{حا}(س + ص) - \text{حا}(س - ص)}{\text{حتا}\ س\ \text{حتا}\ ص}$

الحل:

أ $\text{حا}((س + ص) - ص) = \text{حا}\ س$

ب $\text{حتا}(س + ص - س) = \text{حتا}\ ص$

ج المقدار = ٢



فيكون $\text{جا}(ا + ب) = \text{جا}\ ا\ \text{جتا}\ ب + \text{جتا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

وبوضع (- ب) بدلًا من ب ينتج أن:

$\text{جا}[ا + (-ب)] = \text{جا}\ ا\ \text{جتا}(-ب) + \text{جتا}\ ا\ \text{جا}(-ب)$

$\text{جا}(ا - ب) = \text{جا}\ ا\ \text{جتا}\ ب - \text{جتا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

استخدم نفس الشكل لأثبات:

$\text{جتا}(ا + ب) = \text{جتا}\ ا\ \text{جتا}\ ب - \text{جا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

ثم استنتج أن: $\text{جتا}(ا - ب) = \text{جتا}\ ا\ \text{جتا}\ ب + \text{جا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

تذكر أن
$\text{جا}(-ا) = -\text{جا}\ ا$
$\text{جتا}(-ا) = \text{جتا}\ ا$
$\text{ظا}(-ا) = -\text{ظا}\ ا$

مثال

(١) أوجد:

أ $\text{جا } ٧٥^\circ$ ب $\text{جتا } ١٥^\circ$ ماذا تلاحظ؟

الحل

أ $\text{جا } ٧٥^\circ = \text{جا}(٣٠^\circ + ٤٥^\circ) = \text{جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٤٥^\circ + \text{جتا } ٣٠^\circ \text{ جا } ٤٥^\circ$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

ب $\text{جتا } ١٥^\circ = \text{جتا}(٤٥^\circ - ٣٠^\circ) = \text{جتا } ٤٥^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ + \text{جا } ٤٥^\circ \text{ جا } ٣٠^\circ$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

نلاحظ أن: $\text{جا } ٧٥^\circ = \text{جتا } ١٥^\circ$

حاول أن تحل

(١) أوجد.

أ $\text{جتا } ١٠٥^\circ$ ب $\text{جا } ٧٥^\circ \text{ جتا } ١٥^\circ + \text{جتا } ٧٥^\circ \text{ جا } ١٥^\circ$

ج $\text{جتا } ٨٠^\circ \text{ جتا } ٢٠^\circ + \text{جا } ٨٠^\circ \text{ جا } ٢٠^\circ$

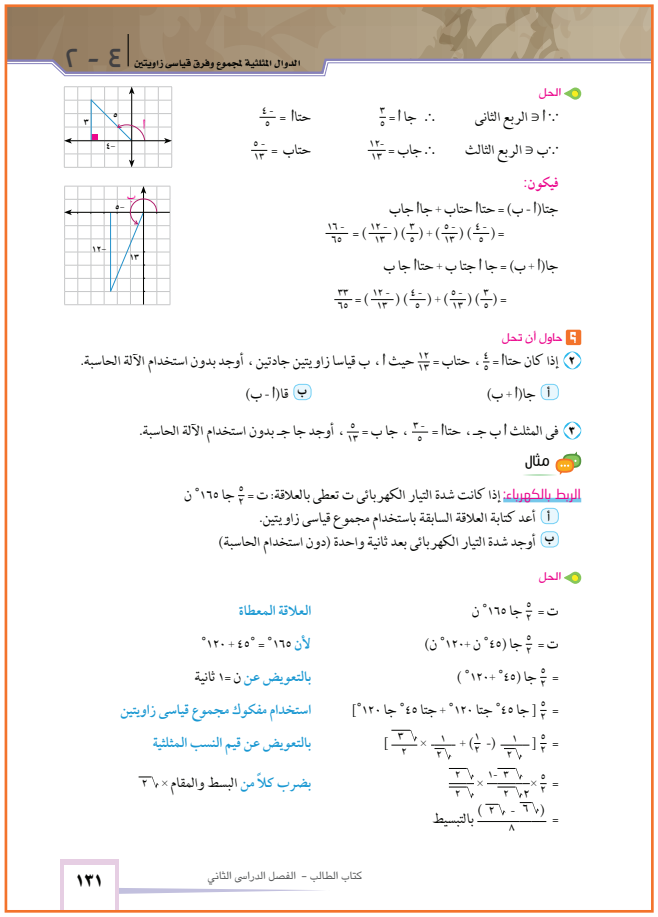
تذكر أن
$\text{جا}(١٨٠ - ا) = \text{جا}\ ا$
$\text{جتا}(١٨٠ - ا) = -\text{جتا}\ ا$
$\text{جا}(١٨٠ + ا) = -\text{جا}\ ا$
$\text{جتا}(١٨٠ - ا) = -\text{جتا}\ ا$

مثال

(٢) إذا كان $\text{جا}\ ا = \frac{٣}{٥}$ حيث $٩٠^\circ < ا < ١٨٠^\circ$ ، $\text{جتا}\ ب = \frac{-٥}{١٣}$

حيث $١٨٠^\circ < ب < ٢٧٠^\circ$

أوجد $\text{جتا}(ا - ب)$ ، $\text{جا}(ا + ب)$



الحل

$\because ا \in$ الربع الثانى $\therefore \text{جا}\ ا = \frac{٣}{٥}$ $\text{حتا}\ ا = \frac{-٤}{٥}$

$\because ب \in$ الربع الثالث $\therefore \text{جا}\ ب = \frac{١٢}{١٣}$ $\text{حتا}\ ب = \frac{-٥}{١٣}$

فيكون:

$\text{جتا}(ا - ب) = \text{حتا}\ ا\ \text{حتا}\ ب + \text{جا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

$= (\frac{-٤}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{٣}{٥})(\frac{١٢}{١٣}) = \frac{١٦}{٦٥}$

$\text{جا}(ا + ب) = \text{جا}\ ا\ \text{جتا}\ ب + \text{حتا}\ ا\ \text{جا}\ ب$

$= (\frac{٣}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{-٤}{٥})(\frac{١٢}{١٣}) = \frac{-٣٣}{٦٥}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\text{حتا}\ ا = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{حتا}\ ب = \frac{١٢}{١٣}$ حيث ا ، ب قياسا زاويتين جادتين ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة.

أ $\text{جا}(ا + ب)$ ب $\text{ظا}(ا - ب)$

(٣) فى المثلث ا ب جـ ، $\text{حتا}\ ا = \frac{-٣}{٥}$ ، $\text{جا}\ ب = \frac{٥}{١٣}$ ، أوجد جا جـ بدون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال

الربط بالكهرباء: إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة: $ت = \frac{٥}{٢} \text{ جا } ١٦٥^\circ \text{ ن}$

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسى زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الآلة الحاسبة)

الحل

$ت = \frac{٥}{٢} \text{ جا } ١٦٥^\circ \text{ ن}$ العلاقة المعطاة

$ت = \frac{٥}{٢} \text{ جا}(٤٥^\circ + ١٢٠^\circ) \text{ ن}$ لأن $١٦٥^\circ = ٤٥^\circ + ١٢٠^\circ$

$= \frac{٥}{٢} \text{ جا } (٤٥^\circ + ١٢٠^\circ)$ بالتعويض عن ن = ١ ثانية

$= \frac{٥}{٢} [\text{جا } ٤٥^\circ \text{ جتا } ١٢٠^\circ + \text{جتا } ٤٥^\circ \text{ جا } ١٢٠^\circ]$ استخدام مفكوك مجموع قياسى زاويتين

$= \frac{٥}{٢} [\frac{١}{٢\sqrt{٢}} (-\frac{١}{٢}) + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}]$ بالتعويض عن قيم النسب المثلثية

$= \frac{٥}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{-١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$ بضرب كلاً من البسط والمقام $\times \sqrt{٢}$

$= \frac{٥(\sqrt{٣} - \sqrt{٦})}{٨}$ بالتبسيط

PDF Compressor Pro

دالة الظل لمجموع وفرق قياسى زاويتين

ناقش مع طلابك البرهان الخاص بصيغة الظل الموضحة في كتاب الطالب، ثم اعرض الصيغ الست لدوال مجموع أو فرق قياسى زاويتين باستخدام جهاز عرض بيانات Data Show موضحًا الأنماط التى يمكن أن تساعدهم فى تذكر هذه الصيغ.

التقييم المستمر (المناقشة والحوار):

تابع مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وناقش معهم الحلول المختلفة وارشدهم إلى الحل الصحيح وخذ بأيدى الطلاب الضعاف للوصول بهم إلى المستوى المطلوب من المعرفة.

٤ درب طلابك على وضع بعض الزوايا على صورة مجموع أو فرق زاويتين باستخدام الزوايا الخاصة المناسبة .

ت = $\frac{٣}{٢}$ حتا (٣٣٠° - ٤٥° ن) وبعد ثانية واحدة

ت = $\frac{٣}{٢}$ حتا (٣٣٠° ن - ٤٥°) = $\frac{٣}{٨}$ ($\sqrt{٦}$ - $\sqrt{٢}$)

٥ $\frac{١٦}{٦٣}$

٦ ظا أ = ظا [١٨٠° - (ب + جـ)]

= - ظا (ب + جـ) = - $\frac{\text{ظاب} + \text{ظا جـ}}{١ - \text{ظاب ظا جـ}}$

ظا أ = ١ ∴ ق(∠أ) = ٤٥°

٧ ظا (أ + ب) = $\frac{\frac{٥}{٦} + \frac{١}{١١}}{١ - \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{١١}}$ = ١

أ + ب = ٤٥

٨ أ حا (س - ٢٠°) = $\frac{١}{٢}$

س - ٢٠° = ٣٠° ، س - ٢٠° = ١٥٠°

س = ٥٠° ، س = ١٧٠°

ب حتا (٢س - س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س = ٣٠° ، س = ١٥٠°

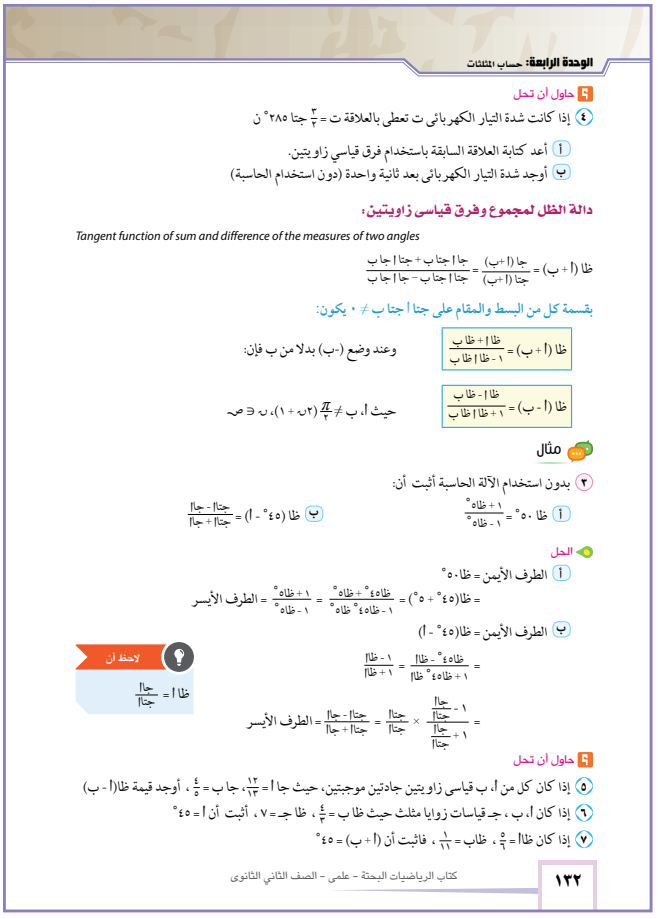
يمكنك الاستعانة أيضًا ببعض الأمثلة الأخرى التى توضح هذه الصيغ:

١ أثبت أن: $\frac{\text{حا}(أ + ب) + \text{حا}(أ - ب)}{\text{حتا}(أ + ب) + \text{حتا}(أ - ب)}$ = ظا أ

الحل:

الطرف الأيمن = $\frac{\text{حا}(أ + ب) + \text{حا}(أ - ب)}{\text{حتا}(أ + ب) + \text{حتا}(أ - ب)}$

= $\frac{\text{حا أ حتا ب} + \text{حتا أ حا ب} + \text{حا أ حتا ب} - \text{حتا أ حا ب}}{\text{حتا أ حتا ب} - \text{حا أ حا ب} + \text{حتا أ حتا ب} + \text{حا أ حا ب}}$



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

حاول أن تحل

٤ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسي زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

دالة الظل لمجموع وفرق قياسى زاويتين:

Tangent function of sum and difference of the measures of two angles

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{جا}(أ + ب)}{\text{جتا}(أ + ب)}$ = $\frac{\text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب}}$

بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب ≠ ٠ يكون:

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$ وعند وضع (-ب) بدلا من ب فإن:

ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}$ حيث أ، ب ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ن + ١)، ن ∈ ص

مثال

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

أ ظا ٥٠° = $\frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°}$ ب ظا (٤٥° - أ) = $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$

الحل

أ الطرف الأيمن = ظا٥٠°

= ظا(٤٥° + ٥°) = $\frac{\text{ظا}٤٥° + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٤٥° \text{ظا}٥°}$ = $\frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°}$ = الطرف الأيسر

ب الطرف الأيمن = ظا(٤٥° - أ)

= $\frac{\text{ظا}٤٥° - \text{ظا أ}}{١ + \text{ظا}٤٥° \text{ظا أ}}$ = $\frac{١ - \text{ظا أ}}{١ + \text{ظا أ}}$

= $\frac{١ - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{١ + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}$ × $\frac{\text{جتا أ}}{\text{جتا أ}}$ = $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$ = الطرف الأيسر

لاحظ أن

ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان كل من أ، ب قياسى زاويتين جادتين موجبتين، حيث جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$، جا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، أوجد قيمة ظا(أ - ب)

٦ إذا كان أ، ب ، جـ قياسات زوايا مثلث حيث ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = ٧ ، أثبت أن أ = ٤٥°

٧ إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظاب = $\frac{١}{١١}$ ، فاثبت أن (أ + ب) = ٤٥°



مثال

٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث ٠° < س < ٣٦٠°

أ ظاس + ظا٢٠° ظاس ظا٢٠° = ١ ب جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س

الحل

أ ∵ ظا س + ظا٢٠° + ظاس ظا٢٠° = ١

∴ ظا س + ظا٢٠° = ١ - ظا س ظا ٢٠°

∴ $\frac{\text{ظاس} + \text{ظا}٢٠°}{١ - \text{ظا س ظا}٢٠°}$ = ١ (وذلك بقسمة طرفى المعادلة على: ١ - ظا س ظا ٢٠°)

أى أن: ظا (س + ٢٠°) = ١

∴ س + ٢٠° تقع فى الربع الأول

∴ ظا (س + ٢٠°) = ظا ٤٥° س + ٢٠° = ٤٥° س = ٢٥°

أو س + ٢٠° تقع فى الربع الثالث

ظا (س + ٢٠°) = ظا ٢٢٥° س + ٢٠° = ٢٢٥° س = ٢٠٥°

مجموعة الحل هى {٢٥° ، ٢٠٥°}

ب ∵ جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س

∴ جا س جتا ٣٠° + جتا س جا ٣٠° = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س + $\frac{١}{٢}$ جتا س = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س = $\frac{٣}{٢}$ جتا س

بقسمة الطرفين على جتا س ، حيث: جتا س ≠ ٠

∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$ أى أن ظا س = $\sqrt{٣}$ ، ٠ < $\sqrt{٣}$

∴ س تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث ويكون

س = ٦٠° أو س = ٦٠° + ١٨٠° = ٢٤٠°

مجموعة الحل هى {٦٠° ، ٢٤٠°}

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث ٠° < س < ٣٦٠°

أ جا س جتا ٢٠° - جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ ب جتا ٢ س جتا س + جا ٢ س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

PDF Compressor Pro

تمارين (٤-٢) ص١٣٤، ١٣٥:

ناقش طلابك فى حلول التمارين التالية والتى تتناول استخدام متطابقات مجموع أو فرق قياسى زوايتين فى:

- إيجاد قيم عبارات مثلثية
- إثبات صحة متطابقة مثلثية

إجابات:

(١) $\frac{١}{٢}$ (٢) $\sqrt{٣}$ (٣) صفر (٤) حا س (٥) ١

(٦) ا (٧) جـ (٨) ا (٩) ء (١٠) ا (١١) جـ

(١٢) ٢ حا ا حاب (١٣) ٢ حتا ا حا ب (١٤) صفر

(١٥) حتا (٤٠ + س) (١٦) $\frac{-٢١}{٢٢١}$، $\frac{-١٤٠}{٢٢١}$، $\frac{-٢٢٠}{٢١}$ (١٧) $\frac{١}{٥}$

(١٨) $\frac{٥}{٤}$، $\frac{-١٧}{٣٠}$ (٢٠) أ ١ ب $\frac{٢٤}{٢٥}$

جـ $\frac{٧}{٢٤}$

(٢٠) أ $\frac{٨٤}{٨٥}$ ب $\frac{١٢}{١١}$ جـ $\frac{٨٥}{٧٧}$ د $\frac{١٣}{٨٤}$

(٢٢) $\frac{-١٠}{٦}$، $\frac{٥}{٦}$

(٢٣) أثبت أن طا (ا + ب) = -١

(٢٥) **تفكير ابداعى:**

يقيس هذا التمرين مدى تذكر الطالب وتحديد قيمة الزاوية تبعًا لإشارة دالة الظل ، ودالة جيب التمام حيث إنه عندما تكون:

طا θ < ٠، حتا θ > ٠ فإن θ تقع فى الربع الثالث .

الإجابة: طا (ا+ب) = ١ < ٠ ، حتا (ا + ب) = $\frac{-١٠}{٢\sqrt{٨}}$ < ٠

∴ (ا + ب) تقع في الربع الثالث

و∠ (ا + ب) = $\frac{\pi}{٤}$ + π = $\frac{\pi٥}{٤}$

تمارين إثرائية

إذا كانت ا ، ب ، جـ زوايا مثلث

وكان طا ا + طاب + طا جـ = طا ا طا ب طا جـ

أختر قيما لكل من ا ، ب ، جـ كى تتحقق من صحة المتطابقة.

تهدف هذه المسألة إلى:

- أن يتحقق الطلاب أن المتطابقة صحيحة لجميع قيم الزوايا ا، ب، جـ التى يختارها الطالب.
- مهارة استخدام الآلة الحاسبة.

تمـارين (٤ - ٢)

أكمل كل مما يأتي:

(١) حا ٤٠° حتا ١٠° - حتا ٤٠° جا ١٠° = ...

(٢) $\frac{\text{ظا ٧٥° - ظا ١٥°}}{\text{١ + ظا ٧٥° ظا ١٥°}}$ = ...

(٣) حتا ٧٠° حتا ٢٠° - جا ٧٠° جا ٢٠° = ...

(٤) جا(س + ص) حتاص - جتا(س + ص) جاص = ...

(٥) إذا كان ظا ا = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (ا + ب) = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) جا (θ + $\frac{\pi}{٢}$) =

أ $\frac{١}{٢}$ (حتا θ - $\sqrt{٣}$ جا θ) ب $\frac{١}{٢}$ (حتا θ + حا θ)

جـ $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتا θ + حا θ) د $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتا θ + $\sqrt{٣}$ جا θ)

(٧) حا ٧٥° حتا ١٥° + حتا ٧٥° جا ١٥° تساوي

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١ د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٨) حا ٣س جا ٣س + حتا ٣س حتا ٣س تساوي

أ حتا ٣س ب جتا ٨ س جـ حا ٨ س د حا ٣س

(٩) ظا ١٥° تساوي

أ ٢ + $\sqrt{٣}$ ب ٢ - $\sqrt{٣}$ جـ $\sqrt{٣}$ - ٢ د ٢ - $\sqrt{٣}$

(١٠) إذا كان ظا ا = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (ا + ب) يساوي

أ ١ ب $\frac{٥}{٦}$ جـ $\frac{١}{٦}$ د $\frac{٥}{٦}$

(١١) ظتا ($\frac{\pi٥}{١٢}$ - π٢) =

أ ٢ + $\sqrt{٣}$ ب ٢ - $\sqrt{٣}$ جـ ٢ - $\sqrt{٣}$ د ٢ - $\sqrt{٣}$

ضع فى أبسط صورة:

(١٢) جتا(ا - ب) - جتا(ا + ب)

(١٣) جا(ا + ب) - جا(ا - ب)

(١٤) حتا ا حتا($\frac{\pi}{٢}$ + ا) + جا ا جا($\frac{\pi}{٢}$ + ا)

(١٥) حتا ٤٠° حتاس - جا ٤٠° جاس

(١٦) إذا علمت أن جا ا = $\frac{٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° < ا < ٢٧٠° ، جتا ب = $\frac{٥}{١٣}$ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جتا(ا - ب) ب جا(ا + ب) جـ ظا(ا - ب)

(١٧) إذا كان ظا(θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٤}$ ، فأوجد قيمة ظاθ.

(١٨) إذا علمت أن $\frac{\text{جتا(ا + ب)}}{\text{جتا(ا - ب)}}$ = $\frac{١}{٣}$ ، فاثبت أن ٢ حا ا جاب = حتا ا حتاب

ثم أثبت أن: ٢ظا ا = ظتاب. وإذا علمت أن ظا ا = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد ظا ب ، ومن ثم أوجد ظا(ا - ب)

(١٩) إذا كان ا ، ب زاويتان جادتان ، حيث ظا ا = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ ، برهن أن ا + ب = ٤٥°.

(٢٠) إذا كانت حتا ا = ٠,٦ ، حتاب = ٠,٨ ، حيث ا ، ب قياسي زاويتان جادتان،

أوجد بدون استخدام الالة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(ا + ب) ب جتا(ا - ب) جـ ظا(ا - ب)

(٢١) إذا كان ا ، ب زاويتين جادتين حيث حتا ا = $\frac{٣}{٥}$ ، ظاب = $\frac{٨}{١٥}$ ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(ا + ب) ب ظا(ا - ب) جـ قا(ا - ب) د ظتا(ا + ب)

(٢٢) إذا كان جا ا جاب = $\frac{١}{٣}$ ، حتا ا حتاب = $\frac{٢}{٣}$ ، حيث ا ، ب قياسي زاويتان جادتان.

أوجد قيمة كل من: جتا(ا + ب) ، جتا(ا - ب)

(٢٣) إذا كان جا ا = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠° < ا < ٩٠° ، ظا ب = -٧ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠° ، أثبت أن ا + ب = ١٣٥°

(٢٤) إذا كان س + ص + ع = ٩٠° ، أثبت أن ظا س ظا ص + ظا ص ظا ع + ظا ع ظا س = ١

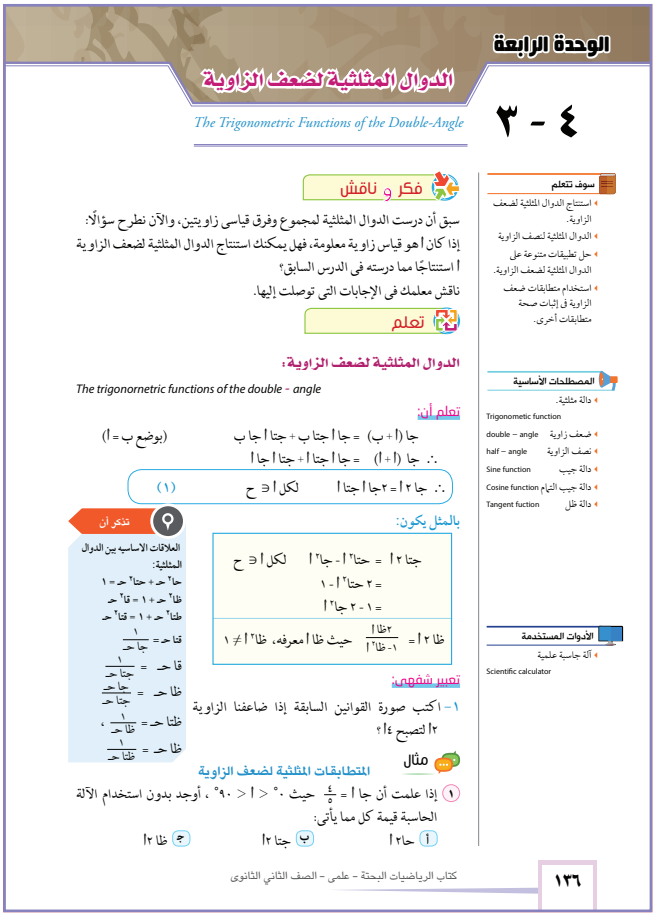
(٢٥) تفكير إبداعى: إذا كان ظا ا = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ا < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ حيث ٠ < ا < $\frac{\pi}{٢}$ ،

أوجد قيمة كل من ظا(ا + ب) ، جتا(ا + ب) ، ومن ذلك أثبت أن ا + ب = $\frac{\pi٥}{٤}$

PDF Compressor Pro

٤ - ٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

The Trigonometric Functions of the Double-Angle


الوحدة الرابعة

٤ - ٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

The Trigonometric Functions of the Double-Angle

سوف تتعلم
- استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- الدوال المثلثية لنصف الزاوية
- حل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- استخدام متطابقات ضعف الزاوية فى إثبات صحة متطابقات أخرى.

المصطلحات الأساسية
- دالة مثلثية.
- Trigonometic function
- ضعف زاوية double – angle
- نصف الزاوية half – angle
- دالة جيب Sine function
- دالة جيب التمام Cosine function
- دالة ظل Tangent fuction

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator

فكر و ناقش

سبق أن درست الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياس زاويتين، والآن نطرح سؤالًا:
إذا كان ا هو قياس زاوية معلومة، فهل يمكنك استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية ا استنتاجًا مما درسته فى الدرس السابق؟
ناقش معلمك فى الإجابات التى توصلت إليها.

تعلم

الدوال المثلثية لضعف الزاوية:

The trigonornetric functions of the double - angle

تعلم أن:

جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب (بوضع ب = ا)

∴ جا (ا+ا) = جا ا جتا ا + جتا ا جا ا

∴ جا ٢ ا = ٢ جا ا جتا ا لكل ا ∈ ح (١)

بالمثل يكون:

جتا ٢ ا = جتا^٢ ا - جا^٢ ا لكل ا ∈ ح
= ٢ جتا^٢ ا - ١
= ١ - ٢ جا^٢ ا

ظا ٢ ا = $\frac{٢ظا ا}{١ - ظا^٢ ا}$ حيث ظا ا معرفه، ظا^٢ ا ≠ ١

تذكر أن

العلاقات الاساسيه بين الدوال المثلثية:
جا^٢ حـ + جتا^٢ حـ = ١
ظا^٢ حـ + ١ = قا^٢ حـ
طا^٢ حـ + ١ = قتا^٢ حـ
قتا حـ = $\frac{١}{جا حـ}$
قا حـ = $\frac{١}{جتا حـ}$
ظا حـ = $\frac{جا حـ}{جتا حـ}$
ظتا حـ = $\frac{١}{ظا حـ}$ ،
ظا حـ = $\frac{١}{ظتا حـ}$

تعبير شفهي:

١ - اكتب صورة القوانين السابقة إذا ضاعفنا الزاوية ا لتصبح ٤ا؟

مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

(١) إذا علمت أن جا ا = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٠° < ا < ٩٠° ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ) حا ٢ا ب) جتا ٢ا جـ) ظا ٢ا

فى بند فكر وناقش: ناقش مع طلابك ما ورد فى هذا البند وتوصل معهم إلى أن: حا(ا + ا) = ٢ حا ا حتا ا وبالمثل يمكن استنتاج حتا ٢ا، طا٢ا.

معلومة إثرائية:

تستخدم النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسا و يعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته ، فعندما يتم ضخ الماء فى الهواء بسرعة ع، وزاوية مقدارها مع الخط الأفقى فإن المسافة الأفقية ف ، وأقصى أرتفاع ل يتحدد بالعلاقات:

ف = $\frac{ع^٢}{د}$ حا ٢θ، ل = $\frac{ع^٢}{٢د}$ حا^٢θ . حيث د عجلة السقوط الحر.

فإذا علمت أن $\frac{ل}{ف}$ تساعد فى ارتفاع النافورة ، وعرضها فعبر عن النسبة $\frac{ل}{ف}$ كدالة فى θ؟

مخرجات الدرس

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذًا للأنشطة فيه ، يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج الدوال المثلثية لضعف الزاوية
- يستنتج الدوال المثلثية لنصف الزواية
- يحل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لضعف الزاوية
- استخدام الدوال المثلثية لضعف الزاوية فى إثبات صحة متطابقات أخرى.

مفردات اساسية

- دالة مثلثية – ضعف زاوية – نصف الزاوية – دالة جيب – دالة جيب تمام – دالة ظل.

المواد التعليمية المستخدمة

- السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسب علمية

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان الدرس

- الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من صفحة ١٤٨ إلى صفحة ١٤٨ – الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئة

- أشر إلى الطلاب أنه في خلفية هذا الدرس يراد تبسيط النسبة $\frac{ل}{ف}$ إلى أبسط صورة باستخدام الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- دع الطلاب يتوصلوا إلى ذلك التبسيط كما يأتى:

$$\frac{ل}{ف} = \frac{ع^٢ حا^٢ θ}{٢د} \div \frac{ع^٢ حا^٢ θ}{د}$$

$$\frac{ل}{ف} = \frac{٢ حا θ}{٢ حا θ} = \frac{٢ حا θ}{٢ \times ٢ حا θ حتا θ}$$

$$\frac{حا θ}{٤ حتا θ} = \frac{١}{٤} ظا θ$$

اجراءات الدرس

- وضح إلى الطلاب بأنه من حالات استخدام المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة متطابقة مثلثية كما هو فى تمهيد هذا الدرس .

فى تعبير شفهي:

- ساعد الطلاب فى التوصل إلى الصيغ الآتية:

حا ٤ ا = ٢ حا ٢ ا حتا ٢ا ، حتا ٤ ا =
حتا^٢ ٢ ا - حا^٢ ٢ ا ، طا ٤ ا = $\frac{٢ طا ٢ا}{١ - طا^٢ ٢ا}$

PDF Compressor Pro

إرشادات للدراسة:

- إشر إلى الطلاب فى الفقرة (جـ) أنه لايجاد طا ½ أ استخدمنا المتطابقة: طا ½ أ = حا ½ أ ÷ حتا ½ أ لأن قيم حا ½ أ ، حتا ½ أ متواجدة لدينا فى الفقرتين السابقتين وذلك لسرعة اجراء نواتج العملية.

فى مثال (٢):

- وضح إلى الطلاب أنه يمكن استخدام الطرف الأيسر لمتطابقة ضعف الزاوية وذلك لإيجاد المقادير المثلثية

فى بند المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

- اشر إلى الطلاب بأنه من المفيد فى بعض الأحيان، أن يكون لديهم متطابقة، لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

فى مثال ٣:

- اشر إلى الطلاب بأنه إذا كانت θ تقع في الربع الثالث حيث:

$180° < \theta < 270°$ فإن تقع فى الربع الثانى حيث

$90° < \frac{\theta}{2} < 135°$

التقييم المستمر:

ناقش مع الطلاب مناقشة ما ورد فى بند حاول أن تحل رقم (١)، (٢) ص (١٣٧) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

إجابات:

(١) أ حا ½ أ = $\frac{24}{25}$ ب حتا ½ أ = $\frac{7}{25}$ جـ طا ½ أ = $-\frac{24}{7}$

(٢) أ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ جـ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

د ١ هـ $\sqrt{3}$

فى بند: الدوال المثلثية لنصف الزاوية

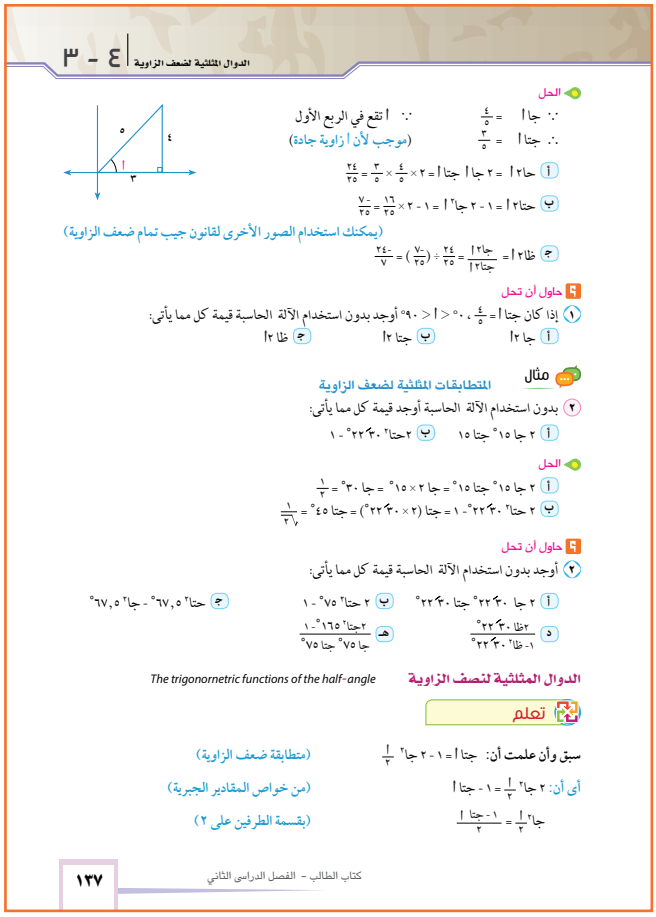
- وضح إلى الطلاب بأنه لإيجاد طا $\frac{أ}{2}$، كانت نتيجة قسمة حا $\frac{أ}{2}$ على حتا $\frac{أ}{2}$.

فى مثال (٣)

جـ وضح إلى الطلاب بأنه عند إيجاد حا $\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{2}{5}}{2}}$ فإننا نبحث عن الربع الذى تقع فيه زاوية $\frac{\theta}{2}$ لتحديد إشاره حا $\frac{\theta}{2}$ حيث أن: $180° < \theta < 270°$ لذلك فإن:

$90° < \theta < 135°$ وبالتالي يكون الجيب موجب فى الربع الثانى فتكون حا $\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ (أى القيمة الموجبة)

- أشر إلى الطلاب بأنه يمكن استخدام المطابقات المثلثية



الدوال المثلثية لضعف الزاوية ٣ - ٤

الحل

∵ جا أ = $\frac{4}{5}$ ∵ أ تقع في الربع الأول

∴ جتا أ = $\frac{3}{5}$ (موجب لأن أ زاوية حادة)

أ حا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{4}{5}$ × $\frac{3}{5}$ = $\frac{24}{25}$

ب حتا ٢أ = ١ - ٢ جا² أ = ١ - ٢ × $\frac{16}{25}$ = $\frac{7}{25}$

(يمكنك استخدام الصور الأخرى لقانون جيب تمام ضعف الزاوية)

جـ ظا ٢أ = $\frac{جا ٢أ}{جتا ٢أ}$ = $\frac{24}{25}$ ÷ $\frac{7}{25}$ = $-\frac{24}{7}$

حاول أن تحل

(١) إذا كان جتا أ = $\frac{4}{5}$ ، ٠° < أ < ٩٠° أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ جا ٢أ ب جتا ٢أ جـ ظا ٢أ

مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ ٢ جا ١٥° جتا ١٥° ب ٢ حتا² ٢٢٫٥° - ١

الحل

أ ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا ٢ × ١٥° = جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

ب ٢ حتا² ٢٢٫٥° - ١ = جتا (٢ × ٢٢٫٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ ٢ جا ٢٢٫٥° جتا ٢٢٫٥° ب ٢ حتا² ٧٥° - ١ جـ حتا² ٦٧٫٥° - جا² ٦٧٫٥°

د $\frac{2ظا ٢٢٫٥°}{1 - ظا² ٢٢٫٥°}$ هـ $\frac{2جتا² ١٦٥° - 1}{جا ٧٥° جتا ٧٥°}$

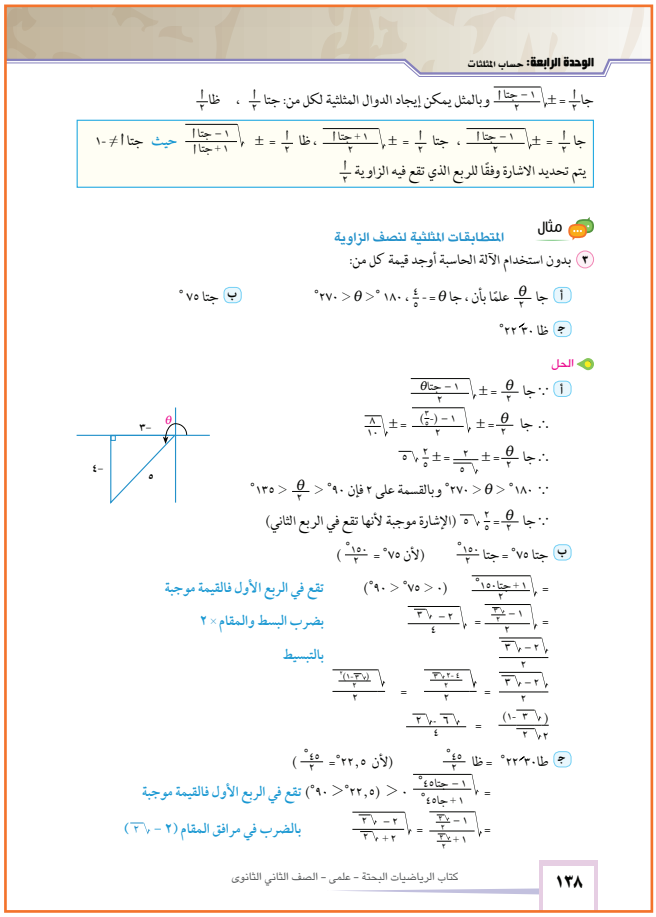
الدوال المثلثية لنصف الزاوية The trigonometric functions of the half-angle

تعلم

سبق وأن علمت أن: جتا أ = ١ - ٢ جا² $\frac{أ}{2}$ (متطابقة ضعف الزاوية)

أى أن: ٢ جا² $\frac{أ}{2}$ = ١ - جتا أ (من خواص المقادير الجبرية)

جا² $\frac{أ}{2}$ = $\frac{1 - جتا أ}{2}$ (بقسمة الطرفين على ٢)



جا $\frac{أ}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 - جتا أ}{2}}$ وبالمثل يمكن إيجاد الدوال المثلثية لكل من: جتا $\frac{أ}{2}$ ، ظا $\frac{أ}{2}$

جا $\frac{أ}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 - جتا أ}{2}}$ ، جتا $\frac{أ}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 + جتا أ}{2}}$ ، ظا $\frac{أ}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 - جتا أ}{1 + جتا أ}}$ حيث جتا أ ≠ -١

يتم تحديد الاشارة وفقًا للربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{2}$

مثال

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ جا $\frac{\theta}{2}$ علمًا بأن، جا $\theta = -\frac{4}{5}$ ، $180° < \theta < 270°$ ب جتا ٧٥°

جـ ظا ٢٢٫٥°

الحل

أ ∵ جا $\frac{\theta}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 - جتا \theta}{2}}$

∴ جا $\frac{\theta}{2}$ = $\pm\sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}}$ = $\pm\sqrt{\frac{8}{10}}$

∴ جا $\frac{\theta}{2}$ = $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ = $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

∵ $180° < \theta < 270°$ وبالقسمة على ٢ فإن $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$

∴ جا $\frac{\theta}{2}$ = $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (الإشارة موجبة لأنها تقع في الربع الثاني)

ب جتا ٧٥° = جتا $\frac{150°}{2}$ (لأن ٧٥° = $\frac{150°}{2}$)

= $\sqrt{\frac{1 + جتا 150°}{2}}$ ($90° > 75° > 0$) تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

= $\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

= $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ بضرب البسط والمقام × ٢

= $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ بالتبسيط

= $\frac{\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}}{2}$ = $\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

جـ ظا ٢٢٫٥° = ظا $\frac{45°}{2}$ (لأن ٢٢٫٥° = $\frac{45°}{2}$)

= $\sqrt{\frac{1 - جتا 45°}{1 + جتا 45°}}$ ($90° > 22,5° > 0$) تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

= $\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$ = $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$ بالضرب في مرافق المقام (٢ - $\sqrt{2}$)

PDF Compressor Pro

لضعف الزاوية فى:

- اثبات صحة متطابقة مثلثية
- إيجاد قيمة دالة مثلثية
- حل معادلة مثلثية والأمثلة ٤، ٥، ٦ توضح ذلك.

الأخطاء الشائعة:

قد يخطأ الطالب فى إثبات صحة متطابقة ويتعثر فى اثبات صحتها لذلك يمكنك إعطاء بعض الاقتراحات إلى الطلاب لإثبات صحة متطابقة.

- ابدأ من الطرف الأول فى المتطابقة للوصول إلى الطرف الآخر
- حلل أو اضرب عند الضرورة وربما نحتاج إلى ضرب كل من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، جيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- لايتم تطبيق خصائص المساواة على المتطابقات بنفس طريقة تطبيقها علي المعادلات .
- لاتنفذ أى عمليات المساواة على كلا طرفى المعادلة المعطاة قبل أن يتم إثبات أنها متطابقة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (١٣٩)، ص (١٤٠) وتوصل معهم إلى الحلول الصحيحة:

(٣) أ حتا $\frac{\theta}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ب $\frac{١}{٢}\sqrt{٢+\sqrt{٢}}$

ج $-٢\sqrt{٣}$

(٤) المقدار = حتا^{٢} ١٥° × حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) ٤ حا هـ = ٣ (١ - حتا هـ)

٤ × ٢ حا $\frac{هـ}{٢}$ حتا $\frac{هـ}{٢}$ = ٣ (١ - ١ + ٢ حا$^{٢}\frac{هـ}{٢}$)

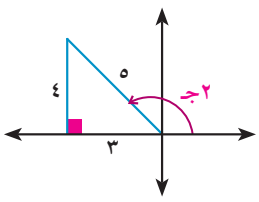
٤ حتا $\frac{هـ}{٢}$ = ٣ حا $\frac{هـ}{٢}$ أى أن طا $\frac{هـ}{٢} = \frac{٤}{٣}$

فى بند فكر: ص (١٤٠)

يمكنك أن توضح إلى طلابك بأنه يمكن استخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية لإيجاد قيمة طا جـ كالآتى:

∵ طا ٢ جـ = $-\frac{٤}{٣}$ ∴ طا جـ = $\sqrt{\frac{١ - \text{حتا ٢ جـ}}{١ + \text{حتا ٢ جـ}}}$

حيث جـ زاوية حادة



طا جـ = $\sqrt{\frac{١ + \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥}}}$ = ٢



حاول أن تحل

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من: أ جتا $\frac{\theta}{٣}$ علمًا بأن جا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

ب حتا ٢٢٣٠° جـ ظا ١٥°.

مثال إثبات صحة متطابقة مثلثية

(٤) أثبت صحة المتطابقة: قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س ، ثم استخدم المتطابقة السابقة لإيجاد قيمة ظتا ١٥°.

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}س} + \frac{\text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س} = \frac{١ + \text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س}$

= $\frac{١ + (٢\text{جتا}^{٢}س - ١)}{٢\text{جا س جتا س}} = \frac{٢\text{جتا}^{٢}س}{٢\text{جا س جتا س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = ظتا س (الطرف الأيسر)

بوضع س = ١٥° فى المتطابقة: قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س

∴ ظتا ١٥° = قتا ٣٠° + ظتا ٣٠° = ٢ + $\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن: جتا ٢ س = $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}س}{١ + \text{ظا}^{٢}س}$ ومن ذلك أوجد قيمة $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}١٥°}{١ + \text{ظا}^{٢}١٥°}$

مثال إيجاد قيمة نسبة مثلثية

(٥) إذا كان ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة ، ظا حـ ، حيث حـ قياس زاوية جادة موجبة.

الحل

∵ ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ ∴ ٤ جتا ٢ حـ = -٣ جا ٢ حـ

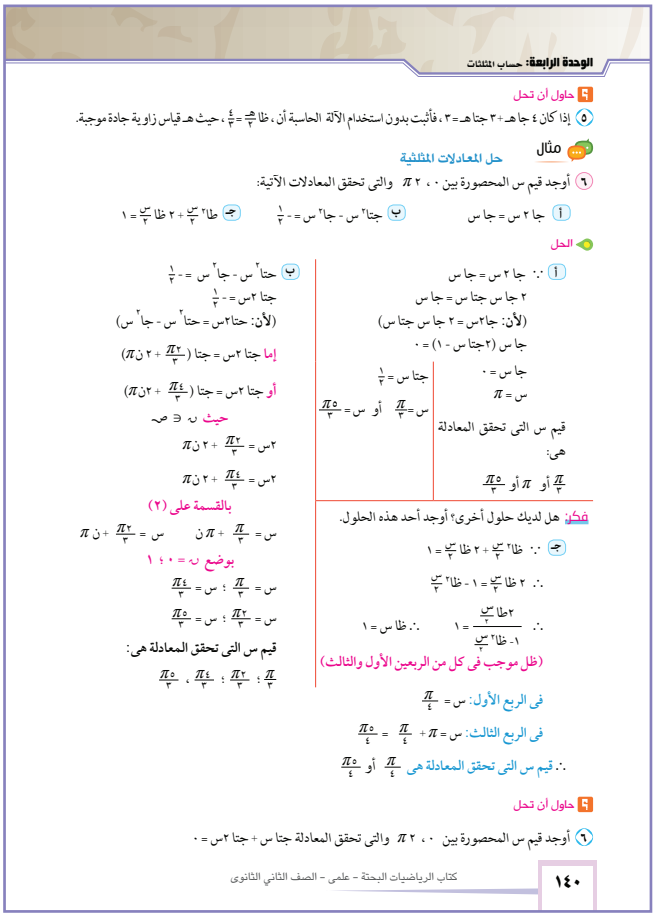
∴ $\frac{\text{جا ٢ حـ}}{\text{جتا ٢ حـ}} = \frac{٤}{-٣}$ ∴ ظا ٢ حـ = $-\frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{٢\text{ظا حـ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{حـ}} = -\frac{٤}{٣}$ ∴ ٦ظا حـ = -٤ + ٤ ظا^{٢} حـ

∴ ٢ظا^{٢} حـ - ٣ظا^{٢} حـ - ٢ = صفر

(٢ ظا حـ + ١) (ظا حـ - ٢) = صفر ∴ ظا حـ = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض) أو ظا جـ = ٢

فكر: استخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية لإيجاد قيمة ظا حـ



حاول أن تحل

(٥) إذا كان ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣ ، فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ، ظا $\frac{هـ}{٢} = \frac{٤}{٣}$ ، حيث هـ قياس زاوية جادة موجبة.

مثال حل المعادلات المثلثية

(٦) أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتى تحقق المعادلات الآتية:

أ جا ٢ س = جا س ب جتا^{٢} س - جا^{٢} س = $-\frac{١}{٢}$ جـ ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

الحل

أ ∵ جا ٢ س = جا س

٢ جا س جتا س = جا س

(لأن: جا٢س = ٢ جا س جتا س)

جا س (٢ جتا س - ١) = ٠

جا س = ٠ ⇒ س = π

جتا س = $\frac{١}{٢}$ ⇒ س = $\frac{\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى: $\frac{\pi}{٣}$ أو π أو $\frac{٥\pi}{٣}$

فكر: هل لديك حلول أخرى؟ أوجد أحد هذه الحلول.

جـ ∵ ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

∴ ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ - ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{٢\text{ظا}\frac{س}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢}\frac{س}{٢}} = ١$ ∴ ظا س = ١

(ظل موجب فى كل من الربعين الأول والثالث)

فى الربع الأول: س = $\frac{\pi}{٤}$

فى الربع الثالث: س = $\pi + \frac{\pi}{٤} = \frac{٥\pi}{٤}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى $\frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{٥\pi}{٤}$

حاول أن تحل

(٦) أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتى تحقق المعادلة جتا س + جتا ٢س = ٠

ب حتا^{٢} س - جا^{٢} س = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٢س = $-\frac{١}{٢}$

(لأن: حتا٢س = حتا^{٢} س - جا^{٢} س)

إما جتا ٢س = جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π)

أو جتا ٢س = جتا ($\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π)

حيث ن ∈ ص

٢س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π

٢س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π

بالقسمة على (٢)

س = $\frac{\pi}{٣}$ + π ن س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ن π

بوضع ن = ٠ ، ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٤\pi}{٣}$

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى: $\frac{\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

PDF Compressor Pro

إجابات تمارين (٤-٣) ص١٤١-١٤٢:

ناقش مع طلابك تمارين الدرس الثالث وتوصل معهم إلى الحلول الصحيحة:

الإجابات:

(١) جـ (٢) أ (٣) جـ (٤) جـ (٥) د

(٦)

	أ	ب	جـ	ء
حا ٢θ	$\frac{٢٤}{٢٥}$	$\frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$	$\frac{٢٤}{٢٥}$	$\frac{١٢}{١٣}$
حتا ٢θ	$-\frac{٧}{٢٥}$	$-\frac{٧}{٩}$	$\frac{٧}{٢٥}$	$\frac{٥}{١٣}$
طا ٢θ	$-\frac{٢٤}{٧}$	$-\frac{٤\sqrt{٢}}{٧}$	$\frac{٢٤}{٢٥}$	$\frac{١٢}{٥}$

(٧)

	حا ٢θ	حتا ٢θ	حا $\frac{\theta}{٢}$	حتا $\frac{\theta}{٢}$
أ	$\frac{١٥\sqrt{٨}}{٨}$	$-\frac{٧}{٨}$	$\frac{٦\sqrt{٨}}{٤}$	$\frac{١٠\sqrt{٨}}{٤}$
ب	$-\frac{٢٤}{٢٥}$	$\frac{٧}{٢٥}$	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$	$\frac{١٠\sqrt{٨}}{١٠}$

(٨) $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $-\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، $-\frac{١٢٠}{١١٩}$ ، $\frac{١٣\sqrt{٣}}{١٣}$

(٩) $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٢}$

(١٠) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$ (١١) $\frac{١٢}{٧}$

(١٢) أ $\frac{١}{٢}$ حا ٧٠° ب $\frac{١}{٢}$ طا ٨٠° جـ -حا ١٠°

د طا ١٠° هـ حتا ٥٠° و طا $\frac{جـ}{٢}$

(١٣) أ {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°} ب {١٣٥° ، ٣١٥°}

جـ {٦٠° ، ٣٠٠°}

سلم تقييم النشاط (تقويم اداء مهارى):

التقدير	أداء الطالب
ممتاز	يستخدم الحاسبة الرسومية بدقة ويستنتج الدالة ويبسطها باستخدام القوانين
جيد جدًا	يستخدم الحاسبة الرسومية ويحتاج لمساعدة طفيفة فى استنتاج قاعدتها
جيد	يستخدم الحاسبة الرسومية ويخطأ فى استنتاج قاعدة الدالة ويحتاج لمساعدة
مقبول	يحتاج إلى مساعدة فى استخدام الحاسبة واستنتاج قاعدة الدالة
ضعيف	لايمكن رسم منحنى الدالة ولا إلى استنتاج قاعدتها ويحتاج إى المساعدة والتوجيه

(٧) الربط بالهندسة: س ص ع مثلث فيه س ص = ١٢سم، ص ع = ١٨سم، ع س = ١٥سم. أثبت ان ق(∠ص) = ٢ق(∠س).

تمـارين (٤ - ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت جتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن جتا ٢ حـ تساوى

أ صفر ب $-\frac{٢}{٣}$ جـ $-\frac{٧}{٩}$ د $\frac{٢}{٣}$

(٢) جا ا جتا ا تساوى

أ $\frac{١}{٢}$ جا ٢ا ب جا ٢ا جـ جتا ٢ا د $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ا

(٣) حتا^{٢} حـ - جتا ٢ حـ تساوى

أ جا حـ ب جتا حـ جـ جا^{٢} حـ د ظا حـ

(٤) ١ - ٢ جا^{٢} ٥٠ تساوى

أ جا ١٠٠° ب جتا ٥٠° جـ جتا ١٠٠° د جا ٥٠°

(٥) ١ + جتا ٤ا تساوى

أ ٢ حتا^{٢} ٤ا ب حتا^{٢} ٢ا جـ حتا^{٢} ٤ا د ٢ حتا^{٢} ٢ا

(٦) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢θ ، ظا ٢θ إذا كان:

أ جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠° < θ < ٩٠° ب جتا θ = $\frac{١}{٣}$ ، ٠° < θ < $\frac{\pi}{٢}$

جـ قتا θ = $-\frac{٥}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ د ظتا θ = $\frac{٣}{٢}$ ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

(٧) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢θ ، جا $\frac{\theta}{٢}$ ، جتا $\frac{\theta}{٢}$:

أ جتا θ = $\frac{١}{٤}$ ، ٠° < θ < ٩٠° ب جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°

جـ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ د جا θ = $\frac{١٥}{١٧}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

(٨) إذا علمت ان جتا ا = $\frac{٥}{١٣}$ ، حيث ا قياس زاوية حادة، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة:

جا ٢ا ، جتا ٢ا، ظا ٢ا ، جتا $\frac{ا}{٢}$

(٩) إذا كان ا قياس زاوية حادة، جتا ٢ا = $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: حا ا ، حتا ا ، ظا ٢ا

(١٠) إذا كان جا $\frac{ا}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: جتا $\frac{ا}{٢}$ ، جا ا ، حتا ا

(١١) إذا كان جتا ب = $-\frac{٥}{١٣}$ ، $\pi < ب < \frac{٣\pi}{٢}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\frac{جا ٢ب}{٣ جتا ٢ب}$

(١٢) عبر عن كل مما يأتى فى صورة نسبة مثلثية واحدة:

أ جا ٣٥° جتا ٣٥° ب $\frac{ظا ٤٠°}{١ - ظا^{٢} ٤٠°}$ جـ جا ٢٥° جتا ٣٥° - حتا ٢٥° جا ٣٥°

د $\frac{ظا ٥٠° - ظا ٤٠°}{١ + ظا ٥٠° ظا ٤٠°}$ هـ حتا^{٢} ٢٥° - جا^{٢} ٢٥ و $\frac{١ - جتا θ + جا θ}{١ + جتا θ + جا θ}$

(١٣) أوجد قيم س المحصورة بين ٠° ، ٢π والتى تحقق كل معادلة مما يأتى:

أ جا ٢س = جا س ب جا^{٢} ٢س + ٢ جا ٢س + ١ = ٠ جـ جتا س - ٢ جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س = ٠

(١٤) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ $\frac{١ - جتا ٢ا}{جتا ٢ا + ٣} = \frac{جا^{٢} ا}{١ + جتا^{٢} ا}$ ب $\frac{ظا θ - ١}{ظا θ + ١} = \frac{جتا ٢θ}{١ + جا ٢θ}$

(١٥) الربط بالميكانيكا: ركل لاعب كرة القدم بزاوية قياسة ٣٠° مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية مقدارها ١٤,٧ م/ث. إذا كانت المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة: ف = $\frac{ع^{٢} جا ٢θ جتا θ}{د}$ حيث د عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث٢ ، ع تمثل السرعة الابتدائية.

أولاً: ضع العلاقة السابقة فى أبسط صورة

ثانيًا: أوجد المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة بالمتر.

نشاط استخدام الآلة الحاسبة البيانية

(١٦) استخدم الحاسبة البيانية أو احد البرامج الرسومية للحاسب أو (التابلت) فى رسم منحنى الدالة د حيث

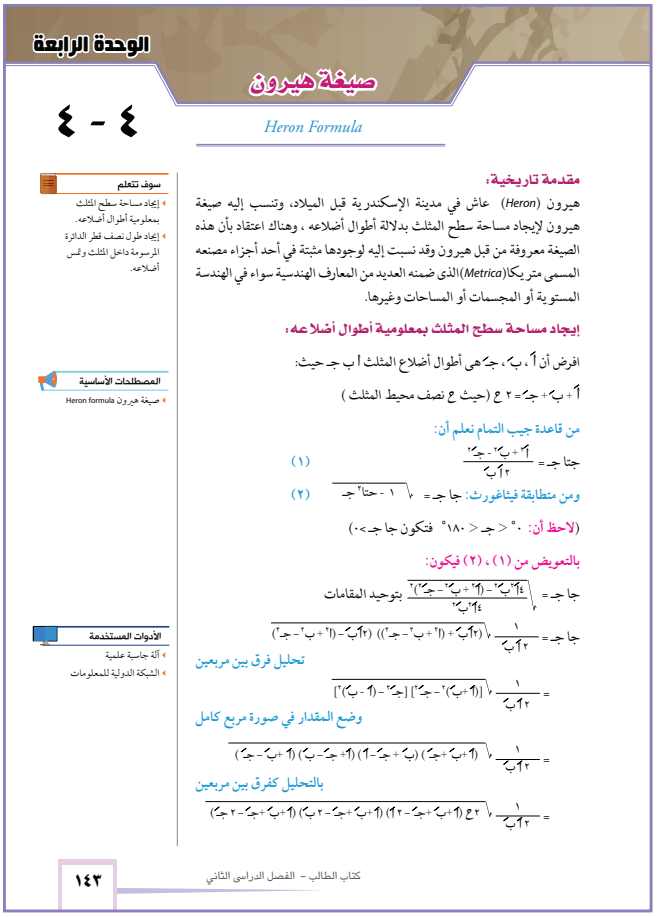
د(س) = جا θ جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جتا θ جا $\frac{\pi}{٤}$ حيث: -٢π ≤ θ ≤ ٢π

أ هل يمكنك استنتاج الدالة د من التمثيل البيانى للدالة ؟ فسر ذلك.

ب أثبت صحة الدالة المستنتجة من الرسم باستخدام القوانين.

PDF Compressor Pro

٤ - ٤ صيغة هيرون
Heron Formula


الوحدة الرابعة

صيغة هيرون

٤ - ٤

Heron Formula

مقدمة تاريخية:

هيرون (Heron) عاش في مدينة الإسكندرية قبل الميلاد، وتنسب إليه صيغة هيرون لإيجاد مساحة سطح المثلث بدلالة أطوال أضلاعه ، وهناك اعتقاد بأن هذه الصيغة معروفة من قبل هيرون وقد نسبت إليه لوجودها مثبتة في أحد أجزاء مصنعه المسمى متريكا(Metrica)الذى ضمنه العديد من المعارف الهندسية سواء في الهندسة المستوية أو المجسمات أو المساحات وغيرها.

إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه:

افرض أن أ، ب، جـ هى أطوال أضلاع المثلث ا ب جـ حيث:

أ + ب + جـ = ٢ ع (حيث ع نصف محيط المثلث)

من قاعدة جيب التمام نعلم أن:

جتا جـ = $\frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2أب}$ (١)

ومن متطابقة فيثاغورث: جا جـ = $\sqrt{1 - جتا^2 جـ}$ (٢)

(لاحظ أن: ٠° < جـ < ١٨٠° فتكون جا جـ > ٠)

بالتعويض من (١) ، (٢) فيكون:

جا جـ = $\sqrt{\frac{4أ^2ب^2 - (أ^2 + ب^2 - جـ^2)^2}{4أ^2ب^2}}$ بتوحيد المقامات

جا جـ = $\frac{1}{2أب}\sqrt{(2أب + (أ^2 + ب^2 - جـ^2))(2أب - (أ^2 + ب^2 - جـ^2))}$

تحليل فرق بين مربعين

= $\frac{1}{2أب}\sqrt{[(أ+ب)^2 - جـ^2][جـ^2 - (أ-ب)^2]}$

وضع المقدار في صورة مربع كامل

= $\frac{1}{2أب}\sqrt{(أ+ب+جـ)(ب+جـ-أ)(أ+جـ-ب)(أ+ب-جـ)}$

بالتحليل كفرق بين مربعين

= $\frac{1}{2أب}\sqrt{2ع(أ+ب+جـ-2ع)(أ+ب+جـ-2ب)(أ+ب+جـ-2جـ)}$

سوف نتعلم
- إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه.
- إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس أضلاعه.

المصطلحات الأساسية
- صيغة هيرون Heron formula

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- الشبكة الدولية للمعلومات

كتاب الطالب - الفصل الدراسي الثاني ١٤٣

خلفية

سبق للطالب دراسة إيجاد مساحة سطح المثلث وعلم أن مساحته تتحدد بإحدى الطرق الآتية:

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضعلين متجاورين × حا الزاوية المحصورة بينهما .

وسوف يدرس فى هذا الدرس إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام صورة (هيرون) بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة كما يمكنه إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث والتى تمس جميع أضلاعه.

مخرجات الدرس

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذًا للأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه (صيغة هيرون)
- يوجد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس أضلاعه.

مفردات اساسية

- صيغة هيرون.

المواد التعليمية المستخدمة

- السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسب علمية – الشبكة الدولية للمعلومات

طرق التدريس المقترحة

- العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات .

مكان الدرس

- الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسى من ص (١٤٣) إلى ص (١٥٠) الشبكة الدولية للمعلومات.

التهيئة

- برهان صيغة هيرون طويل ويحتاج إلى وقت ولكن خطواته بسيطة ومستنتجة من معلومات سبق أن درسها الطالب لذا ينبغى على المعلم التأكيد من فهم الطلاب للمتطلبات القبلية التالية:
- قوانين قاعدة جيب التمام.
- تحليل الفرق بين مربعين.
- وضع المقدار الجبرى على صورة مربع كامل.
- مساحة سطح المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

اجراءات الدرس

عمل تعاونى

بعد برهانك لقاعدة هيرون بمعلومية أ/، ب/ ، حا جـ .

- قسم الطلاب إلى مجموعتين واطلب من كل مجموعة برهان قاعدة هيرون بمعلومية ب/، جـ/ ، حا أ
  أ/ ، جـ/ ، حا ب
- وساعدهم فى خطوات استنتاج صيغة القانون .

إرشادات للدراسة:

يمكن تعميم الصيغة السابقة لشكل رباعى وكذلك كنشاط للطلاب الفائقين وكذلك كنشاط للطلاب الفائقين

PDF Compressor Pro

وذلك من الموقع الآتي:ar.m.wikipedia.org/wiki
كما توجد مواقع أخرى للبحث فى جوجل وذلك بكتابة اسم البحث (صيغة هيرون).

فى بند تفكير ناقد ص (١٤٤)

فى هذا النوع من التفكير يمكن للطالب استنتاج أن المثلث قائم الزاوية حيث أن:
مجموع مربع أصغر ضلعين فيه = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ١٠٠ ومربع طول الضلع الأكبر = (١٠)^{٢} = ١٠٠ بذلك يكون المثلث قائم الزاوية
مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤سم^{٢}
وهنا مطابق للحل السابق باستخدام صيغة هيرون

نشاط (١) آليات تنفيذ النشاط: أطلب إلى الطلاب البحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن (صيغة هيرون) ومعرفة المزيد من المعلومات ناقش طلابك فيما توصلوا اليه.

نشاط (٢)آليات تنفيذ النشاط: الهدف من هذا النشاط هو إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث وتمس جميع أضلاعه ، وبرهان هذه النظرية سهل وبسيط بالنسبة للطالب حيث تمثل ركنا اساسيًا فى هندسة الدائرة .

فى بند تفكير ناقد ص (١٤٧):

الهدف هو أن يدرك الطالب بأن الكميات السالبة تحت الجذر التربيعى غير معرفة فى ح.

الإجابة:

لاتوجد مساحة للمثلث إذا كانت إحدى القيم المذكورة سالبة فى حالة أن تكون أحدى القيم مساوية للصفر لايوجد مثلث من الأساس.

فى مثال (٣) ص (١٤٥)

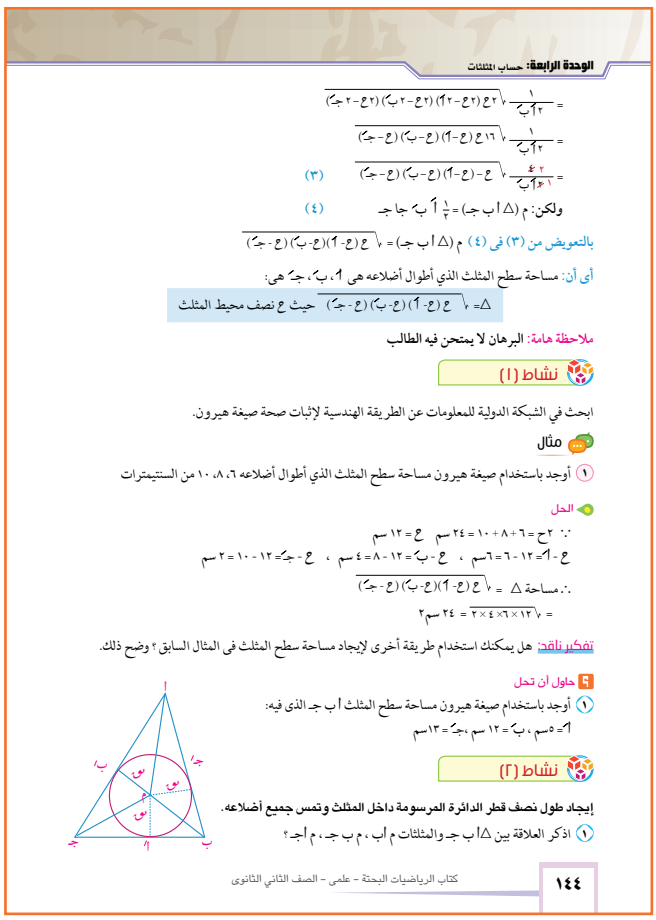
- اكد إلى الطلاب بأنه إذا كان نصف محيط المثلث (ح) أقل من أحد الأضلاع فلا يوجد مثلث من الأساس وبالتالى لايمكن إيجاد مساحته.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

- ناقش مع طلابك فى بند حاول أن تحل ص (١٤٥) وتوصل معهم إلى الإجابة الصحيحة

استخدم صيغة هيرون لإيجاد المساحة

أثبت أن المثلث قائم الزاوية ثم احسب مساحته بمعلومية طولى ضلعى القائمة.



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

= $\frac{١}{٢ أ ب}$ √ ع (ع-٢أ) (ع-٢ب) (ع-٢جـ)

= $\frac{١}{٢ أ ب}$ √ ١٦ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ)

= $\frac{٤}{١ أ ب}$ √ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ) (٣)

ولكن: م (Δ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ (٤)

بالتعويض من (٣) فى (٤) م (Δ أ ب جـ) = √ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ)

أى أن: مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه هى أ، ب، جـ هى:

Δ = √ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ) حيث ع نصف محيط المثلث

ملاحظة هامة: البرهان لا يمتحن فيه الطالب

نشاط (١)

ابحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن الطريقة الهندسية لإثبات صحة صيغة هيرون.

مثال

(١) أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦، ٨، ١٠ من السنتيمترات

الحل

∵ ٢ع = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم ∴ ع = ١٢ سم
ع - أ = ١٢ - ٦ = ٦سم ، ع - ب = ١٢ - ٨ = ٤ سم ، ع - جـ = ١٢ - ١٠ = ٢ سم
∴ مساحة Δ = √ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ)
= √ ١٢ × ٦ × ٤ × ٢ = ٢٤ سم^{٢}

تفكير ناقد: هل يمكنك استخدام طريقة أخرى لإيجاد مساحة سطح المثلث فى المثال السابق ؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(١) أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه:
أ = ٥سم ، ب = ١٢ سم ، جـ = ١٣سم

نشاط (٢)

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه.

(١) اذكر العلاقة بين Δ أ ب جـ والمثلثات م أ ب ، م ب جـ ، م أ جـ ؟



صيغة هيرون ٤ - ٤

(٢) هل يمكنك إيجاد علاقة بين طول نصف قطر الدائرة ﻫ ومساحة سطح المثلث أ ب جـ ؟
نستطيع أن نستنتج أن: م (Δ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ﻫ + $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ﻫ + $\frac{١}{٢}$ جـ أ × ﻫ

√ ع (ع-أ) (ع-ب) (ع-جـ) = ﻫ × ع

أى أن ﻫ = $\frac{\text{م}(\Delta أ ب جـ)}{ع}$ = $\frac{\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}}{ع}$

مثال

(٢) باستخدام العلاقة السابقة: أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب جـ الذى أطوال أضلاعه ٧، ٩، ١٤ من السنتيمترات من الداخل ، مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

∵ ٢ع = ٧ + ٩ + ١٤ = ٣٠ سم ∴ ع = ١٥ سم ، ع - أ = ٨سم ، ع - ب = ٦سم ، ع - جـ = ١ سم

بالتعويض فى العلاقة السابقة:

∴ ﻫ = $\frac{\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}}{ع}$ = $\frac{\sqrt{١٥ \times ٨ \times ٦ \times ١}}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ √ ٥ سم

تفكير ناقد: ماذا تتوقع إذا كانت: ع - أ أو ع - ب أو ع - جـ سالبة أوتساوى صفرًا ؟ فسر إجابتك.

مثال

(٣) أوجد مساحة المثلثات الآتية.

أ مثلث أطوال أضلاعه ٧ ، ٩ ، ١٢ من السنتيمترات

ب المثلث الذي طولا ضلعين فيه هما ٢٤ ، ٤٠ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما قياسها ٣٠°.

جـ هل يوجد المثلث الذى أطوال أضلاعه ١٢ ، ١٤ ، ٣٠ من السنتيمترات؟ أوجد مساحته إن امكن ذلك

الحل

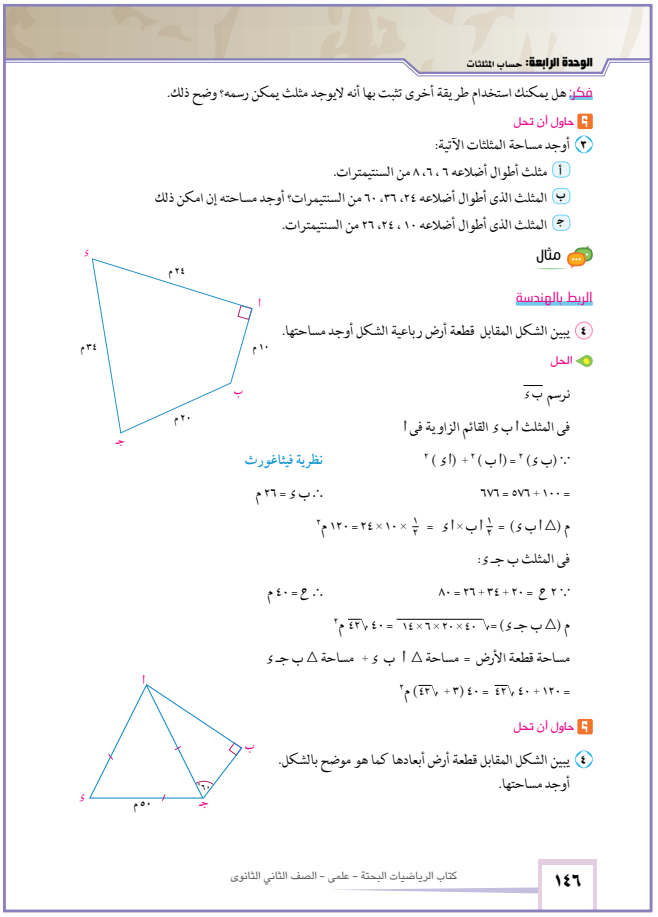
أ ∵ ٢ ع = ٢٨ سم ∴ ع = ١٤ سم ، ع - أ = ٧سم ، ع - ب = ٥سم ،
ع - جـ = ٢سم
بالتطبيق في صيغة هيرون:
مساحة سطح المثلث = √ ١٤ × ٧ × ٥ × ٢ = ١٤ √ ٥ سم^{٢}

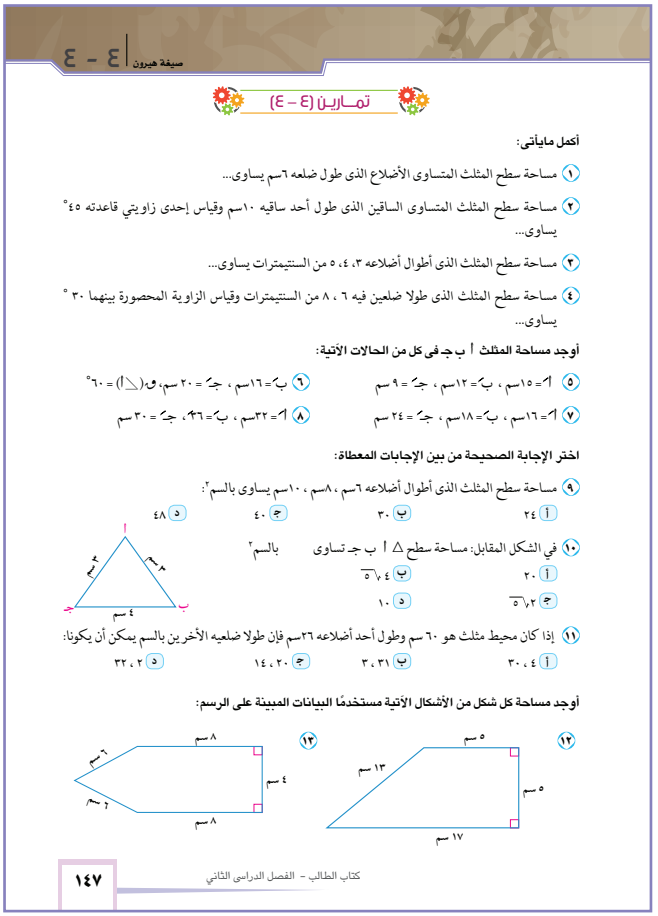
ب ٢ ع = ٥٦ سم ∴ ع = ٢٨ سم ، ع > أحد الأضلاع
∴ لايوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته

جـ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٤٠ × جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٤٠ = ٢٤٠ سم^{٢}

تذكر أن
مساحة سطح المثلث بمعلومية طولا ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب ضلعيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

PDF Compressor Pro





صيغة هيرون | ع - ع

فى بند فكر ص (١٤٦)

بفرض أن ١٢، ١٤، ٣٠ أطوال اضلاع المثلث فهذا الأمر غير جائز لأن مجموع الضلعين ١٢، ١٤ يعطى ٢٦ < ٣٠ وهذا غير جائز أن يكون مجموع أحد الضلعين فى مثلث أقل من الضلع الثالث ، كذلك لايمكن للطالب أن يرسم المثلث بهذه الأطوال.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

ناقش مع طلابك ما ورد فى حاول أن تحل ص(١٤٦) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة .

إجابات:

(٣) (أ) ٨√٥ سم٢

(ب) لايمكن رسم المثلث لأن مجموع احد ضلعيه يساوى الضلع الثالث

(ج) ١٢٠سم٢

(٤) وضح لطلابك بأن:

م (الشكل ا ب جـ ء) = م (ا جـ ء) + م (ا ب جـ)

= ½ × ٥٠ × ٥٠ × حا ٦٠ + ½ × ٢٥ × ٢٥ × √٣

= ٦٢٥ √٣ + ٦٢٥/٢ √٣ = ٩٣٧,٥ سم٢

إجابات تمارين (٤-٤) ص١٤٧-١٤٨:

(١) ٩√٣ سم٢ (٢) ٥٠سم٢ (٣) ٦ سم٢ (٤) ١٢سم٢

(٥) ٥٤ سم٢ (٦) ٨٠√٣ سم٢ (٧) ١٤٣,٩٩٧سم٢

(٨) ٤٥٣,٥٩٨سم٢

(٩) أ (١٠) جـ (١١) جـ

(١٢) ٥٥ سم٣ (١٣) ٣٢ + ٨√٣ سم٢

(١٤) ٦٤سم٢ (١٥) ٦ + ٢√٢١ سم٢

(١٦) ١١٤ سم٢ (١٧) ٨٤,٣٧سم٢

(١٨) ٧٢,٢٥√٣ سم٢

(١٩) أ ٨√٣٠ سم٢ ب ٩٠ سم٢

جـ ٣٨٤ سم٢ د ١٥√٣٩ / ٤

(٢٠) ١٥٠٠√٣ (٢١) ٢٠√٣

PDF Compressor Pro

إجابات التمارين العامة ص (١٥٠-١٥١)

أولًا: مسائل على زوايا الارتفاع والانخفاض:

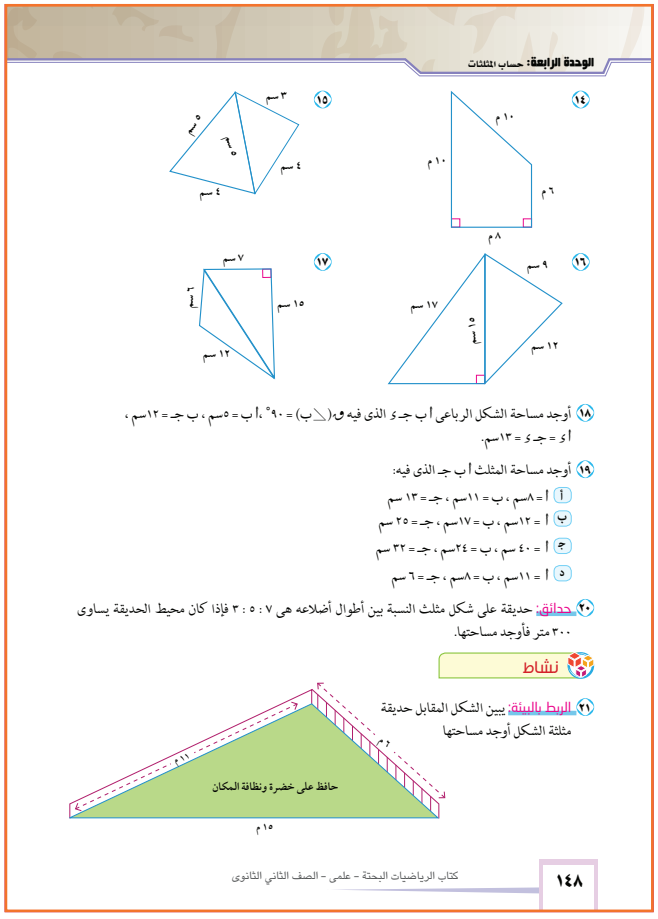
١) ≈ ٤٦ مترًا
٢) ≈ ٤٤ مترًا
٣) ≈ ١٣ مترًا
٤) ≈ ٨٧ كم
٥) ≈ ٧٠٥,٢٢ أمتار
٦) ≈ ٢٣,٥٣٠ كم
٧) ≈ ١٣٩ مترًا

ثانيًا: مسائل على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسى زاويتين:

٣) أ ١ ب ١ جـ صفر
٤) $\frac{-١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{-١١٩}{١٦٩}$
٥) $\frac{٨}{٩}$
٦) $\frac{-١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{٥٦}{٦٥}$
٧) $\frac{-(١٥+١٢\sqrt{٧})}{٥٢}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$
٨) $\frac{١}{٢}$
١٠) $\frac{-١٦}{٦٥}$ ، $\frac{-٢٤}{٧}$

ثالثًا: مسائل علي صيغة هيرون

١) ٧٦٤,٨٥سم^{٢}
٢) ٨$\sqrt{٣٠}$ سم^{٢}
٣) ٢٢٦٢٧,٤٢ سم^{٢}
٤) ٣$\sqrt{٢٥٥}$ سم^{٢}
٥) ٢٤٠٠سم^{٢}
٦) ٣٠٦ سم^{٢}



١٤) م ١٠، م ١٠، م ٦، م ٨
١٥) ٣ سم، ٤ سم، ٤ سم، ٥°
١٦) ٩ سم، ١٧ سم، ١٢ سم، ٥°
١٧) ٧ سم، ١٥ سم، ١٢ سم

١٨) أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه ق(∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم ، أ ء = جـ ء = ١٣سم.

١٩) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه:
أ) أ = ٨سم ، ب = ١١سم ، جـ = ١٣ سم
ب) أ = ١٢سم ، ب = ١٧سم ، جـ = ٢٥ سم
جـ) أ = ٤٠ سم ، ب = ٢٤سم ، جـ = ٣٢ سم
د) أ = ١١سم ، ب = ٨سم ، جـ = ٦ سم

٢٠) حدائق: حديقة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هى ٧ : ٥ : ٣ فإذا كان محيط الحديقة يساوى ٣٠٠ متر فأوجد مساحتها.

نشاط

٢١) الربط بالبيئة: يبين الشكل المقابل حديقة مثلثة الشكل أوجد مساحتها



تمارين عامة

أولًا: مسائل على زوايا الارتفاع والانخفاض

١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٢° ثم سار على طرق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد قياسها ٣٦° ، أوجد ارتفاع البرج لاقرب متر.

٢) من قمه تل وجد راصد أن قياسى زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٥٩٨° ، ٢٦٩٢° على الترتيب، فإذا كان ارتفاع البرج ٢٠ مترًا، فاحسب ارتفاع التل لاقرب متر.

٣) من قمه برج ارتفاعه ١٠ أمتار قاس رجل زاويتى ارتفاع وانخفاض أعلى نقطة من مئذنة وأسفل نقطة فيها على سطح الأرض فوجد هما ٤٨° ١٤ ، ٤٢° على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج والمئذنة مقامين على مستوى أفقى واحد، فاحسب لأقرب متر ارتفاع المئذنة.

٤) الملاحة البحرية تسير سفينة نحو الشمال الشرقى بسرعة ٢٤ كم/ ساعة، شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٢٥° غرب الشمال، وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه ١٧° شمال الغرب، أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر، علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد.

٥) الملاحة البحرية يتحرك قارب بخارى فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠٠متر/ دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها ٣٥° ، وبعد دقيقتين ومن نفس القارب ثم رصدت زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها ٦٠° احسب ارتفاع الصخرة.

٦) الملاحة البحرية تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ ساعة، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلو متر/ ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا.

٧) من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° ، وبعد ثلاث دقائق أعاد الرصد من نفس النقطة، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبحت ١٥° ، أوجد بعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لاقرب متر.

ثانيًا: مسائل على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسى زاويتين وضعف الزاوية

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت صحة كل مما يأتى:
أ) ظا ٧٥° = ٢ + $\sqrt{٣}$
ب) $\frac{\text{جتا }٤٠^\circ \text{ جتا }١٠^\circ + \text{جا }٤٠^\circ \text{ جا }١٠^\circ}{\text{جا }١٥^\circ \text{ جتا }١٥^\circ} = ٢\sqrt{٣}$
جـ) جتا ٧٥° = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

٢) أثبت صحة كل مما يأتى:
أ) جتا^{٢} أ = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢أ) ومن ذلك أوجد قيمة جتا ١٥°
ب) $\frac{\text{جا }٢أ - \text{جتا }٢أ}{\text{جا }أ + \text{جتا }أ}$ = ق٢ $\frac{أ}{٢}$
جـ) $\frac{\text{جا }٢س}{٢ + \text{جتا }٢س}$ = ظا س
د) $\frac{١ - \text{جتا حـ} - \text{جا حـ}}{١ - \text{جتا حـ} + \text{جا حـ}}$ = ظا $\frac{\text{حـ}}{٢}$

PDF Compressor Pro



اختبار تراكمي

اختبار تراكمي

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:
جا ٣س جتا ٢ س + جتا ٣ س جا ٢س يساوى
(١) جتا ٥س (٢) جا ٥س (٣) جا س (٤) جتا س

(٢) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ٥سم فإن ب يساوى
(١) $\frac{\text{م جا أ}}{\text{جا ب}}$ (٢) $\frac{\text{م جا ب}}{\text{جا أ}}$ (٣) $\frac{\text{م جا أ}}{\text{جا جـ}}$ (٤) $\frac{\text{م جا جـ}}{\text{جا ب}}$

(٣) المثلث أ ب جـ الذى فيه أ : ب : جـ = ٣ : ٢ : ١ فإن جتا أ تساوى
(١) $-\frac{١}{٤}$ (٢) $-\frac{١}{٨}$ (٣) $\frac{١}{٨}$ (٤) $-\frac{٣}{٤}$

(٤) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ١٥سم ، ب = ٢٥سم ، جـ = ٣٥سم، فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى:
(١) ٩٠° (٢) ٤٠° (٣) ١٢٠° (٤) ١٥٠°

ثانيًا: أسئلة ذات إجابات قصيرة:

(٥) أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٠° ، أ = ١٠سم.

(٦) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فأوجد أ : ب : جـ

(٧) أوجد قياس اكبر زاوية فى المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٦سم ، ب = ١٤سم ، جـ = ١٠سم

(٨) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ظا (أ + ب)

(٩) أوجد قيمة ظا ١٥° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(١٠) إذا كان جا أ = $\frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة جتا ٢ أ

ثالثًا: أسئلة ذات إجابات طويلة

(١١) حل المثلث الذى فيه ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٨٦° ، جـ = ٩سم

(١٢) مثلث س ص ع فيه س = ٩,٤سم، ص = ١٥,٦سم، ق(∠ع) = ٥٤°
أوجد ع لاقرب رقم عشرى واحد ، وكذلك مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسه.

(١٣) أوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ١٣سم ، ب = ١٤سم ، جـ = ١٥سم، ثم أوجد مساحته.

(١٤) رصد قائد طائرة هدفًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف ٤٥° وعندما هبط مسافة ٢ كم رأسيًا وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف اصبح ٣٠° ، أوجد لأقرب كم ارتفاع الطائرة عند بداية الرصد.

(١٥) أوجد مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٢سم ومحيطه ٣٠سم.

(١٦) قطعة أرض مثلثية الشكل محيطها ١٨٠ متر والنسبة بين أطوال أضلاعها ٢ : ٣ : ٤ أوجد مساحتها لأقرب متر مربع.

إجابات الاختبار التراكمى ص (١٥٢)

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد:

(١) حا ٥ س

(٢) $\frac{\text{٥ حا ب}}{\text{حا أ}}$

(٣) $-\frac{١}{٨}$

(٤) ١٢٠°

ثانيًا: اسئلة ذات اجابات قصيرة

(٥) ٢,٥سم

(٦) ٦ : ٤ : ٣

(٧) ١٢٠°

(٨) ١

(٩) $\frac{١ - \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}}$

(١٠) $\frac{٧}{٩}$

ثالثًا: أسئلة ذات إجابات طويلة:

(١١) ق(∠جـ) = ٥١° ، أ ≈ ١١,٥٥سم
ب ≈ ٧,٩سم

(١٢) ع ≈ ١٢,٦سم ، ≈ ١٩٠,٥سم٢

(١٣) ٤٨′ ٧ ٥٣° ، ≈ ٨٤سم٢

(١٤) ≈ ٤,٧٣ كم

(١٥) ٩$\sqrt{١٥}$ سم٢

(١٦) ١١٦٢ م٢

PDF Compressor Pro

الملحقات

PDF Compressor Pro

المراجع:

- وليم عبيد وآخرون، **تربويات الرياضيات**، القاهرة، الأنجلو المصرية، ٢٠٠٥، ص ص ٧ – ٢٨
- وليم عبيد، **قصة الرياضيات**، القاهرة، المكتبة الأكاديمية، الطبقة الأولى، ٢٠٠١، ص ص ١٥ – ١٧
- محمد أمين المفتى، الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات، ورقة **مقدمة للمواتمر العلمى السنوى** بعنوان "الرياضيات المدرسية معايير ومستويات"، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، القاهرة، ٢٠٠١
- على ماهر خطاب، **القياس والتقويم فى العلوم النفسية والتربوية والاجتماعية**، الطبعة السابعة، القاهرة، الانجلو المصرية، ٢٠٠٨

- Daire, S. and other, Geometry U.S.A, prentice Hall
- Edward D. Gaughan and others, (1982) A*lgebra, Second* course 1982, Scott Foresman.
- Eleanor Beoher and other, ***Advanced Algebra***, U.S.A Prentice Hall
- Ernest, H. Richard, *P.,(2010). (2005)*, ***Introductory mathematical Analysis***, Eleventh Edi*tion,* pearson, prentice Hall.
- G.N YAkovlEv, (1982) *Problem Book in High school mathematics*, Mir Publishers, moscow.
- George, B., Maurice, D., *J*oet, R*(2011). thomas' colulus*, twelfth Edition.
- J.F Talgert and H.H.Heng, (1992) ***Additional Mathematics***, FiFth Editio*n, Lon*gman ingapore publishers *(Ptc)* limited.
- John J . Bradiy and other, A*lgebra, U.S.*A, prentice Hall, Zolo
- Larson, R.(2013). Precalculus, q the *Edition, Brooks cole.*
- *McGraw-Hil*l, (2005). Advanced Mathematical calconcepts: Precalculus with Applications, 1s*t Edition.*
- *Randall I* . Charles and others, (2010) Math Corse 3 . U.S.A, prentice Hall
- Rayner, General D.(1984) Mathemematics, Revision and Practice, Second edition, oxford university press.
- Stewart, J (2012) calculus: Early transcendentals
- Sullivan, M.(1996). Mathematics: An ***Applied Apprach***, 8th Edition, John wiley-and sone, inc.
- Sullivan, M., (2015) Trigonometry: A unit circle Approach, pearson education, Canda.
- Vernon, C, Richard, A (2012) college Algebra and trigonometry .

ثانيًا: المواقع الإلكترونية

(http://geogebra.org/com)

(http://www.pedowan.dk)

(http:// www. phschool.com)

www.NCTM.org

http://www.keycurriculum.com/products/ sketchpad

PDF Compressor Pro

الفصل الدراسي الأول

- أس Exponent
- أساس Base
- أسس كسرية Rational exponents
- أصغر زاوية smallest angle
- أطوال أضلاع المثلث The lengths of the sides of the triangle
- أطول ضلع longest side
- أقصر ضلع shortest side
- أكبر زاوية largest angle
- إزاحة (انتقال) Translation
- إطراد دالة Monotony of a Function
- اتصال دالة Continuity of a Function
- الجذر التربيعي Square root
- الجذر التكعيبي Cube root
- الجذر النوني nth root
- الحالة المبهمة The ambiguous case
- الدالة الأسية Exponential function
- الدالة المتزايدة Increasing function
- الدالة المتناقصة Decreasing function
- انعكاس Reflection
- تحويل Transformation
- تضاؤل أسي Exponential decay
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تماثل Symmetry
- تمدد Stretching
- جذر حقيقي Real root
- جذور Radicals
- حساب المثلثات Trigonometry
- حل بياني Graphical Solution
- حل وحيد unique solution
- حلول ممكنة possible solutions
- خط تقارب Asymptote
- خط رأسي Vertical Line
- دالة أحادية One–to–One Function
- دالة تزايدية Increasing Function
- دالة تناقصية Decreasing Function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة حقيقية Real Function
- دالة زوجية Even Function
- دالة عكسية Inverse function
- دالة فردية Odd Function
- دالة كثيرة الحدود polynomial Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- دالة كسرية Rational Function
- دالة لوغاريتمية Logarithmic function
- دالة متعددة التعريف Piecewise–Defind Function
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- دالة مركبة Composite Function
- دالة مقياس (قيمة مطلقة) Absolute Value Function
- زاوية حادة acute angle
- زاوية قائمة right angle
- زاوية مقابلة لضلع the opposite angle of a side
- زاوية منفرجة obtuse angle
- زوجي Even
- صورة أسية Exponential form
- صورة لوغاريتمية Logarithmic form
- غير معرف Undefined
- فائدة مركبة Compound interest
- فردي Odd
- قاعدة الجيب sine rule
- قاعدة جيب التمام the cosine rule
- قوانين الأسس Laws of exponents
- قوة Power
- كمية غير معينة Unspecified Quantity
- لوغاريتم logarithm
- لوغاريتم طبيعي Natural logarithm
- لوغاريتم معتاد Common logartithm
- مجال Domain
- مجال مقابل Co–domain
- مدى Range
- مساحة المثلث The area of the triangle
- معادلة أسية Exponential equation
- معادلة لوغاريتمية Logarithmic equation
- نمو أسي Exponential growth
- نهاية الدالة عند اللانهاية Limit of a Function at Infinity
- نهاية دالة Limit of a Function
- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function
- نهاية يسرى Left Limit
- نهاية يمنى Right Limit

PDF Compressor Pro

الفصل الدراسي الثانى

Trigonometric Functions of the sum of Measures of Two Angles	
	أساس المتتابعة الحسابية
Common Difference	
Common Ratio	أساس المتتابعة الهندسية
Arithmetic Means	أوساط حسابية
Geometric Means	أوساط هندسية
Differentiation	الاشتقاق
Variation	التغير
Trigonometric Functions	الدوال المثلثية
	الدوال المثلثية لضعف الزاوية
Trigonometric Functions of Double – Angle	
	الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين
Trigonometric Function of the Difference Between the Measures of Two Angles	
	الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين
	الدوال المثلثية لنصف الزاوية
Trigonometric Functions of Half – an Angle	
First Derivative	المشتقة الأولى
Left Derivative	المشتقة اليسرى
Right Derivative	المشتقة اليمنى
Permutations	تباديل
Order	ترتيب
Integration	تكامل
Combinations	توافيق
Product	حاصل الضرب
Term	حد
Quotient	خارج القسمة
Function	دالة
Sine Function	دالة الجيب
Cosine Function	دالة جيب التمام
Differentiable Functions	دالة قابلة للاشتقاق
Trigonometric Function	دالة مثلثية
Summation Notation	رمز التجميع
Angle	زاوية
Angle of Elevation	زاوية ارتفاع
Angle of Depression	زاوية انخفاض
Tree Diagram	شجرة بيانية
Heron Formula	صيغة هيرون
Operation	عملية
Elements	عناصر
Chain Rule	قاعدة السلسلة
Committee	لجنة
Infinity	مالانهاية
Fundamental Counting Principle	مبدأ العد الأساسى
Conditional Principle of Counting	مبدأ العد المشروط
Increasing Sequence	متتابعة تزايدية
Decreasing Sequence	متتابعة تناقصية
Arithmetic Sequence	متتابعة حسابية
Infinite Sequence	متتابعة غير منتهية
Finite Sequence	متتابعة منتهية
Geometric Sequence	متتابعة هندسية
Series	متسلسلة
Arithmetic Series	متسلسلة حسابية
Geometric Series	متسلسلة هندسية
Infinite Geometric Series	متسلسلة هندسية غير منتهية
Average Rate of Change	متوسط التغير
Subset	مجموعة جزئية
Antiderivative	مشتقة عكسية
Factorial	مضروب
Rate of Change	معدل التغير

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
الدوال ذات المتغير الحقيقي ورسم المنحنيات	• يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية. • يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها. • يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال) • يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية. • يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما. • يتعرف الدالة الأحادية (one – to – one). • يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال). • يتعرف الدوال كثيرات الحدود. • يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية – دالة المقياس – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها. • يستنتج تأثير كل من التحويلات: د(س ± أ)± ب، أ د (س±ب) ± جـ على الدوال السابقة. • يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية. • يحل معادلات على الصورة: |أ س + ب| = جـ ، |أ س + ب| = |E س + جـ|، |أ س + ب| = جـ س + E • يحل متباينات على الصورة: |أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| ⩾ جـ ، |أ س + ب| > جـ ، |أ س + ب| ⩽ جـ • يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة. • يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة. • يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج جيوجيبرا "geogebra". • يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التى يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.	الدرس الأول:الدوال الحقيقية. الدرس الثانى:بعض خواص الدوال. الدرس الثالث:اطراد الدوال . الدرس الرابع:التمثيل البيانى للدوال. الدرس الخامس: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة .

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	دالة حقيقية – مجال – مجال مقابل– مدى – خط رأسي – دالة متعددة التعريف – دالة مركبة – دالة زوجية – دالة فردية – دالة أحادية – إطراد دالة– دالة تزايدية – دالة تناقصية – دالة ثابتة – دالة كثيرة الحدود – دالة مقياس (قيمة مطلقة) – دالة كسرية – خط تقارب – تحويل – إزاحة (انتقال) – انعكاس – تمدد – حل بياني.	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية فى أثناء الدرس وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها	• يتعرف الدالة الأسية د: س ⟵ $أ^{س}$ حيث أ ∈ ع$^{+}$ − {١}. • يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية • يتعرف دالتى النماء والتضاءل. • يتعرف قوانين الأسس الكسرية. • يحل معادلات أسية على الصورة $أ^{س}$ = ب. • يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $أ^{س}$ = ب. • يتعرف الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{أ}$ س أو د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ∈ ع$^{+}$ − {١}، س ∈ ع$^{+}$. • يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس. • يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها (اختبار الخط الأفقي). • يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها. • يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغازريتمية بيانيًا. • يتعرف قوانين اللوغاريتمات: ¤ لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص س > ٠ ، ص > ٠ ¤ لو$_{أ}$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص س > ٠ ، ص > ٠ ¤ لو$_{أ}$ (س)^{ن} = ن لو$_{أ}$ س س > ٠ ، أ ∈ ع$^{+}$ − {١} ، ن ∈ ع$^{+}$ ¤ لو$_{أ}$ ($\frac{١}{س}$) = − لو$_{أ}$ س ، س > ٠ ، أ ∈ ع$^{+}$ − {١} ¤ لو$_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} أ}$ ، س > ٠ ، أ ، ب ∈ ع$^{+}$ − {١} ¤ لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{لو_{ب} أ}$ أ ، ب ∈ ع$^{+}$ − {١} ¤ لو$_{أ}$ أ = ١ أ ∈ ع$^{+}$ − {١} ¤ لو$_{أ}$ ١ = صفر أ ∈ ع$^{+}$ − {١} • يمثل الدالة اللوغاريتمية بيانيًا. • يحل مسائل تشتمل على قوانين اللوغاريتمات. • يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة • يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.	الدرس الأول: الأسس الكسرية الدرس الثانى: الدالة الأسية الدرس الثالث: حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها الدرس الرابع: الدالة العكسية الدرس الخامس: الدالة اللوغارتمية وتمثيلها البياني الدرس السادس: بعض خواص اللوغاريتمات

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	أس – قوة – أساس – جذور – أسس كسرية – الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – جذر حقيقي – نمو أسى – تضاؤل أسى – زوجي – فردي – قوانين الأسس – الدالة الأسية – معادلة أسية – الدالة المتزايدة – الدالة المتناقصة – تماثل – فائدة مركبة – دالة عكسية – لوغاريتم – صورة أسية – صورة لوغاريتمية – لوغاريتم معتاد – لوغاريتم طبيعى – دالة لوغاريتمية – معادلة لوغاريتمية.	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة، وسلم التقييم الخاص بكل منها، والاختبار التراكمى فى نهاية كل وحدة.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
النهايات والاتصال	• يتعرف مقدمة في النهايات. • يتعرف بعض الكميات غير المعينة مثل $\div$ ، $\infty - \infty$، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty \times 0$ • يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب فى المرافق • يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون. $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-١}$ • يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$ • يوجد نهاية دالة عند اللانهاية. • يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية. • يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية. • يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها. • يتعرف مفهوم اتصال الدالة: اتصال دالة عند نقطة – اتصال دالة على فترة – إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة. • يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.	الدرس الأول: مقدمة فى النهايات الدرس الثانى : ايجاد نهاية الدالة جبريًا. الدرس الثالث: نهاية الدالة عند اللا نهاية. الدرس الرابع: نهايات الدوال المثلثية. الدرس الخامس: بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. الدرس السادس: الإتصال.

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	كمية غير معينة – غير معرف – نهاية يمنى – نهاية يسرى – نهاية دالة – تعويض مباشر – دالة كثيرة الحدود – نهاية الدالة عند اللانهاية – دالة مثلثية – نهاية دالة مثلثية – اتصال دالة.	المحاضرة – المناقشة – العصف الذهنى– التعلم التعاونى – الطريقة الاستقرائية – الطريقة الاستنباطية.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الدرس والأسئلة المتضمنة فى بند حاول أن تحل كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة فى بند تحقق من فهمك فى نهاية كل درس والأسئلة المتضمنة في كل من التمارين العامة للوحدة والأختبار التراكمى.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات	
حساب المثلثات	◂ يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها. ◂ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يُوجِد حلين لزاوية مجهولة). ◂ يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة. ◂ يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث. ◂ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث. ◂ يستخدم قانونى قاعدتى جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث. ◂ يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية: ◂ إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه. ◂ إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ◂ إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة. ◂ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانونى (قاعدتى) الجيب وجيب التمام لأى مثلث. ◂ يدرس الحالة المبهمة(Ambiguous Case) في حل المثلث كنشاط جماعى ◂ يبحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن الحالة المبهمة وإمكانية حل المثلث حسب القياسات المعطاه.	الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب. الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام.	

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	حساب المثلثات - قاعدة الجيب - زاوية حادة - زاوية منفرجة - زاوية قائمة - الحالة المبهمة - حلول ممكنة - حل وحيد - أقصر ضلع - أطول ضلع - مساحة المثلث - أطوال أضلاع المثلث - - زاوية مقابلة لضلع - أصغر زاوية - أكبر زاوية - قاعدة جيب التمام.	العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة، والتكليفات الجماعية والفردية، والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
المتتابعات والمتسلسلات	• يتعرف مفهوم المتتابعة. • يميز بين المتتابعة والمتسلسلة. • يتعرف المتتابعة الحسابية • يستنتج الحد العام للمتتابعة الحسابية بصور مختلفة . • يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية. • يتعرف المتسلسلة المنتهية وغير المنتهية • يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة. • يتعرف المتتابعة الهندسية. • يستنتج الحد العام للمتتابعة الهندسية. • يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية. • يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين. • يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة. • يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية. • يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية • يحول الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادي. • يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية. • يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلات. • يستخدم الحاسبات فى حل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام المتتابعات والمتسلسلات.	الدرس (١ - ١): المتتابعات. الدرس (١ - ٢): المتسلسلات ورمز المجموع. الدرس (١ - ٣): المتتابعات الحسابية. الدرس (١ - ٤): المتسلسلات الحسابية. الدرس (١ - ٥): المتتابعات الهندسية. الدرس (١ - ٦): المتسلسلات الهندسية.
التباديل والتوافيق	• يتعرف مبدأ العد (الاساسى-المشروط). • يتعرف كل من التباديل والتوافيق. • يتعرف مفهوم التوافيق. • يستنتج العلاقة بين التبادل و التوافيق. • يتعرف مضروب العدد. • يستنتج مثلث باسكال. • يستخدم الآلة الحاسبة فى حساب التباديل و التوافيق لبعض العمليات الحسابية. • يتعرف على بعض علماء الرياضيين فى المجال مثل بليز باسكال. • يحل بعض المشكلات الرياضية باستخدام قواعد التباديل و التوافيق. • يحل بعض المشكلات باستخدام مثلث باسكال. • يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.	الدرس (٢ - ١): مبدأ العد . الدرس (٢ - ٢): التباديل. الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	دالة – حد – متتابعة منتهية – متتابعة غير منتهية – متتابعة تزايدية – متتابعة تناقصية – متسلسلة – رمز التجميع – متتابعة حسابية – أساس المتتابعة الحسابية – أوساط حسابية – متسلسلة حسابية – متتابعة هندسية – أساس المتتابعة الهندسية – أوساط هندسية – متسلسلة هندسية – متسلسلة هندسية غير منتهية – مالانهاية	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهني – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاوني – حل المشكلات.	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية (الفردية والجماعية) وفي أثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية، وتدريبات عامة على الوحدة في نهاية الوحدة والاختبار التراكمي.
	مبدأ العد – عملية – شجرة بيانية– مضروب– تباديل– توافيق – عناصر– ترتيب– لجنة – مجموعة جزئية	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	◂ تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها ، واختبار تراكمى فى نهاية الوحدة. ◂ خريطة الوحدة ◂ يوضح المخطط المفاهيم الخاصة بما يسمى التباديل و التوافق، حيث نتناول مبدأ العد و الذى يشتمل مفهومان رئيسيان و هما مبدأ العد الأساسى ومبدأ العد المشروط. ثم ننتقل الى مفهوم مضروب العدد و منه الى مفهوم التباديل حيث تشتمل الوحدة على بعض التطبيقات الرئيسة على التباديل. و يرتبط بذلك مفهوم التوافيق الذي يعتمد بشكل كبير على التباديل. و أيضًا يحتوى على عدد كبير من التطبيقات الحياتيه.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
التفاضل والتكامل	• يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط معدل التغير، ومعدل التغير. • يستنتج المشتقة الأولى للدالة. • يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس). • يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (المشتقة اليمنى – المشتقة اليسرى). • يستنتج العلاقة بين الاشتقاق و الاتصال. • يحدد بعض قواعد الاشتقاق. ◦ مشتقة الدالة الثابتة. ◦ مشتقة الدالة د: د(س) = س^{ن} ◦ مشتقة الدالة د: د(س) = س ◦ مستقة الدالة د: د(س) = أ س^{ن} ◦ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما. ◦ مشتقة حاصل ضرب دالتين. ◦ مشتقة خارج قسمة دالتين. ◦ مشتقة دالة الدالة – قاعدة السلسلة. ◦ مشتقة الدالة ص = (د(س))^{ن} ◦ مشتقة الدوال المثلثية. • يوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة. • يوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة. • يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية. • يتعرف مفهوم التكامل – المشتقة العكسية. • يتعرف قواعد التكامل الآتية: ◦ $\int$ أ س^{ن} ى س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ث حيث ن ≠ −١ ◦ $\int$ أ د(س) ى س = أ $\int$ د(س) ى س. حيث أ ثابت ◦ $\int$ [د(س) ± ر(س)] ى س = $\int$ د(س) ى س ± $\int$ ر(س) ى س ◦ $\int$ (أ س + ب)^{ن} ى س = $\frac{١}{أ(ن+١)}$ (أ س + ب)$^{ن+١}$ + ث حيث ن ≠ −١ ◦ $\int$ حا أ س ى س = $\frac{-١}{أ}$ حتا أ س + ث حيث أ ثابت ◦ $\int$ حتا أ س ى س = $\frac{١}{أ}$ حا أ س + ث حيث أ ثابت ◦ $\int$ قا^{٢} أ س ى س = $\frac{١}{أ}$ ظا أ س + ث حيث أ ثابت ◦ $\int$ د′(س) [د(س)]^{ن} ى س = $\frac{١}{ن+١}$ [د(س)]$^{ن+١}$ + ث	الدرس (٣ – ١): معدل التغير. الدرس (٣ – ٢): الاشتقاق. الدرس (٣ – ٣): قواعد الاشتقاق. الدرس (٣ – ٤): مشتقات الدوال المثلثية. الدرس (٣ – ٥): تطبيقات على المشتقة. الدرس (٣ – ٦): التكامل.

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	التغير – متوسط التغير – معدل التغير – المشتقة الأولى – المشتقة اليسرى – المشتقة اليمنى – الاشتقاق – دالة قابلة للاشتقاق – حاصل الضرب – خارج القسمة – قاعدة السلسلة – الدوال المثلثية – تكامل – مشتقة عكسية.	المناقشة – المحاضرة – العصف الذهني – التعلم التعاوني – الطريقة الاستقرائية – الطريقة الاستنباطية – تعلم بالاكتشاف الموجه.	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء الدرس والأسئلة المتضمنة في بند حاول أن تحل كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة على كل درس في الوحدة.

PDF Compressor Pro

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
حساب المثلثات	• يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الأرتفاع والأنخفاض . • يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما. • يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية. • يستنتج صيغة هيرون(**Herons Formula**) ويستخدمها في إيجاد مساحة المثلث . • يستخدم الآلة الحاسبة في حل مسائل على المتطابقات المثلثية	الدرس (٤ - ١): زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلثات) الدرس (٤ - ٢): الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين. الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية لضعف الزاوية. الدرس (٤ - ٤): صيغة هيرون.

PDF Compressor Pro

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	زاوية – زاوية ارتفاع – زاوية انخفاض – دالة مثلثية – دالة الجيب – دالة جيب التمام – الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين – الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين – الدوال المثلثية لضعف الزاوية – الدوال المثلثية لنصف الزاوية – صيغة هيرون	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، والأنشطة المقترحة، والتكليفات الجماعية والفردية، والاختيار التراكمى فى نهاية الوحدة.

PDF Compressor Pro

الاختبار الأول/ ورقة أولى (فصل دراسى أول)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) إذا كان $٣^{س} = ٢$ فإن $٢٧^{س} =$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٨ د) ٩

(٢) إذا كان $لو_{٤} س = ٢$ فإن س تساوى:

أ) ٤ ب) ٢ ج) ± ٢ د) -٢

(٣) الدالة د حيث $د(س) = \frac{|س|^{٢}}{س}$ متماثلة بالنسبة إلى النقطة:

أ) (٠، ٠) ب) (٠، ٢) ج) (٠، -٢) د) (-٢، ٢)

(٤) مجموعة حل المتباينة $|س| > ٢$ هى:

أ) $-٢ > س > ٢$ ب) $-٢ \geq س \geq ٢$ ج) ح $=]-٢، ٢[$ د) ح $= [-٢، ٢]$

السؤال الثانى:

(١) استخدم منحى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ فى رسم منحنى الدالة $ر$ حيث $ر(س) = (س - ٢)^{٢}$ ومن الرسم أوجد المدى ثم ابحث الإطراد.

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

السؤال الثالث:

(١) أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة: $لو_{٣} س = لو_{٤} (س + ٦)$

(٢) عين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

أ) $د(س) = س$ حا $٢س$ ب) $د(س) = ٣س - س^{٣}$

السؤال الرابع:

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث $د(س) = |٢س| - س + ٢$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٥$

(٢) إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} |س| & ، \ س \leq ٠ \\ -س & ، \ س > ٠ \end{cases}$

فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم اوجد مدى هذه الدالة ثم ابحث الاطراد.

PDF Compressor Pro

الاختبار الثانى/بحته ورقة أولى (فصل دراسى ثانى)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) أساس المتتابعة الهندسية فيها $ع_{ن+١} = \frac{١}{٣} ع_ن$ لكل $ن \geq ١$ هى:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) ٣ د) ٤

(٢) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٦} (٣ر + ٢)$ يساوى:

أ) ٧٢ ب) ٧٥ ج) ٧٨ د) ٨١

(٣) الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ١٦ يساوى:

أ) -١٢ ب) ١٢ ج) ± ١٢ د) ± ١٤٤

(٤) إذا كان $ن! \over (ن-١)!$ = ١٢ فإن ن تساوى:

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

السؤال الثانى:

(١) أوجد مجموع الأعداد الفردية المحصورة بين ٣٠، ٥٠ .

(٢) ما عدد التراتيب المختلفة التى يمكن تكوينها إذا أخذنا ٣ حروف من كلمة «كتاب»

السؤال الثالث:

(١) إذا كان $و_{م} = ٣٥$ فأوجد قيمة $ل_{٥}$

(٢) متتابعة هندسية أى حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود، أوجد أساسها.
وإذا كان الحد الرابع من المتتابعة هو ٢٧ فأوجد المتتابعة.

السؤال الرابع:

(١) متتابعة حسابية حدها الأول = ٧ ومجموع ١٠ حدود الأولى فيها = ٢٥٠ أوجد المتتابعة.

(٢) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها ١٤ ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٤ أوجد المتتابعة ومجموع عدد لانهائى من حدودها ابتداء من الحد الأول.

PDF Compressor Pro

الاختبار الأول/ ورقة ثانية (فصل دراسى أول)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١}$ تساوى:

أ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ب $\sqrt{٢}$ ج ١ د ٢

(٢) إذا كانت د (س) = $\frac{\text{حا}٢س}{س}$ لكل س > ٠ فإن $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

أ ٠ ب ١ ج ٢ د ليس للدالة نهاية

(٣) مساحة سطح الدائرة التى تمر برؤوس مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ $\sqrt{٣}$ سم = ... سم^{٢}.

أ $\pi ٣٦$ ب $\pi ٦\sqrt{٣}$ ج ٣٦ د $\pi ١٨\sqrt{٣}$

(٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣سم ، ٥سم ، ٧سم تساوى:

أ ٩٠° ب ١٢٠° ج ١٣٥° د ١٥٠°

السؤال الثانى:

(١) أوجد: أ $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س^{٥}} - ٣٢}{س - ٨}$ ب $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س} + \frac{٣س}{س + ٣})$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه أ = ١٢سم ، ب = ١٥سم، جـ = ١٧سم أوجد ق (∠أ) ثم احسب مساحة سطح المثلث لأقرب رقم عشرى واحد.

السؤال الثالث:

(١) أوجد: أ $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا}^{٢}٣س}{٣س^{٢}}$ ب $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{٩ - ٣س^{٢}}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه أ = ٤ , ٩سم ، ق(ب) = ٤٧° ، ق(∠ جـ) = ٥٣° احسب محيط المثلث.

السؤال الرابع :

(١) إذا كان د(س) = $\begin{cases} ٢س \text{ ظتا } س & ، \ س > ٠ \\ ١ + \text{حتا } س & ، \ س < ٠ \end{cases}$ فابحث وجود $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \ س < ٣ \\ ٢أ س + ٢ & ، \ س \geq ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ فأوجد أ ، ب

PDF Compressor Pro

الاختبار الثانى / ورقة ثانية (فصل دراسى ثانى)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} −٣س+١ عندما س = ٢ يساوى

أ −١ ب ١ ج ٢ د ٣

(٢) $\int$ س (س^{٢}+١)^{٣} .ىس تساوى:

أ (س^{٢}+١)^{٤}+ث ب $\frac{١}{٢}$(س^{٢}+١)^{٤}+ث ج $\frac{١}{٤}$(س^{٢}+١)^{٤}+ث د $\frac{١}{٨}$(س^{٢}+١)^{٤}+ث

(٣) إذا كان ص = جا٢س فإن $\frac{ىص}{ىس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب ١ ج $\sqrt{٣}$ د ٢

(٤) ابسط صورة للمقدار: جتا٥٥°جتا٢٥° + جا٥٥° جا٢٥° تساوى:

أ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د ٠,٣٤٢

السؤال الثانى:

(١) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س+٢}{س-٢}$ عند النقطة (٠ ، −١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٢) إذا كان جا أ=$\frac{٨}{١٧}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < π، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة جتا (٢أ − ب).

السؤال الثالث:

(١) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه هو قا^{٢}س + جتاس . أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$).

(٢) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٧°ثم سار الراصد فى خط مستقيم ٥٥مترًا فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٦°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

السؤال الرابع:

(١) إذا كانت ص = جاس ظاس فأوجد $\frac{ىص}{ىس}$ عندس = $\frac{\pi}{٤}$

(٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٢ & \text{لكل } س \geq ٢ \\ ٢أس+٣ب & \text{لكل } س < ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢

فأوجد قيمة كل من أ ، ب

PDF Compressor Pro

تقييم أداء الطالب فى الرياضيات

توجيهات لإنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به:

إن إنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به هو عملية مستمرة. تظهر بعض أدوات التقييم، منذ الوهلة الأولى، مناسبة جدًّا للمعلم ولطلابه، وتظهر أدوات أخرى جودة وفعالية بعد أن تتاح للمعلم فرصة تجريبها وتحسينها، وفى الوقت نفسه هناك أدوات غير صالحة لمستوى ما ولموقف تعليمى معين.

وهنا نضع بين أيدى زملائنا المعلمين بعض التوجيهات التى قد تكون مفيدة عند اختيار نماذج التقييم لبرنامج ما.

استخدام نموذج التقييم الذى يحقق أهدافك بحيث:

- يؤمن مراجعة لطرق التعليم التى استخدمتها، ويعطيك الدلائل التى تستفيد منها فى إعادة النظر وتعديل محتوى وسرعة عملية التعليم.
- يؤمن للطالب تأكيدًا لنجاحة في مجال ما، بالإضافة إلى تحديد التحسين المطلوب في مجالات أخرى.
- تؤمن نظم التقييم المتعارف عليها نتائج واقعية ملموسة.

اجعل من عملية التقييم خبرة إيجابية للطلاب وذلك من خلال:

- استخدام أساليب منوَّعة للتقييم.
- توفير فرص للطلاب يعرضون فيها إمكاناتهم الرياضية في جو يسمح بالأداء الأفضل.
- التركيز على ما يعرفه الطلاب ويتقنونه، لا على ما لا يعرفونه أو يتقنونه.
- حفز الطلاب على التحصيل بوضعهم أمام مهام تعكس قيمة جهودهم.

استخدام تقييم الأداء في التركيز على مهارات التفكير العليا، وذلك من خلال:

- التركيز على تقييم الأداء الذى يصور الطالب مفكرًا ناقدًا وحالا للمسائل.
- تحديد كيفية تعامل الطالب مع الرياضيات، لا كيفية حل المسائل فقط.

قدم الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

استخدام الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

- استخدام أنشطة متشابهة للأنشطة التدريسية فى عمل التقييم.
- استخدام الأنشطة التقويمية في تأكيد التعليم.
- تقديم التغذية الراجعة التفصيلية الفورية التى يحتاج إليها الطلاب لتأكيد عمليات التعلم.

أشرك كل طالب في عمليات التقييم، وذلك من خلال:

- تشجيع الطلاب على عرض أعمالهم.
- تشجيع الطلاب على المشاركة في تحقيق الأهداف.

استطلاع رأى الطالب

لكل عبارة من العبارات التالية ضع علامة (✓) أسفل الخانة التى تصف إحساسك.

العبارة	معظم الوقت	بعض الوقت	نادرًا ما يحدث
أتقدم بشكل ملحوظ فى مادة الرياضيات.			
احتاج إلى المساعدة فى حل كثير من المسائل.			
الرياضيات لها فائدة في جميع المواقف الحياتية			
أفهم المسائل اللفظية			
أستطيع حل معظم المسائل			
أفضِّل تجريب استراتيجيات جديدة في حل المسائل			
أصاب بالإحباط بسهولة من دراسة الرياضيات			
لدى دفتر منظم لمادة الرياضيات			
أعتقد أن الرياضيات ممتعة			

صف مشروعًا تفضِّل أن يعمل به الفصل. ما نوع الرياضيات المفضلة لديك؟ ولماذا؟

اكتب قائمة ببعض الأنشطة التى مارستها خارج المدرسة، واستخدمت فيها الرياضيات.

PDF Compressor Pro

تقييم ذاتى لعمل الفريق:

أسماء الفريق: .....

اقرأ جيدًا كل عبارة من العبارات التالية، ثم أعط التقدير (٤) لمجموعتك إذا كنت توافق على العبارة، والتقدير (٣) إذا كنت توافق إلى حدٍّ ما، والتقدير (٢) إذا كنت لا توافق إلى حدٍّ ما، والتقدير (١) إذا كنت لا توفق، واستخدم (غ م) وتعنى غير ملائم إذا كانت العبارة لا تنطبق على هذا الموقف. حوِّط استجابة واحدة لكل وصف لمجموعتك.

العبارات	موافق	موافق إلى حد ما	غير موافق إلى حد ما	غير موافق	غير ملائم
أعضاء المجموعة					
أنجزوا المهام المكلفين بها.	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا الغرض من المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا حل المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
استمعوا جيدًا إلى كل من الأفكار الأخري.	٤	٣	٢	١	غ م
قدموا تغذية راجعة لذوى الأفكار المشوشة.	٤	٣	٢	١	غ م
تعاونوا في تجهيز العمل الذى تم تجميعة.	٤	٣	٢	١	غ م
استقوا تكليفاتهم من اليوم السابق.	٤	٣	٢	١	غ م
عرضوا أفكارهم على المجموعة.	٤	٣	٢	١	غ م
تفاهموا مع بعضهم البعض عند الحاجة.	٤	٣	٢	١	غ م

من خلال العمل مع فريق، تعلمت .....

سجل عمل الفريق

أسماء الفريق:

لكل فريق عمل سجِّل التاريخ، والمهمة التى كلفوا بها، وأرقام الصفحات، ثم صف عمل أعضاء الفريق معًا للوصول إلى حل جماعى للمهمة التى كلفوا بها . اذكر أى طرق أو أساليب وجدتها مفيدة لإنجاز المهمة.

التاريخ	المهمة	وصف عمل الفريق

التقييم الذاتى للطالب

المهمة:

اكتب عمّا قمت بإنجازه.

مال الذى حاولت تعلُّمه؟ كيف بدأت عملك؟ مال الأدوات التى كنت في حاجة إليها؟ ما الذى تعلمته؟

ضع علامة (✓) أمام العبارات التى تصف طريقة عملك.

خطَّطت قبل البدء في العمل. كنت قادرًا على إجراء هذا العمل.

لم أفهم التعليمات. اتبعت التعليمات ولكننى حصلت على إجابة خاطئة.

توصلت إلى طريقة أخرى لإنجاز المهمة. أستطيع شرح كيفية إنجاز هذه المهمة لشخص آخر.

كان العمل أسهل مما توقعت. كان العمل أصعب مما توقعت. إضافات أخرى:

PDF Compressor Pro

خبراتى في الرياضيات

الرياضيات التى أفضِّلها:

مهارات الرياضيات التى أتقنتها وأستطيع استخدامها:

المكافآت التى حصلت عليها في الرياضيات:

الأهداف التى أريد تحقيقها في مجال دراسة الرياضيات:

مهارات الرياضيات التى أحتاج إلى مزيد من التمرين عليها:

تقييم الأداء في حل المسائل

ضع علامة (✓) أسفل العمود المناسب والذى يصف بدقة عمل الطالب:

	فى معظم الأحيان	بعض الأحيان	أبدًا
افهم			
يقرأ المسألة بعناية.	.....	.....	.....
يدرس أى جدول أو أي رسم بيانى.	.....	.....	.....
يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصة.	.....	.....	.....
يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.	.....	.....	.....
يستطيع فهم وإدراك السؤال الذى يجب الإجابة عنه.	.....	.....	.....
خطط			
يختار الخطة الأنسب لحل المسألة.	.....	.....	.....
يقدر الإجابة الصحيحة.	.....	.....	.....
حل			
يعمل وفق منهجية معينة.	.....	.....	.....
يعرض الحل بطريقة منظمة ومنطقية.	.....	.....	.....
يحسب بطريقة صحيحة.	.....	.....	.....
يعطى الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.	.....	.....	.....
تحقق			
يتحقق من معقولية الإجابة.	.....	.....	.....
يجرب طرقًا أخرى لحل المسألة.	.....	.....	.....
اتجاه			
يظهر استعدادًا لمحاولة حل المسألة.	.....	.....	.....
يظهر ثقة بالنفس.	.....	.....	.....
محاولات خاطئة لحل المسألة.	.....	.....	.....
تعليقات أخرى			

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر: حل المسائل

التاريخ: .....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولا

– بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يقرأ المسألة بعناية.	يدرس الصور والجداول والتمثيلات البيانية.	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاص.	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تتطلب الإجابة عنها	يختار الخطة المناسبة.	يقدر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحل بطريقة منظمة.	يجرى العمليات الحسابية بدقة.	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة.	يتحقق من صحة الإجابة ومعقوليتها.	يجرى طرقًا أخرى للحل.
١-													
٢-													
٣-													
٤-													
٥-													
٦-													
٧-													
٨-													
٩-													
١٠-													
١١-													
١٢-													
١٣-													
١٤-													
١٥-													
١٦-													
١٧-													
١٨-													
١٩-													
٢٠-													
٢١-													
٢٢-													
٢٣-													
٢٤-													
٢٥-													
٢٦-													
٢٧-													
٢٨-													

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر: الملاحظة

التاريخ: .....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولا

– بحاجة إلى التطوير

غ. ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب ونظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرى طرقًا أخرى للحل
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

PDF Compressor Pro

التقييم المستمر: التعلم التعاونى

التاريخ: .....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولا

– بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر قدرة على حل المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجه ويساعد آخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلم بهدوء	يطرح أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يظهر صبرًا و مثابرة	يظهر عدم موافقة دون اشمئزاز
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

PDF Compressor Pro

التقيم الفردى من خلال الملاحظة

	دائمًا	أحيانًا	أبدًا
الفهم			
يظهر معرفة بالمهارات.	.....	.....	.....
يدرك المفاهيم.	.....	.....	.....
يختار الخطة المناسبة للحل.	.....	.....	.....
يحل المسائل بدقة.	.....	.....	.....
عادات العمل			
يعمل بطريقة منظمة.	.....	.....	.....
يعمل بنظافة.	.....	.....	.....
يقدم العمل في الوقت المحدد.	.....	.....	.....
يعمل مع الآخرين بتناغم.	.....	.....	.....
يستخدم الوقت بفاعلية وإنتاجية.	.....	.....	.....
يطلب المساعدة عند الحاجة.	.....	.....	.....
الثقة بالنفس	.....	.....	.....
يبادر بتوجيه الأسئلة.	.....	.....	.....
إيجابى التوجيه والسلوك.	.....	.....	.....
يساعد الآخرين.	.....	.....	.....
المرونة			
يجرب طرقًا أخرى.	.....	.....	.....
يحترم ويستخدم أفكار الآخرين.	.....	.....	.....
يستخدم الرياضيات الذهنية والتقدير.	.....	.....	.....
يستخدم الآلات الحاسبة والتقنيات الأخرى.	.....	.....	.....
المثابرة			
يظهر صبرًا ومثابرة.	.....	.....	.....
يعمل وفق منهجية معينة.	.....	.....	.....
يظهر استعدادًا للمحاولة والتجربة.	.....	.....	.....
يتأكد من صحة عمله دون أن يطلب منه.	.....	.....	.....

PDF Compressor Pro

التقييم العام للطالب:

التاريخ: .....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولا

– بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	حل المسائل	التعلم التعاونى	الكتابة في الرياضيات	نشاط غرفة الفصل	الواجبات المنزلية	المشاركة في المناقشة	درجات الاختبارات القصيرة	درجات الامتحانات			
١-											
٢-											
٣-											
٤-											
٥-											
٦-											
٧-											
٨-											
٩-											
١٠-											
١١-											
١٢-											
١٣-											
١٤-											
١٥-											
١٦-											
١٧-											
١٨-											
١٩-											
٢٠-											
٢١-											
٢٢-											
٢٣-											
٢٤-											
٢٥-											
٢٦-											
٢٧-											
٢٨-											

PDF Compressor Pro

قائمة المراجعة/عرض المشروع

يمكن أن يستخدم هذا النموذج لتقييم مشروع ما مقدم من قبل طالب واحد أو من مجموعة طلاب شفهيًّا أو كتابة، كما أنه من الممكن أن يستخدم لمناقشة طرق ناجحة لتقديم أى مادة، ومن المفيد أن يقدم للطلاب لإرشادهم فى التخطيط لأى مشروع في فن الرياضيات أو التجارب العلمية، أو تجميع البيانات لعمل الجداول والرسوم البيانية، أو عروض حاسوبية، أو مسرحيات هزلية قصيرة، أو أى مشروع بحثى سواء أكان شفهيًّا أم مكتوبًا.

الطالب/ الطلاب: .....

المشروع: .....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولا

– بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

المشروع

يعرض مفهومًا رياضيًّا بشكل جيد.

يتواصل مع الأفكار الرياضية بوضوح.

يربط مع مواد أخرى.

يظهر الوقت الذى انقضى عليه تخطيطًا وتحضيرًا.

هو أصيل و/ أو مبدع.

هو نابض بالحياة ونظيف.

يثير المزيد من الاستقصاءات حول الموضوع.

يتضمن تقريرًا مكتوبًا.

يذكر المواد المستخدمة.

يظهر توزيع المهام التى كلفت بها مجموعة الطلاب.

التقويم الشفهى

يظهر معرفة للمفهوم الرياضى

منظم: يتضمن مقدمة ومضمونًا وخاتمة.

يستخدم الوسائل السمعية/ البصرية عند الحاجة وفى الوقت المناسب.

يتكلم بوضوح ويضبط التقويم بما يناسب من سرعات.

يجيب عن الأسئلة ويثير مزيدًا من الاهتمام بالموضوع.

يظهر ميلًا وتوجهًا إيجابيين لحل المسائل.

يذكر الموارد المستخدمة.

PDF Compressor Pro

المعيار	الموشرات	الصفحات
المعيار الأول تعرف صورًا مختلفة من الدوال ذات المتغير الحقيقى وسلوكها وتمثيلها بيانيا	١ يتعرف مفهوم الدالة ذات المتغير الحقيقى.	٤
	٢ يحدد مجال الدوال ذات المتغير الحقيقى، والمجال المقابل والمدى لها.	٦ ، ٩
	٣ يتعرف بعض خواص الدوال ذات المتغير الحقيقى. ✓ الدالة الاحادية (one – to one)وفيها يميز بين الدالتين د(س) = $\frac{٢س-٣}{٤س+٥}$ ، ر(س) = س^{٢} + ٨س – ٤ حيث إنه إذا كان د(أ) = د(ب) فإن أ = ب بينما إذا كان ر(أ) = ر(ب) فليس من الضرورى أن يكون أ = ب وعلى هذا فإن د(س) دالة أحادية بينما ر(س) دالة ليست احادية ✓ الدالة الزوجية. ✓ الدالة الفردية.	٢١ ١٧
	٤ يستنتج اطراد الدوال ذات المتغير الحقيقى (تزايد الدوال- تناقص الدوال ذات المتغير الحقيقى (تركيب الدوال).	٢٥
	٥ يتعرف فكرة بسيطة عن العمليات على الدوال ذات المتغير الحقيقى (تركيب الدوال) .	١٠ – ١١
	٦ يتعرف الدوال كثيرات الحدود.	٣٠
	٧ يرسم منحنيات الدوال الآتية ويستنتج خواص كل منها.	٣٠
	✓ **الدالة التربيعية**: د(س) = س^{٢}.	٣١
	✓ **دالة المقياس**: د(س) = |س| ، مع الإشارة إلى أن : $\sqrt{س^{٣}}$ = |س|	٣٢
	✓ **الدالة التكعيبية**: د(س) = س٣	٣١
	✓ **الدالة الكسرية**: د(س) = $\frac{١}{س}$	٣٢
	٨ يستنتج تأثير كل من التحويلات: د(س ± أ) ± ب ، أد(س ± ب) ± جـ على الدوال السابقة.	٣٣ ، ٣٥ ، ٣٦
	٩ يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال ذات المتغير الحقيقى.	٣٩ – ٤٢
	١٠ يحل معادلات على الصورة: |أس +ب| = جـ ، |أس +ب| = |ءس + جـ| ، |أ| س +ب| = جـ س + ء	٤٨ – ٥٢
	١١ يحل متباينات على الصورة: | س +ب)<جـ ، |أس +ب|≥ جـ |أس +ب|< جـ ، |أس +ب|≤جـ	٥٤ – ٥٥
	١٢ يستخدم الدوال ذات المتغير الحقيقى فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.	٥٢ – ٥٣
	١٣ يربط بين ما درسه فى تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة.	٤٢
	١٤ يبحث عن التمثيل البيانى للدوال ذات المتغير الحقيقى السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجيبرا (Geo Gebra) كنشاط وعمل جماعى.	٢٧ ، ٣٣
	١٥ يستخدم الآلة الحاسبة كنشاط في التمثيل البيانى لبعض الدوال التى يصعب تمثيلها بالطرق العادية، ومن ثم دراسة خواص هذه الدوال ، على أن يشار إلى ذلك بعلامة الآلة الحاسبة أمام تلك الدوال .	٣٨ ٥٢ – ٥٣
	١٦ استخدام الدوال ذات المتغير الحقيقى فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.	

PDF Compressor Pro

المعيار	الموشرات	الصفحات
المعيار الثاني تعرف صورًا مختلفة من الدوال ذات المتغير الحقيقى وسلوكها وتمثيلها بيانيا	١ يتعرف الدالة الأسية: ص = $أ^{س}$ أو د(س) = $أ^{س}$، أو د : س ← $أ^{س}$ حيث أ ∈ ح+ ، أ ≠ ١	٧١
	٢ يتعرف التمثيل البيانى للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.	٧٢
	٣ يتعرف قوانين الأسس الكسرية.	٦٦ - ٦٧
	٤ يحل معادلات أسية على الصورة: $أ^{س}$ = ب.	٧٧ - ٧٩
	٥ يحل تطبيقات تؤول إلى معدلات على الصورة $أ^{س}$ = ب.	٧٣
	٦ يتعرف الدالة اللوغاريتمية: ص = لو$_{أ}$ س أو د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ∈ ح$^{+}$ - {١}، س ∈ ح$^{+}$	٨٦
	٧ يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتيمية والعكس.	٨٧
	٨ يتعرف الدالة العكسية وشرط وجود الدالة العكسية (اختبار الخط الأفقى).	٨١ - ٨٥
	٩ يتعرف التمثيل البيانى للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك، التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتيمة فى فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية، ويستنتج خواصها .	٨٦
	١٠ يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتيمية بيانيًا.	٨٩
	١١ يتعرف قوانين اللوغاريتمات الآتية:	٩٢ - ٩٤
	✍ لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص، س > صفر، ص > صفر.	٩٢
	✍ لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص، س > صفر، ص > صفر.	٩٣
	✍ لو$_{أ}$ $\frac{١}{س}$ = - لو$_{أ}$ س	٩٤
	✍ لو$_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} أ}$	٩٤
	✍ لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{لو_{ب} أ}$	٩٤
	✍ لو$_{س}$ س = ١	٩٢
	✍ لو$_{أ}$ ١ = صفر	٩٢
	١٢ يحل معادلات لوغاريتمية.	٩٥
	١٣ يحل مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.	٩٦
	١٤ يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠.	٨٧
	١٥ يستخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد قيمة اللوغاريتمات، وحل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات	٩٥
	١٦ يستخدم كل من الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية فى حل تطبيقات حياتية منها : دالة النمو ودالة الاضمحلال.	٧٣ - ٧٥
	١٧ أنشطة توضح تطبيقات رياضية وحياتية بسيطة على المفاهيم التى تم دراستها على الأسس واللوغاريتمات.	٧٩ - ٨٦

PDF Compressor Pro

المعيار	الموشرات	الصفحات
المجال الثاني التفاضل والتكامل المعيار الأول تعرف المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال، وتطبيقات عليهما	١ يتعرف مقدمة فى نهايات الدوال.	١٠٧
	٢ يتعرف الكميات غير المعينة : $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$).	١٠٦
	٣ يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:	
	✓ بالتعويض المباشر.	١١٢
	✓ بالتحليل.	١١٥
	✓ بالقسمة المطولة.	١١٥
	✓ بالضرب فى المرافق.	١١٦
	٤ يوجد نهاية دالة باستخدام القانون: $\text{نهـا}_{س\to أ} \frac{س^{ن}-أ^{ن}}{س-أ} = ن\, أ^{ن-١}$	١١٧
	٥ يستنتج نهاية دالة بإستخدام القانون: $\text{نهـا}_{س\to أ} \frac{س^{ن}-أ^{ن}}{س-أ} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$	١١٧
	٦ يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.	١٢١ - ١٢٦
	٧ يوجد نهاية الدوال المثلثية.	١٢٧ - ١٣١
	٨ يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة، وتقدير قيمة النهاية لها فى صورة أنشطة.	١٠٩
	٩ يستخدم الآلة الحاسبة البيانية كنشاط فى إيجاد نهايات بعض الدوال التى يصعب إيجاد نهايتها بالطرق العادية	١٠٩
	١٠ يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى لدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.	١٣٢ - ١٣٦
	١١ يتعرف مفهوم اتصال الدوال.	١٣٧
	✓ اتصال دالة عند نقطة.	١٣٨
	✓ اتصال دالة على فترة.	١٤٠
	✓ اعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح دوالا متصلة.	١٤٠
	١٢ يتعرف تطبيقات (تمارين - أنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.	١١٧ - ١٢٠ ١٠٩ - ١٢٦ - ١٤٣
المجال الثاني التفاضل والتكامل المعيار الأول تعرف المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال، وتطبيقات عليهما	١ يتعرف، يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.	١٥٤
	٢ يستخدم قانون(قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.	١٥٥
	٣ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زاويا هذا المثلث (يوجد حلين لزاوية مجهولة).	١٥٦ - ١٥٩
	٤ يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.	١٦٠
	٥ يتعرف، يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.	١٦٤
	٦ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.	١٦٧
	٧ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى أيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.	١٦٦
	٨ يستخدم قانونى (قاعدتى) الجيب، وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:	١٥٥
	✍ إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.	١٦٧
	✍ إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.	١٦٨
	✍ إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.	
	٩ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.	١٦٥
	١٠ يدرس الحالة المبهمة(Ambigious case) فى حل المثلث كنشاط جماعى وأبحاث علمية	١٥٦

PDF Compressor Pro

المعيار	الموشرات	الصفحات
تعرف المتتابعات والمتسلسلات، وتطبيقات عليهما.	١ يتعرف مقدمة فى المتتابعات – مفهوم المتتابعة.	٤
	٢ يميز بين المتتابعة والمتسلسلة.	١٠
	٣ يتعرف المتتابعة الحسابية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.	١٤ – ١٦
	٤ يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية، ويدخل عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين.	١٧ – ١٨
	٥ يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة..	٢١ – ٢٥
	٦ يتعرف المتتابعة الهندسية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.	٢٩ – ٣٢
	٧ يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية، ويستنتج العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسى ويدخل عدد محدود من الأوساط الهندسية بين عددين.	٣٣ – ٣٤
	٨ يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.	٣٧ – ٣٩
	٩ يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.	٤١ – ٤٣
	١٠ يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل: المشكلة السكانية.	٤٢ ، ٤٥
	١١ يستخدم الحسابات فى إجراء عمليات متطلبة فى حل مشكلات رياضية وحياتية على المتتابعات والمتسلسلات.	٨ ، ١٢ ، ١٦
تعرف مبدأ العد، والتباديل والتوافيق، ونظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب وتطبيقات عليها.	١ يتعرف مبدأ العد، وتطبيقات بسيطة عليه.	٥٤ – ٥٦
	٢ يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق، والعلاقة بينهما (تعريف كل منهما بدون خواص إضافية أو براهين)	٥٧ – ٦٥
	٣ يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.	٦٣
تعرف التفاضل والتكامل، وتطبيقاتها فى مواقف فيزيائية وحياتية مختلفة.	١ يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط معدل التغير ومعدل التغير.	٧٢ – ٧٧
	٢ يستنتج المشتقة الأولى للدالة.	٨٠ ، ٨١
	٣ يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).	٨٠
	٤ يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (النهاية اليمنى – النهاية اليسرى).	٨٥
	٥ يستنتج العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.	٨٤
	٦ يحدد بعض قواعد الاشتقاق.	٨٨
	✓مشتقة الدالة الثانية قاعدة القوى د(س) = س^{ن}	٨٨
	✓مشتقة الدالة د (س) = س مشتقة الدالة د(س) = أس^{ن}	٨٨
	✓مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما.	٨٩
	✓مشتقة حاصل ضرب دالتين.	٨٩
	✓مشتقة خارج قسمة دالتين.	٩٠
	✓مشتقة دالة الدالة – قاعدة السلسلة.	٩١
	✓مشتقة الدالة: ص = (د (س))^{ن}	٩٢
	✓مشتقة الدوال المثلثية.	٩٥ – ٩٦

PDF Compressor Pro

المعيار	الموشرات	الصفحات
تعرف التفاضل والتكامل، وتطبيقاتها فى مواقف فيزيائية وحياتية مختلفة.	٧ يستخدم المشتقات فى تطبيقات هندسية مثل: إيجاد معادلة المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه.	١٠١ - ١٠٥
	٨ يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.	١٠٧
	٩ يتعرف، ويستنتج قواعد التكامل الآتية:	
	✓ $\int س^{ن} ؤ س = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث ، ن \neq -١$	١٠٩
	✓ $\int أ د(س) ؤ س = أ \int د(س) ؤ س$ حيث أ ثابت.	١١٠
	✓ $\int [د(س) + د(س)] ؤ س = \int د(س) ؤ س \pm \int د(س) ؤ س$	١١٠
	✓ $\int (أ س + ب)^{ن} ؤ س = \frac{١}{أ(ن+١)} (أ س + ب)^{ن+١} + ث ، ن \neq -١$	١١٠
	✓ $\int جا أ س ؤ س = -\frac{١}{أ} جتا أ س + ث$، حيث أ ثابت	١١٢
	✓ $\int جا أ س ؤ س = \frac{١}{أ} جا أ س + ث$، حيث أ ثابت	١١٢
	✓ $\int قا^{٢} أ س ؤ س = -\frac{١}{أ} ظا أ س + ث$، حيث أ ثابت	١١٢
	✓ $\int د'(س) [د(س)]^{ن} ؤ س = \frac{١}{ن+١} [د(س)]^{ن+١} + ث$، حيث ثابت	١١١
	١٠ أنشطة توضح تطبيقات رياضية وحياتية بسيطة على المفاهيم التى دراستها بالتفاضل والتكامل.	٩٨
تعرف تطبيقات على حساب المثلثات	١ يدرس تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض والاتجاهات كتطبيق علي كل من قاعدة جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية .	١٢٢ - ١٢٩
	٢ يتعرف ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.	١٣١ - ١٣٧
	٣ يتعرف ويستنتج المتطابقات الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية	١٣٨ - ١٤٣
	٤ يستنتج صيغة هيرون(Heron's formula)ويستخدمها فى إيجاد مساحة المثلث ويحل تطبيقات عليها.	١٤٥ - ١٤٦
	٥ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على المتطابقات المثلثية.	١٤٤
	٦ تطبيقات رياضية وحياتية بسيطة (كأنشطة) على المفاهيم التى دراستها فى حساب المثلثات	١٤٦ ، ١٥٠